چکیده

در این‌پایان نامه، روش گسسته‌سازی زمانی برای یک معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل سهموی غیرهمگن، با جمله‌ی حافظه از نوع پیچش به کار می‌رود. جواب این معادله به‌صورت انتگرال روی شاخه‌ی چپ یک هذلولی در صفحه‌ی مختلط نمایش داده می‌شود و می‌توان آن را به کمک قاعده‌ی انتگرال‌گیری عددی با دقتی بالا محاسبه کرد.

با به‌کارگیری این روش، مسئله به مجموعه‌ای متناهی از معادلات بیضوی با ضرایب مختلط که به‌صورت موازی حل می‌شوند، تبدیل می‌شود. برای مسائل با متغیر های مکان، ترکیبی از روش گسسته‌سازی زمانی و گسسته‌سازی مکانی به روش عناصر متناهی به‌کار گرفته می‌شود تا یک روش کاملاً گسسته به‌دست آید. علاوه بر این، تخمین‌های خطا برای روش‌های مذکور ارائه می‌شود. در پایان، تعدادی مثال عددی به منظور نشان دادن کارایی این دو روش آورده شده است.

واژگان کلیدی: معادلات انتگرال-دیفرانسیل؛ تبدیل لاپلاس؛ گسسته‌سازی زمانی؛ قواعد انتگرال‌گیری عددی؛ روش عناصر متناهی.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست برنامه های رایانه ای

پیشگفتار

برای حل طیف وسیعی از معادلات انتگرال دیفرانسیل، روش‌های عددی ای مانند تفاضلات متناهی با گام زمانی مورد استفاده و بررسی قرار گرفته است. در این روش های عددی جواب گسسته باید به گونه‌ای ذخیره شود که مقادیر متوالی تقریب انتگرال قابل محاسبه باشند. یکی از معایب این روش آنست که برای محاسبه‌ی جواب، به حجم بزرگی از حافظه نیازمندیم که بدین ترتیب، بخشی از کار به کاهش حافظه‌ی مورد نیاز اختصاص می‌یابد. ایده‌ی دیگری که برای حل اینگونه معادلات موجودست استفاده از تبدیل لاپلاس می‌باشد. در این ایده، جواب نهایی به صورت انتگرال روی منحنی نمایش داده می شود و سپس به کمک قاعده‌ی انتگرال‌گیری عددی مناسب، جواب تقریبی برای مسئله حاصل می‌شود. به این روش، گسسته‌سازی زمانی معادله با استفاده از قاعده‌ی انتگرال‌گیری می گوییم.

دکتر تومی[1] و همکارانش در سال‌های اخیر روش گسسته‌سازی زمانی را برای حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل سهموی و معادله‌ی انتگرال- دیفرانسیل تکامل یافته به‌کار بردند.

در این پایان‌نامه از روش گسسته‌سازی زمانی برای حل معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل سهموی غیر همگن، با جمله‌ی حافظه از نوع پیچش، استفاده می‌کنیم. با به‌کار بردن قاعده‌ی انتگرال‌گیری عددی، مسئله به مجموعه‌ای متناهی از معادلات بیضوی تبدیل می‌شود که به‌صورت موازی حل می‌شوند. همچنین در ادامه برای مسائلی با متغیرهای مکانی از روش عناصر متناهی برای به‌دست آوردن جواب نیمه گسسته استفاده می‌شود

[1] Thomee

و سپس برای به‌دست آوردن جواب کاملاً گسسته از روش گسسته‌سازی زمانی در جواب نیمه‌گسسته استفاده می‌کنیم.

بدین منظور در فصل اول، مقدمات، تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم. فصل دوم به معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل اختصاص می‌یابد. در انتهای این فصل قاعده‌ی انتگرال‌گیری به‌کار رفته در روش گسسته‌سازی زمانی بیان می‌شود. در فصل سوم روش گسسته‌سازی زمانی را برای مسئله‌ی انتگرال-دیفرانسیل سهموی غیرهمگن به‌کار می‌بریم. در فصل چهارم ترکیبی از روش گسسته‌سازی زمانی و گسسته‌سازی مکانی (فضایی) برای به‌دست آوردن جواب کاملاً گسسته مورد استفاده قرار می‌گیرد. فصل پنجم به برنامه‌نویسی در نرم افزار متلب اختصاص می‌یابد. در این فصل برنامه‌های مربوط به مثال‌های عددی از فصل‌های سوم و چهارم ارایه می‌شود.

فصل ۱
مفاهیم اولیه

در این فصل، خلاصه‌ای از مفاهیم و تعاریف اولیه که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت، بیان می‌شود. در بخش ۱-۱ فضای خطی و نرم‌دار و عملگر خطی را تعریف می‌کنیم. بخش ۱-۲ به معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزیی اختصاص می‌یابد. در بخش ۱-۳ مفاهیم و تعاریف مهم توابع مختلط و در بخش ۱-۴ تبدیل لاپلاس و مفاهیم مربوط به آن مطرح می‌شود.

۱-۱ فضای خطی

فضای برداری یا خطی، محیطی مناسب و استاندارد برای مطالعه و حل بخش بزرگی از مسائل، نظیر معادلات دیفرانسیل، انتگرال، نظریه تقریب، نظریه بهینه‌سازی و سایر موضوعات ریاضیات کاربردی می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنیم V مجموعه‌ای از بردارها باشد و K مجموعه‌ای از اعداد (به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ و یا مجموعه‌ی اعداد مختلط $\mathbb{C}$) باشد. دو عملگر جمع برداری و ضرب اسکالر را برای هر دو عضو $u, v \in V$ و هر اسکالر $\alpha \in K$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(u, v) \to u + v \in V$$

$$(\alpha, v) \to \alpha v \in V$$

به‌طوری‌که این عملگرها در قوانین زیر صدق می‌کنند.

۱. (قانون جابه‌جایی) برای هر $u, v \in V$ $\quad u + v = v + u$.

۲. (قانون شرکت‌پذیری) برای هر $u, v, w \in V$ $\quad (u + v) + w = u + (v + w)$.

۳. (داشتن عضو صفر) عضوی چون $۰ \in V$ وجود دارد که برای هر $v \in V$ داریم $۰ + v = v$.

۴. برای هر $v \in V$ عضوی چون $-v \in V$ موجود است به‌طوری‌که $v + (-v) = ۰$.

۵. برای هر $v \in V$، $۱v \in V$.

۶. برای هر $v \in V$ و هر $\alpha, \beta \in K$ داریم $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$.

۷. برای هر $u, v \in V$ و $\alpha, \beta \in K$ روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} \alpha(u+v) &= \alpha u + \alpha v \\ (\alpha+\beta)v &= \alpha v + \beta v. \end{aligned}$$

در این صورت V یک فضای برداری یا یک فضای خطی نامیده می‌شود.

فضای نرم‌دار خطی

تعریف ۱-۱-۲. به فضای خطی V که به نرم $\|\cdot\|$ مجهر است، یا به‌عبارتی دیگر به $(V, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار خطی می‌گوییم.

عملگر خطی

در بسیاری از مسائل در ریاضیات کاربردی، خاصیت خطی بودن به چشم می‌خورد. از این رو عملگرهای خطی چارچوبی مفید برای تحلیل و حل این مسائل می‌باشند.

تعریف ۱-۱-۳. مجموعه‌های V و W را درنظر بگیرید. عملگر T از V به W ضابطه‌ای است که به هر عضو از زیرمجموعه‌ای در V، یک عضو منحصر به‌فرد در W را تخصیص می‌دهد.

تعریف ۱-۱-۴. عملگر $T : V \to W$ را یک به یک گوییم، اگر برای هر $v_۱ \neq v_۲$ داشته باشیم

$$T(v_۱) \neq T(v_۲).$$

تعریف ۱-۱-۵. فرض کنیم V و W دو فضای خطی باشند. عملگر $L : V \to W$ را یک عملگر خطی می‌گوییم، اگر برای هر $v_۱, v_۲ \in V$ و هر $\alpha_۱, \alpha_۲ \in K$ داشته باشیم

$$L(\alpha_۱ v_۱ + \alpha_۲ v_۲) = \alpha_۱ L(v_۱) + \alpha_۲ L(v_۲).$$

نکته: یک عملگر خطی از فضای خطی V به V را با $L(V)$ نمایش می‌دهیم. همچنین عملگر $L : V \to W$، با $L(V, W)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنید V و W دو فضای نرم‌دار خطی باشند و $L : V \to W$ یک عملگر خطی باشد. $L(V, W)$ را کراندار گوییم، هرگاه ثابتی چون $\gamma \geq ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که، برای هر $v \in V$ داشته باشیم

$$\|Lv\|_W \leq \gamma \|v\|_V.$$

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنید V و W دو فضای کراندار خطی و $L(V^{k+۱}, W)$ فضای همه‌ی عملگرهای کراندار خطی از V به $L(V^k, W)$ باشد در این‌صورت به $L(V^k, W)$ عملگر k-خطی می‌گوییم.

تعریف ۱-۱-۸. فرض کنید V و W فضای باناخ و $D(A) \subset V$ باشد. عملگر خطی $A : D(A) \to W$ را بسته می‌گوییم اگر برای هر دنباله ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ که به $x \in V$ همگرا است، داشته باشیم $Ax_n \to y$ ؛ به شرط آنکه $x \in D(A)$ و $Ax = y$ باشد.

نکته: هر عملگر خطی کراندار در فضای باناخ X بسته است.

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنید V و W دو فضای نرم‌دار خطی باشند. عملگر $T : V \to W$ در $v \in D(T)$ پیوسته است، اگر برای دنباله‌ی $\{v_n\} \subset D(T)$ که $v_n \to v \in V$، داشته باشیم $T(v_n) \to T(v) \in W$.
عملگر T را پیوسته می‌نامیم اگر در $D(T)$ پیوسته باشد.

طیف و حلال یک عملگر خطی

عملگر خطی و کراندار $T : V \to V$ را درنظر بگیرید.
اگر $T \in L(v)$ باشد و یا به‌عبارت دیگر، اگر T عملگری خطی و کراندار در V باشد، مجموعه‌ی حلال T به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(T) = \{\lambda \mid (T - \lambda I) \text{ وارون‌پذیر است } \}.$$

از آنجایی که عملگرهای وارون‌پذیر، زیرمجموعه‌های باز $L(v)$ هستند، همواره مجموعه‌ی حلال یک عملگر کراندار مجموعه‌ای باز است. بنابراین $\sigma(T)$ همواره بسته است و آن را طیف T می‌نامیم.

۱-۲ مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

بسیاری ازمسائل و سیستم‌های فیزیکی، شیمیایی و بیولوژیکی توسط مدل‌های ریاضی توصیف می شوند. فیزیکدانان و مهندسان به‌منظور فهمیدن و درک مسائل موجود در دنیای واقعی، با ساده کردن شرایط و مفروضات مسئله برخی از آن ها را به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل تبدیل می‌کنند و سپس مسئله را به کمک روش‌ها و تکنیک‌های ریاضی حل می‌کنند. پاره‌ای از معادلات دیفرانسیل به‌صورت تحلیلی و به‌سادگی حل می‌شوند؛ اما جواب بخش عظیمی از معادلات را نمی‌توان به‌صورت دقیق به‌دست آورد. بدین منظور روش‌هایی برای محاسبه‌ی تقریبی با دقت بالا، در ریاضیات وجود دارد. در این بخش از بیان روش‌های حل معادلات دیفرانسیل صرف‌نظر می‌شود و فقط تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به اختصار بیان می‌شود.
یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی[۱]، معادله‌ی است که حاوی مشتق‌های جزیی یک تابع مجهول برحسب متغیرهای مستقل می‌باشد.

فرم کلی معادلات دیفرانسیل جزیی به‌صورت زیر است

$$F(x, y, z, \ldots, u, u_x, u_y, u_z, \ \ldots, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, \ldots) = 0$$

، که در آن x و y و z و ... متغیرهای مستقل و u تابعی مجهول به‌فرم $u = u(x, y, z, \ldots)$ است.

تعریف ۱-۲-۱. مرتبه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزیی، بزرگترین مرتبه‌ی مشتق در معادله است.

[۱] Partial Differential Equations

معادله دیفرانسیل جزیی خطی مرتبه‌ی دوم

فرم کلی یک معادله‌ی دیفرانسیل جزیی خطی از مرتبه‌ی دوم از این قرار است

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u=G(x,y).$$

(۱-۱)

معادلات دیفرانسیل جزیی پیچیده‌تر از معادلات دیفرانسیل معمولی‌اند و حل آن‌ها دشوارتر می‌باشد. در ادامه قصد داریم که به دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل جزیی خطی از مرتبه‌ی دوم بپردازیم. بدین منظور اول مبین[۲] معادله‌ی(۱-۱) را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۲-۲. مبین معادله دیفرانسیل جزیی (۱-۱) در نقطه‌ی (x_0,y_0) از فرمول

$$\Delta(x_0,y_0)=B^2(x_0,y_0)-4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0)$$

به‌دست می‌آید.

دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه‌ی دوم خطی

معادله ی (۱-۱) را یک معادله‌ی هذلولوی[۳] در (x_0,y_0) می‌گوییم، هرگاه $\Delta(x_0,y_0)>0$ و آن را سهموی[۴] گوییم، اگر $\Delta(x_0,y_0)=0$ و در صورتی‌که $\Delta(x_0,y_0)<0$ آن را معادله‌ی بیضوی[۵] می‌نامیم.

[۲] discriminant
[۳] hyperbolic equation
[۴] parabolic equation
[۵] elliptic equation

۱-۳ مقدمه‌ای بر آنالیز اعداد مختلط

تابع مختلط: فرض کنید E مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد. منظور از تابع مختلط w، قاعده‌ای است که به هر z متعلق به E یک عدد مختلط یکتا چون $w(z)$ را نسبت می‌دهد.

مفهوم پیوستگی تابع مختلط

تابع مختلط $f(z)$ در حوزه‌ی G را در نظر می‌گیریم. گوییم $f(z)$ در $z_. \in G$ پیوسته است اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، $\delta = \delta(\varepsilon) > ۰$ وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر z که در $|z - z_.| < \delta$ صدق می‌کند، داشته باشیم

$$|f(z) - f(z_.)| < \varepsilon$$

اگر $f(z)$ در هر نقطه‌ی $z_.$ از حوزه‌ی G پیوسته باشد، می‌گوییم که $f(z)$ در G پیوسته است.

مشتق تابع مختلط

تعریف ۱-۳-۱. می‌گوییم تابع مختلط $f(z)$ که در حوزه‌ی G تعریف شده است در یک نقطه از G مانند z مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود و متناهی باشد

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to ۰} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (z, z + \Delta z \in G)$$

و f' را مشتق $f(z)$ در z می‌نامیم.

تابع تحلیلی

تعریف ۱-۳-۲. تابع $f(z)$ را در حوزه‌ی G تحلیلی گوییم، هرگاه $f(z)$ در هر نقطه‌ی G مشتق‌پذیر باشد و در نقطه‌ی z تحلیلی گوییم اگر $f(z)$ در یک همسایگی z تحلیلی باشد. توجه کنید که هر تابع تحلیلی در

حوزه‌ی G ، در هر نقطه‌ی G تحلیلی است.

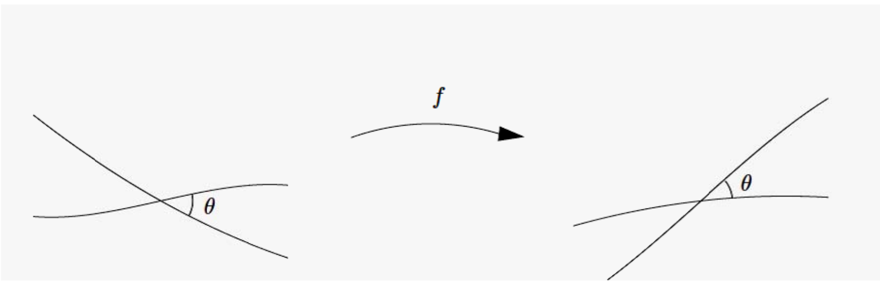
مثال ۱-۳-۳. تابع $f(z)=z^{2}$ در تمام صفحه‌ی z مشتق‌پذیر است. واضح است که حد $f(z)$، یعنی

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^{2}-z^{2}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z+(\Delta z)^{2}}{\Delta z}=2z+\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z$$

موجود و در هر نقطه‌ی (متناهی) z برابر $2z$ است. پس $f(z)=z^{2}$ تابعی تحلیلی است.

نگاشت همدیس

تابع تحلیلی $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تبدیلی مانند $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ را تعریف می‌کند که تناظری بین نقاط صفحه‌ی uv و صفحه‌ی xy به‌دست می‌دهد. اگر این تبدیل چنان باشد که زاویه‌ی بین دو خم متقاطع در صفحه‌ی xy با زاویه‌ی بین خم‌های متقاطع متناظر با آن، تحت تبدیل f در uv، هم در اندازه و هم در جهت برابر باشد، آن را یک تبدیل همدیس[۶] می‌نامیم . نگاشتی که اندازه زوایا را بدون توجه به جهت آن‌ها حفظ کند، حافظ زاویه می‌نامیم. شکل ۱-۱، یک نگاشت حافظ زاویه را نشان می دهد.



شکل ۱-۱: f یک نگاشت حافظ زاویه است.

نکته: تبدیل $w=f(z)$ که در آن $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f'(z_0)\neq 0$ ، را درنظر بگیرید. تحت این تبدیل مماس بر هر خم دلخواه C در صفحه‌ی z و گذرنده از نقطه‌ی z_0 به اندازه زاویه‌ی $\arg f'(z_0)$ دوران می‌کند.

[۶] Conformal mapping

قضیه ۱-۳-۴. *اگر در ناحیه‌ای مانند R، $f(x)$ تحلیلی باشد و $f'(z_0) \neq 0$، آنگاه نگاشت $w = f(x)$ در همه‌ی نقاط R همدیس است.*

انتگرال‌گیری در صفحه‌ی مختلط

خم C به معادله‌ی پارامتری $z = z(t)$ برای $a \leq t \leq b$ را در نظر بگیرید. خم C هموار گفته می‌شود اگر $z(t)$ در هر نقطه از فاصله‌ی $a \leq t \leq b$ دارای مشتق پیوسته و مخا لف صفر باشد. فرض کنید $f(z)$ تابعی از متغیر مختلط است که در یک حوزه‌ی G از صفحه‌ی z تعریف شده است و C خمی هموار واقع در G با نقطه‌ی آغازی z_0 و نقطه‌ی پایانی Z است. نقاط $z_0, z_1, \ldots, z_n = Z$ را متوالیاً در طول C و در جهت مثبت انتخاب می‌کنیم و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

که درآن $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ و ξ_k نقطه‌ی اختیاری از کمان $z_{k-1}z_k$ است. فرض می‌کنیم l_k طول این کمان باشد و می‌نویسیم

$$\lambda = \max\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$$

اگر $\lim\limits_{k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$، به هر ترتیبی که نقاط z_k و ξ_k انتخاب شوند موجود باشد می‌گوییم $f(z)$ در طول C انتگرال‌پذیرست و حد فوق را به‌صورت $\int_C f(z)d\,z$ نمایش می‌دهیم و آن را انتگرال $f(z)$ در طول C می‌نامیم.

قضیه ۱-۳-۵. *اگر $f(z)$ در حوزه‌ی G که شامل یک خم هموار C است پیوسته باشد، آنگاه $f(z)$ در طول C انتگرال‌پذیرست.*

برهان. برای اثبات به [۱۹] رجوع شود. □

در صفحه‌ی مختلط، انتگرال‌گیری روی یک خم و یا مسیر صورت می‌گیرد.

برای یک تابع مختلط و پیوسته $f(z)$ که روی مسیر C تعریف شده است، انتگرال $f(z)$ روی مسیر C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

که انتگرال سمت راست به‌دلیل تکه‌ای پیوسته بودن انتگرالده موجودست.

نکته: اگر $f(z)$ تابعی مختلط باشد که روی مسیر هموار C تعریف شده است آنگاه

$$\int_C f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

در صورتی که f روی C پیوسته باشد داریم

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt\right| &\leq \int_\alpha^\beta |f(z(t))|\,|z'(t)|dt \\ &= \int_C |f(z)|\,|dz|\end{aligned}$$

بدیهی است که اگر $|f(z)| \leq M$ روی مسیر C باشد آنگاه به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,|dz| \leq ML_C$$

که در آن $L_c = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^{۲} + (y'(t))^{۲}}dt$.

قضیه‌ی کشی[۷]:

فرض کنید $f(z)$ در دامنه‌ی پیوسته‌ی D تحلیلی باشد. آنگاه برای هر خم بسته‌ی C در D داریم

$$\int_C f(z)dz = ۰.$$

برهان. برای اثبات به [۱۹] رجوع شود. □

نکته: یک نتیجه‌ی مهم و ساده که از این قضیه می‌توان گرفت آنست که برای هر دو نقطه‌ی $z_۱, z_۲ \in D$ و

[۷] Cauchy Theorem

برای $f(z)$ تحلیلی

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

به مسیر انتگرال‌گیری از z_1 به z_2 وابسته نیست. اگر c_1 را مسیری دلخواه از z_1 به z_2 و c_2 را مسیر دلخواهی متفاوت از c_1، از z_2 به z_1 در نظر بگیریم به‌طوری‌که $c = c_1 + c_2$ یک خم در D باشد آنگاه بر اساس قضیه‌ی کشی می‌توان نوشت

$$\int_c f(z)dz = \int_{c_1+c_2} f(z)dz = 0$$

و یا به‌عبارتی دیگر،

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_{-c_2} f(z)dz = 0.$$

نتیجه‌ی فوق نشان می‌دهد که انتگرال $f(z)$ مستقل از مسیر انتگرال‌گیری است.

قضیه‌ی فرمول انتگرال کشی فرض کنید f تابعی تحلیلی درون و روی خم بسته‌ی C باشد. اگر z_0 هر نقطه‌ی داخلی C باشد آنگاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

وبه‌علاوه مشتق nام $f(z)$ در $z = z_0$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

برهان. برای اثبات به [۱۹] رجوع کنید. □