به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه بر نگذرد

۹۵۷۵۸

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

بستار کامل، رشد خطی از تجزیه‌های اولیه و بستار کیپ

استاد راهنما

دکترحسین ذاکری

دانشجو

سیروس جلالی

اسفند ۱۳۸۵

تشکر و قدردانی

پیش از همه از خداوند، سپس از پدر و مادرم سپاسگزارم که با یاری آنان به این بخش از زندگی رسیده‌ام. از دکتر حسین ذاکری تشکر می‌کنم که کمک‌ها و راهنمایی‌های ایشان همواره موجب پیشرفت من بوده است.

همچنین از دکتر طاهری زاده، دکتر دیبایی، دکتر جمالی و همه کسانی که در این مرحله از تحصیل مرا یاری کرده‌اند تشکر می‌نمایم.

چکیده

این پایان نامه درباره بستار کیپ در حلقه‌های نوتری جابجایی R با مشخصه اول p است، و محرک آن یک بحث اسمیت (K.E.Smith) و سوانسون (I.Swanson) است که نشان می‌دهد اگر دنباله توانهای فروبنیوس ایده‌ال سره a از R، دارای رشد خطی از تجزیه‌های اولیه باشد، آنگاه $a^*R_u = (aR_u)^*$. در این پایان نامه نشان داده شده است که اگر R عنصر آزمایشگر ضعیف داشته، و دنباله دیگری از ایده‌الهای R مانند $(a_n)_{n\in N_0}$ با خاصیت $a^{[p^n]} \subseteq a_n \subseteq (a^{[p^n]})^*$ دارای رشد خطی از تجزیه‌های اولیه باشد، و اگر $\bigcup_{n\in N_0} \operatorname{ass} a_n$ متناهی باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه بسته ضربی S از R، $(aS^{-1}R)^* = a^*S^{-1}R$.

کاتزمن (M.Katzman) در مساله موضعی سازی بستار کیپ به این پرسش رسید که آیا همیشه $\bigcup_{n\in N_0} \operatorname{ass}(a^{[p^n]})^*$ تعداد متناهی عضو ماکسیمال دارد. در این پایان نامه با بررسی ایده‌الها در بستار کامل R^∞ از R، تدبیرهائی ارائه شده است که نشان می‌دهند بستار کیپ (در یک ایده‌ال خاص a از R) با موضعی سازی در هر زیر مجموعه بسته ضربی R جابجا می‌شود و به علاوه، مجموعه $\bigcup_{n\in N_0} \operatorname{ass}(a^{[p^n]})^*$ متناهی است. در این پایان نامه چندین کاربرد از این تدبیرها ارائه شده است که به علت پاسخ به این پرسش کاتزمن، قابل توجه‌اند.

واژه‌های کلیدی : حلقه نوتری جابجائی، مشخصه‌اول، همریختی فروبنیوس، بستار کامل، بستار کیپ، بستار مثبت، عنصر آزمایشگر (ضعیف)، تجزیه اولیه، رشد خطی تجزیه‌های اولیه، ایده‌الهای اول وابسته، حلقه چندجمله‌ای مورب، حلقه چندجمله‌ای مورب لورنت، حلقه منظم، زیرحلقه محض، حلقه عالی.

مقدمه

فرض کنیم R یک حلقه نوتری جابجایی با مشخصه اول p، و a یک ایده‌ال سره از R باشد. برای هر $n \in N_0$ (N مجموعه اعداد طبیعی است و $N_0 := N \cup \{0\}$) توان فروبنیوس n—ام a عبارت است از ایده‌ال $a^{[p^n]} := (\alpha^{p^n} : \alpha \in a)$. از این رو، وقتی $a = (\alpha_1, \ldots \alpha_k)$، آنگاه $a^{[p^n]} = (\alpha_1^{p^n}, \ldots \alpha_k^{p^n})$. همچنین $R^\circ := R \setminus \cup_{p \in \mathrm{Min}(R)} p$ که در آن $\mathrm{Min}(R)$ مجموعه ایده‌الهای اول مینیمال R است.

عنصر $r \in R$ به بستار کیپ a^* از a تعلق دارد اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $c \in R^\circ$ بطوریکه برای هر $n \gg 0$، $cr^{p^n} \in a^{[p^n]}$. نظریه بستار کیپ نخستین بار توسط هاچستر (M.Hochster) و هونیکی (C.Huneke) مطرح شد. کاربردهای بسیاری برای این نظریه یافت شده است. یک مساله باز اساسی در این زمینه این است که آیا بستار کیپ با موضعی سازی جابجا می‌شود. این مساله در حالتهای خاصی از R و a برقرار است. به عنوان مثال ثابت شده است که اگر توانهای فروبنیوس ایده‌ال a از R دارای رشد خطی از تجزیه‌های اولیه باشند، آنگاه $a^* R_u = (aR_u)^*$.

در این پایان نامه، ما با مطالعه در بستار کامل R^∞ از R، مسائلی را درباره رشد خطی تجزیه‌های اولیه مورد بررسی قرار می‌دهیم. هنگامی که R کاهش یافته نیست، بستار کامل R را بستار کامل $R_{red} := R/\sqrt{0}$ درنظر می‌گیریم و کار گرینبرگ (M.J.Greenberg) را در این زمینه در بخش ۱ ملاحظه می‌کنیم.

مطالعه درباره ایده‌الهای R^∞ ما را به مفهوم f—دنباله از ایده‌الهای R سوق می‌دهد. دنباله $(a_n)_{n \in N_0}$ از ایده‌الهای R یک f—دنباله است اگر برای هر $n \in N_0$، $a_n = f^{-1}(a_{n+1})$، که در آن $f : R \longrightarrow R$ همریختی فروبنیوس است. دنباله $((a^{[p^n]})^*)_{n \in N_0}$ از بستار کیپ توانهای فروبنیوس ایده‌ال a از R، یک مثال از f—دنباله است. F—بستار ایده‌ال a از R را با a^F نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^F := \{r \in R : r^{p^n} \in a^{[p^n]} \text{ که } n \in N_0 \text{ وجود دارد}\}.$$

$((a^{[p^n]})^F)_{n\in N_\circ}$ مثال دیگری از یک f—دنباله است. وقتی R دامنه صحیح است، بستار صحیح R در بستار جبری میدان کسرهای R را با R^+، و تحدید توسیع ایده‌ال a از R را تحت همریختی $R \longrightarrow R^+$ با a^+ نشان می‌دهیم. در بخش ٦ می‌بینیم که $((a^{[p^n]})^+)_{n\in N_\circ}$ یک f—دنباله از ایده‌الهای R است.

در بخش ۴، بستار کامل R^∞ از R را با استفاده از ساختار جردن (D.A.Jordan) می‌سازیم. نشان می‌دهیم که یک نگاشت دوسوئی از مجموعه ایده‌الهای R^∞ به مجموعه f—دنباله‌ها از ایده‌الهای R وجود دارد.

دنباله ساخته شده از توانهای فروبنیوس یک ایده‌ال a از R همیشه یک f—دنباله نیست، از این رو، در بخش ۸، مفهوم رشد خطی از تجزیه‌های اولیه را به f—دنباله‌ها تعمیم می‌دهیم. یکی از نتایج اساسی در بخش ۸ قضیه ۱۲.۸ است که نشان می‌دهد اگر ایده‌ال سره $\hbar$ از R^∞ یک تجزیه اولیه داشته باشد، آنگاه f—دنباله $(a_n)_{n\in N_\circ}$ از ایده‌الهای R متناظر با $\hbar$ رشد خطی از تجزیه‌های اولیه دارد و مجموعه $\bigcup_{n\in N_\circ} \operatorname{ass} a_n$ متناهی است.

در چندین نتیجه اساسی این مقاله، اینکه R یک عنصر آزمایشگر $\mathrm{p}^{m_\circ}$—ضعیف دارد، یک شرط لازم است. $c \in R^\circ$ یک عنصر آزمایشگر $\mathrm{p}^{m_\circ}$—ضعیف است اگر برای هر ایده‌ال b از R و $r \in R$، $r \in b^*$ نتیجه دهد $cr^{p^n} \in b^{[p^n]}$ برای هر $n \geq m_\circ$. یک عنصر آزمایشگر p°—ضعیف را عنصر آزمایشگر گوییم. هاچستر و هونیکی در [۲، قضیه ۱.٦(b)] نشان دادند که هر جبر متناهی روی حلقه موضعی عالی از مشخصه اول p، یک عنصر آزمایشگر $\mathrm{p}^{m_\circ}$—ضعیف (برای یک $m_\circ \in N_\circ$) دارد.

با ترکیب قضیه‌های ۹.۸ و ۱۲.۸ نتیجه می‌شود که، اگر R یک عنصر آزمایشگر $\mathrm{p}^{m_\circ}$—ضعیف (برای یک $m_\circ \in N_\circ$) داشته باشد، و a یک ایده‌ال سره از R، و $(a_n)_{n\in N_\circ}$ یک f—دنباله از ایده‌الهای R باشد بطوریکه برای هر $n \in N_\circ$، $a^{[p^n]} \subseteq a_n \subseteq (a^{[p^n]})^*$، و اگر ایده‌ال متناظر با f—دنباله $(a_n)_{n\in N_\circ}$ از R^∞ دارای تجزیه اولیه باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه بسته ضربی S از R، $a^*S^{-1}R = (aS^{-1}R)^*$. به علاوه در ۱۸.۸ نشان می‌دهیم، ایده‌ال متناظر با f—دنباله $((a^{[p^n]})^*)_{n\in N_\circ}$ از R^∞ نیز دارای تجزیه اولیه است، بنابراین $((a^{[p^n]})^*)_{n\in N_\circ}$ دارای رشد خطی از تجزیه‌های اولیه است و $\bigcup_{n\in N_\circ} \operatorname{ass}(a^{[p^n]})^*$ متناهی است.

جالب است که کاتزمن (M.Katzman) در مساله موضعی سازی بستار کیپ به این پرسش رسید که آیا همیشه $\bigcup_{n\in N_\circ} \mathrm{ass}(a^{[p^n]})^*$ تعداد متناهی عضو ماکسیمال دارد؟

چندین کاربرد این تدبیرها را در بخش ۹ خواهیم دید. یک نتیجه اساسی در این بخش این است که اگر حلقه همبعد R روی یک زیر حلقه منظم عالی A صحیح، و ایده‌ال a از R، توسیع یک ایده‌ال سره b از A باشد، آنگاه با این شرط که R یک عنصر آزمایشگر $p^{m_\circ}$—ضعیف (برای یک $m_\circ \in N_\circ$) دارد، مجموعه $\bigcup_{n\in N_\circ} \mathrm{ass}(a^{[p^n]})^*$ متناهی است. همچنین خواهیم دید که اگر R یک حلقه موضعی همبعد کامل با بعد d باشد، و $x_1, \ldots, x_d$ یک دستگاه پارامتری برای R، و a یک ایده‌ال سره از R باشد بطوریکه با چند جمله‌ایها در $\Re[x_1, \ldots, x_d]$ ($\Re$ زیر میدان اول R است) تولید شود، آنگاه مجموعه $\bigcup_{n\in N_\circ} \mathrm{ass}(a^{[p^n]})^*$ متناهی است.

تمام حلقه‌ها در سراسر این پایان نامه، جابجایی و یکدار فرض شده‌اند. برای حلقه مفروض A، مجموعه ایده‌الهای اول آن را با $\mathrm{Spec}(A)$ نشان می‌دهیم. به ازای A—مدول M، تکیه‌گاه M را با علامت $\mathrm{Supp}(M)$ نشان می‌دهیم. بنا بر تعریف

$$\mathrm{Supp}(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(A) : \ M_p \neq \circ\}.$$

مجموعه $\{p \in \mathrm{Spec}(A) : \ p = (\circ : m)$ که موجود است $\circ \neq m \in M\}$ را با $\mathrm{Ass}(M)$ نشان می‌دهیم. توجه شود که $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$. به ازای ایده‌ال a از A، $\mathrm{Ass}(A/a)$ را معمولاً با $\mathrm{ass}(a)$ نشان می‌دهیم.

توجه. برهان مطالبی که با علامت ♣ مشخص شده‌اند، از نویسنده می‌باشد.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تدوین یافته است:

R. Y. Sharp and N. Nossem, Ideals in a perfect closure, linear growth of primary decompositions, and tight closure, Transactions Amer. Math. Soc., 356(2004), 3687-3720.

فهرست مندرجات

۱ پیش نیازها

حد مستقیم

۱.۱. تعریف. مجموعه جزئی مرتب I را مجموعه جهت دار گوییم اگر برای هر $i, j \in I$ وجود داشته باشد $k \in I$ بطوریکه $j \leq k$ و $i \leq k$.

۲.۱. تعریف. فرض کنیم I مجموعه جهت دار و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از حلقه‌ها باشد که با I اندیسگذاری شده است. برای هر $i, j \in I$ با شرط $i \leq j$، فرض کنیم $\mu_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت گوییم $(M_i, \mu_{ij})_{i,j\in I}$ یک دستگاه مستقیم روی I است اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱) برای هر $i \in I$، $\mu_{ii} = id$؛

۲) $\mu_{ik} = \mu_{jk}\mu_{ij}$ هرگاه $i \leq j \leq k$.

۳.۱. تعریف. فرض کنیم $(M_i, \mu_{ij})_{i,j\in I}$ یک دستگاه مستقیم از حلقه‌ها، روی مجموعه جهت دار I باشد. همچنین فرض کنیم M یک حلقه و $\{\phi_i : M_i \longrightarrow M\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ازهمریختی‌های حلقه‌ای باشد بطوریکه برای هر $i,j \in I$ با شرط $i \le j$، $\phi_i = \phi_j \mu_{ij}$. گوییم M و $\{\phi_i\}_{i\in I}$ حد مستقیم این دستگاه است (و می‌نویسیم $M = \varinjlim M_i$) اگر به ازای هر حلقه X و هر خانواده $\{f_i : M_i \longrightarrow X\}_{i\in I}$ ازهمریختی‌های حلقه‌ای در صورتی که دیاگرام

$$\begin{tikzcd} & X & \\ M_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[rr, "\mu_{ij}"] & & M_j \arrow[ul, "f_j"'] \end{tikzcd}$$

برای هر $i,j \in I$ با شرط $i \le j$ جابجایی شود، آنگاه همریختی منحصربفردی مانند $\psi : M \longrightarrow X$ موجود باشد که برای هر $i \in I$، $f_i = \psi\phi_i$.

۴.۱. قضیه. فرض کنیم $(M_i, \mu_{ij})_{i,j\in I}$ یک دستگاه مستقیم روی مجموعه جهت دار I باشد. در این صورت حد مستقیم این دستگاه وجود دارد.

اثبات. مراجعه شود به [٦، قضیه ۱۶.۲]. □

۵.۱. قضیه. فرض کنیم M و $\{\phi_i\}_{i\in I}$ حد مستقیم دستگاه مستقیم $(M_i, \mu_{ij})_{i,j\in I}$ باشد. اگر $x \in M$، آنگاه $i \in I$ و $x_i \in M_i$ وجود دارد بطوریکه $x = \phi_i(x_i)$.

اثبات. مراجعه شود به [٦، قضیه ۱۷.۲]. □

٦.۱. قضیه. فرض کنیم M و $\{\phi_i\}_{i\in I}$ حد مستقیم دستگاه مستقیم $(M_i, \mu_{ij})_{i,j\in I}$ باشد. اگر برای $i \in I$ و $x_i \in M_i$، $\phi_i(x_i) = 0$، آنگاه وجود دارد $j \in I$ با شرط $i \le j$ موجود

است که $\mu_{ij}(x_i) = 0$.

اثبات. مراجعه شود به [٦، قضیه ۱۷.۲]. □

۷.۱. قضیه. $\varinjlim(-)$ یک فانکتور دقیق است.

اثبات. مراجعه شود به [٦، قضیه ۱۸.۲]. □

توسیع صحیح

۸.۱. تعریف. فرض کنیم R یک زیر حلقه از حلقه S باشد. گوییم $s \in S$ روی R صحیح است اگر وجود داشته باشد $n \in N$ و $r_0, \dots, r_n \in R$ بطوریکه

$$s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_1 s + r_0 = 0.$$

به عبارت دیگر s ریشه یک چند جمله‌ای تکین در $R[X]$ باشد. گوییم S روی R صحیح است اگر هر عضو S روی R صحیح باشد.

اگر R یکِ زیر حلقه از حلقه S و J یک ایده‌ال از S باشد، آنگاه $R/J \cap R$ را بطور طبیعی می‌توان زیر حلقه‌ای از S/J در نظر گرفت.

۹.۱. لم. فرض کنیم R یک زیر حلقه از حلقه S و S روی R صحیح باشد. اگر J یک ایده‌ال S باشد، آنگاه S/J روی $R/J \cap R$ صحیح است.

اثبات. مراجعه شود به [۷، قضیه ۲٦.۱۳(i)]. □

۱۰.۱. قضیه. فرض کنیم R یک زیر حلقه از حلقه جابجائی ناصفر S و S روی R صحیح باشد. در این صورت $\dim R = \dim S$.

بنابراین، اگر J یک ایده‌ال سره از S باشد، آنگاه $\dim R/J \cap R = \dim S/J$.

اثبات. مراجعه شود به [۷، قضیه ۲۲.۱۴]. □

حلقه‌های منظم

۱۱.۱. تعریف. فرض کنیم (R, m) یک حلقه نوتری موضعی باشد بطوریکه $\dim(R) = d$. در این صورت، مجموعه‌ای از d عضو R که یک ایده‌ال m—اولیه تولید می‌کنند، یک دستگاه پارامتری برای R گوییم.

۱۲.۱. تعریف. فرض کنیم (R, m) یک حلقه نوتری موضعی باشد بطوریکه $\dim(R) = d$. در این صورت گوییم R یک حلقه موضعی منظم است، اگر ایده‌ال m با d عنصر تولید شود.

۱۳.۱. قضیه. فرض کنیم R یک حلقه موضعی منظم و p یک ایده‌ال اول R باشد. در این صورت، R_p نیز منظم است.

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۳.۱۹]. □

۱۴.۱. تعریف. فرض کنیم R یک حلقه نوتری جابجایی باشد. گوییم R منظم است، اگر برای هر $p \in \operatorname{Spec}(R)$، R_p یک حلقه موضعی منظم باشد.

۱۵.۱. قضیه. هر حلقه موضعی منظم، حوزه صحیح است.

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۳.۱۴]. □

۱۶.۱. قضیه. اگر R یک حلقه منظم باشد، آنگاه $R[X]$ نیز حلقه‌ای منظم است.

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۵.۱۹]. □

رشته‌های منظم و حلقه‌های کوهن—مکالی

۱۷.۱. تعریف. اگر R یک حلقه و M یک R—مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه

بعد M را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\dim M := \dim(A/\mathrm{ann}(M)).$$

۱۸.۱. تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و M یک R—مدول باشد. عنصر $x \in R$ را یک عضو M—منظم نامیم درصورتیکه $xm = 0$ نتیجه دهد $m = 0$ برای هر $m \in M$.

۱۹.۱. تعریف. دنباله $x_1, \ldots, x_n$ از اعضای R را یک Mـرشته منظم گوییم درصورتیکه شرایط زیر برقرار باشند.

۱) برای هر $i = 1, \ldots, n$، x_i یک عضو $(M/\sum_{i=1}^{n-1} x_i M)$—منظم باشد؛

۲) $M/\sum_{i=1}^{n} x_i M \neq 0$.

۲۰.۱. قضیه. اگر $x_1, \ldots, x_n$ یک Mـرشته منظم باشد، آنگاه برای اعداد صحیح مثبت $t_1, \ldots, t_n$، دنباله

$$x_1^{t_1}, \ldots, x_n^{t_n}$$

نیز یک Mـرشته منظم است.

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۱.۱٦]. □

۲۱.۱. قضیه. اگر $x_1, \ldots, x_n$ یک Rـرشته منظم باشد، آنگاه

$$\mathrm{ht}(x_1, \ldots, x_n) = n.$$

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۴.۱۷]. □

۲۲.۱. تعریف. فرض کنیم a ایده‌الی از حلقه نوتری R و M یک R—مدول با تولید متناهی باشد که $aM \neq M$. همچنین فرض $x_1, \ldots, x_n \in a$ یک Mـرشته منظم باشد. در این صورت $x_1, \ldots, x_n$ را یک Mـرشته منظم ماکسیمال در a گوییم اگر نتوان $x_{n+1} \in a$ یافت که

$$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$$

یک Mـرشته منظم شود.

اگر $y_1, \ldots, y_i$ یک Mـرشته منظم در a باشد، آنگاه می‌توان آن را به یک Mـرشته منظم ماکسیمال در a توسیع داد.

۲۳.۱. قضیه. فرض کنیم a ایده‌الی از حلقه نوتری R و M یک R—مدول با تولید متناهی باشد که $aM \neq M$. در این صورت طول تمام Mـرشته‌های منظم ماکسیمال در a با هم مساوی است.

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۷.۱٦]. □

این طول مشترک را با $\mathrm{grade}(a, M)$ نشان می‌دهیم و آنرا نمره M در a می‌نامیم. اگر $M = R$، آنگاه $\mathrm{grade}(a, M)$ را بصورت $\mathrm{grade}(a)$ می‌نویسیم.

۲۴.۱. تعریف. اگر R حلقه‌ای نوتری و موضعی، و M یک R—مدول ناصفر و با تولید متناهی باشد، آنگاه نمره M در m را با علامت $\mathrm{depth}(M)$ نشان می‌دهیم و آنرا عمق M می‌نامیم.

۲۵.۱. تعریف. فرض کنیم $M \neq 0$ یک مدول با تولید متناهی روی حلقه نوتری و موضعی R باشد. در این صورت گوییم M یک مدول کوهن—مکالی است اگر

$$\mathrm{depth}(M) = \dim(M).$$

۲٦.۱. تعریف. فرض کنیم $M \neq 0$ یک مدول با تولید متناهی روی حلقه نوتری R باشد. در این صورت گوییم M یک مدول کوهن—مکالی است اگر برای هر $p \in \mathrm{Supp}(M)$، M_p روی R_p کوهن—مکالی باشد. یاد آوری می‌شود که با توجه به [۵، قضیه ۳.۱۷(iii)]، این تعریف خوش تعریف است.

۲۷.۱. قضیه. فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. در این صورت R کوهن—مکالی است اگر و فقط اگر به ازای هرایده‌ال a از حلقه R که توسط n عنصر تولید

می‌شود و $\operatorname{ht} a = n$، داشته باشیم:

$$\operatorname{ht} p = n$$

برای هر $p \in \operatorname{ass} a$.

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۶.۱۷]. □

حلقه‌های یکدست، یکدست وفادار و محض

۲۸.۱. تعریف. فرض کنیم A یک حلقه، و M یک A—مدول باشد. در این صورت گوییم M روی A یکدست است، اگر برای هر دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N$ از A—مدولها و A—همریختی‌ها، دنباله $0 \longrightarrow N' \otimes M \longrightarrow N \otimes M$ دقیق باشد.

اگر A و B حلقه باشند، آنگاه همریختی حلقه‌ای $f : A \longrightarrow B$ را یکدست گوییم اگر B یک A—مدول یکدست باشد.

۲۹.۱. تعریف. فرض کنیم A یک حلقه، و M یک A—مدول باشد. در این صورت گوییم M روی A یکدست وفادار است، اگر برای هر A—همریختی $N' \longrightarrow N$ از A—مدولها، گزاره زیر درست باشد: $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N$ دقیق است اگر و فقط اگر $0 \longrightarrow N' \otimes M \longrightarrow N \otimes M$ دقیق باشد.

اگر A و B حلقه باشند، آنگاه همریختی حلقه‌ای $f : A \longrightarrow B$ را یکدست وفادار گوییم اگر B یک A—مدول یکدست وفادار باشد.

۳۰.۱. قضیه. فرض می‌کنیم همریختی حلقه‌ای $A \longrightarrow B$ یکدست باشد، و I_1 و I_2 ایده‌الهایی از A باشند. در این صورت

$$(I_1 \cap I_2)B = I_1B \cap I_2B.$$

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۴.۷(ii)]. □

۳۱.۱. قضیه. فرض کنیم همریختی حلقه‌ای $A \longrightarrow B$ یکدست وفادار باشد، در این

صورت برای هر ایده‌ال I از A، $IB \cap A = I$.

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۵.۷(ii)]. □

۳۲.۱. قضیه. فرض کنیم (A, m) و (B, n) حلقه‌های نوتری موضعی باشند، و $\phi : A \longrightarrow B$ همریختی حلقه‌ای باشد که $\phi(m) \subseteq n$. فرض کنیم M یک A—مدول با تولید متناهی، N یک B—مدول با تولید متناهی، و N روی A یکدست باشد، در این صورت

$$\operatorname{depth}_B(M \otimes_A N) = \operatorname{depth}_A M + \operatorname{depth}_B(N/mN).$$

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۳.۲۳]. □

۳۳.۱. تعریف. فرض کنیم A یک حلقه جابجایی و M یک A—مدول باشد. در این صورت زیر مدول N از M را محض گوییم اگر برای هر A—مدول E، دنباله $\circ \longrightarrow N \otimes E \longrightarrow M \otimes E$ دقیق باشد.

۳۴.۱. قضیه. فرض کنیم A یک حلقه جابجایی و M یک A—مدول باشد. در این صورت زیر مدول N از M محض است اگر وفقط اگر گزاره زیر برقرار باشد: اگر برای هر دستگاه معادلات $x_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} m_j$ که $i = 1, \ldots, t$، $m_j \in M$، $x_i \in N$ و $a_{ij} \in A$، وجود داشته باشد $y_1, \ldots, y_s \in N$ بطوریکه برای هر $i = 1, \ldots, t$، $x_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} y_j$.

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۱۳.۷]. □

۳۵.۱. نتیجه. فرض کنیم A یک زیر حلقه محض B باشد. در این صورت برای هر ایده‌ال a از A، $aB \cap A = a$.

I—ادیک توپولوژی و کمال

۳۶.۱. تعریف. فرض کنیم a یک ایده‌ال از حلقه R و M یک R—مدول باشد. در

این صورت

$$E := \{x + a^n M : \ n \in N_\circ \ , x \in M\}$$

M را می‌پوشاند، و اگر $z \in (x + a^n M) \cap (y + a^m M)$ برای $n, m \in N_\circ$ و $x, y \in M$، آنگاه $z + a^k M \subseteq (x + a^n M) \cap (y + a^m M)$ که در آن $k = \max\{n, m\}$. بنابراین E یک پایه برای یک توپولوژی روی M است. توپولوژی تولید شده توسط E را a—ادیک توپولوژی روی M می‌نامیم.

۳۷.۱. تعریف. فرض کنیم a یک ایده‌ال از حلقه R و M یک R—مدول باشد. دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر M را دنباله کوشی نامیم، اگر برای هر $k \in N$ وجود داشته باشد $n \in N$ بطوریکه برای هر $i, j \geq n$،

$$x_i - x_j \in a^k M.$$

همچنین، گوییم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به $x \in M$ است اگر برای هر $k \in N$ وجود داشته باشد $m \in N$ بطوریکه $x_n - x \in a^k M$ هر گاه $n \geq m$. در این مورد x را یک حد این دنباله نامیم. اگر $\cap_{t=1}^{\infty} a^t M = \circ$، آنگاه حد دنباله فوق، در صورت وجود، منحصر بفرد خواهد بود. در این حالت می‌نویسیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow x$. می‌گوییم دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست، اگر یک $x \in M$ موجود باشد بطوریکه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگر به x شود.

یک R—مدول M در a—ادیک توپولوژی، کامل گفته می‌شود، اگر هر دنباله کوشی در M همگرا باشد.

۳۸.۱. تعریف. فرض کنیم M یک R—مدول باشد. قرار می‌دهیم

$$C := \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \ \text{است } M \text{ یک دنباله کشی از عناصر } \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\}.$$

همچنین، فرض کنیم $C_\circ$ زیر مجموعه‌ای

$$C_\circ := \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in C : \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \circ\}$$

از C باشد. فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌های کوشی باشند و $r \in R$. در این صورت، با اعمال

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad r\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{rx_n\}_{n=1}^{\infty}$$

C یک R—مدول و C_0 یک زیر مدول C است. R—مدول C/C_0 را a—ادیک کمال M گوییم و با $\widehat{M}$ نشان می‌دهیم.

اگر $M = R$، آنگاه با ضرب $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$، C یک حلقه و C_0 یک ایده‌ال C خواهد شد. لذا $\widehat{R}$ یک حلقه است.

۳۹.۱. تعریف. فرض کنیم (A, m) یک حلقه موضعی با مشخصه اول $p(> 0)$ و K زیر میدان A باشد. در این صورت گوییم K میدان ضریب A است، اگر K تحت همریختی طبیعی $A \longrightarrow A/m$ بطور یکریخت به A/m نگاشته شود.

۴۰.۱. قضیه. فرض کنیم (A, m) یک حلقه موضعی، کامل (با m—ادیک توپولوژی) و نوتری با مشخصه اول $p(> 0)$ باشد. همچنین فرض کنیم $x_1, \ldots, x_d$ یک دستگاه پارامتری برای A باشد. در این صورت وجود دارد یک میدان ضریب K از A بطوریکه A یک $K[[x_1, \ldots, x_d]]$—مدول با تولید متناهی است.

اثبات. مراجعه شود به [۵، قضیه ۴.۲۹(iii)]. □

۴۱.۱. تعریف. فرض کنیم A یک حلقه با بعد متناهی باشد. در این صورت گوییم A همبعد است اگر برای هر ایده‌ال اول مینیمال p از A، $\dim A/p = \dim A$.

حلقه‌های عالی

۴۲.۱. تعریف. فرض کنیم A یک حلقه نوتری باشد.

۱) A را کاتنری گوییم در صورتیکه برای هر دو ایده‌ال اول p و q از A با شرط $q \subseteq p$،

طول تمام زنجیرهای کاهشی اکید ماکسیمال از ایده‌الهای اول A با شروع از p و پایان در q مساوی باشند.

۲) اگر هر A—جبر متناهی کاتنری باشد، گوییم A کاتنری جهانی است.

۴۳.۱. تعریف. فرض کنیم حلقه A شامل میدان K باشد. در این صورت A را منظم هندسی روی K گوییم، هر گاه به ازای هر توسیع متناهی L از K، حلقه $A \otimes_K L$ یک حلقه منظم باشد.

۴۴.۱. تعریف. حلقه نوتری A را عالی گوییم اگر

۱) A کاتنری جهانی باشد؛

۲) برای هر A—جبر متناهی S، مجموعه

$$Reg(S) = \{p \in Spec(S) : \text{یک حلقه منظم موضعی است } S_p\}$$

یک زیر مجموعه باز $\mathrm{Spec}(S)$ باشد؛

۳) به ازای هر دو ایده‌ال اول p و q از A با شرط $q \subseteq p$، حلقه $A_p \otimes_A (A_p/qA_p)$ روی A_p/pA_p منظم هندسی باشد.

۴۵.۱. قضیه. گزاره‌های زیر برقرارند.

۱) هر حلقه موضعی کامل و نوتری، عالی است.

۲) هر جبر متناهی روی یک حلقه عالی، عالی است.

۳) تصویر هر همریختی از یک حلقه عالی، عالی است.

۴) موضعی شده یک حلقه عالی، عالی است.

اثبات. مراجعه شود به [۸]. □

بستار کیپ در حلقه

در این قسمت R یک حلقه نوتری جابجایی با مشخصه اول $p(>0)$ است.

۴۶.۱. تعریف. مجموعه عناصر مینیمال از مجموعه $\mathrm{Ass}(R)$ را با علامت $\mathrm{Min}(R)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $R^\circ = R\setminus\bigcup_{p\in\mathrm{Min}(R)} p$.

۴۷.۱. تعریف. فرض می‌کنیم a یک ایده‌ال سره از R باشد. در این صورت ایده‌ال $a^{[p^n]} := (\alpha^{p^n} : \alpha \in a)$ را توان فروبنیوس n—ام a گوییم.
اگر $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ آنگاه $a^{[p^n]} = (\alpha_1^{p^n}, \ldots, \alpha_t^{p^n})$.

۴۸.۱. تعریف. فرض کنیم a یک ایده‌ال سره از R باشد و $x \in R$. در این صورت گوییم x به بستار کیپ a^* از a تعلق دارد اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $c \in R^\circ$ بطوریکه برای هر $n \gg 0$، $cx^{p^n} \in a^{[p^n]}$.

۴۹.۱. تعریف. ایده‌ال سره a از R را T—بسته گوییم اگر $a = a^*$.

۵۰.۱. قضیه. فرض کنیم a و b ایده‌الهایی سره از R باشند. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

۱) اگر $a \subseteq b$، آنگاه $a^* \subseteq b^*$.

۲) $(a \cap b)^* \subseteq a^* \cap b^*$.

اثبات. ۱) فرض کنیم $x \in a^*$، در این صورت وجود دارد $c \in R^\circ$ بطوریکه برای هر $n \gg 0$، $cx^{p^n} \in a^{[p^n]}$. از اینجا برای هر $n \gg 0$، $cx^{p^n} \in b^{[p^n]}$. در نتیجه $x \in b^*$.
۲) بنا بر قسمت (۱)، $(a\cap b)^* \subseteq a^*$ و $(a \cap b)^* \subseteq b^*$. در نتیجه $(a \cap b)^* \subseteq a^* \cap b^*$. □

۵۱.۱. قضیه. فرض کنیم a یک ایده‌ال سره از R باشد. در این صورت $x \in a^*$ اگر و