بسم الله الرحمن الرحيم

**دانشگاه آزاد اسلامی**

**واحد تهران مرکزی**

**پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی(M.Sc)**

**گرایش: آنالیزعددی**

## عنوان:

# حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی غیرخطی با استفاده از توابع هارگویاشده

## استاد راهنما:

**آقای دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی**

## استاد مشاور:

**آقای دکتر حجت ا.. ادیبی**

## پژوهشگر:

**مرتضی یوسفی**

**زمستان ۱۳۹۰**

**تقدیم به:**

# پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

## تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بی‌کران به درگاه خداوند که به انسان حکمت، تفکر، تعقل و … عطا کرد تا بتواند در پدیده‌های عالم هستی تأمل کند.

در جریان مطالعه و تحقیقاتی که منجر به پیدایش این پایان نامه گردید از دانش و راهنمایی‌های اساتید ارجمند و همکاری دوستان بزرگواری بهره جویی شده که فراهم آمدن این پایان نامه در حقیقت وامدار ایشان است. بدیهی است که مسئولیت هرگونه لغزشی بر عهده اینجانب می‌باشد.

لازم می‌دانم که صمیمانه ترین تشکرات خود را از استاد راهنمای گرانقدر و ارجمندم جناب آقای دکتر «فریبرزی » بنمایم که در تهیه و تدوین این پایان نامه راهنمایی‌های عالمانه و دلسوزانه ای ارائه نمودند و متحمل زحمات بی شائبه ای شدند و در تعلیم بنده از هیچ کاری مضایقه ننمودند.

همچنین از اساتید عزیز و گرامی، جناب آقای دکتر «ادیبی» مشاور و آقای دکتر «امیرفخریان» که داور این پایان نامه هستند و در طول مدت تحصیلی از ایشان آموزه های بسیاری فراگرفتم، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

و بر خود واجب می دانم که از کلیه اساتید محترم گروه ریاضی که مشوق اینجانب بوده‌اند و الگوهای علمی و عملی بنده می‌باشند، سپاس‌گذاری کرده و برای همه‌ی این بزرگواران آرزوی سعادت، توفیق و سلامتی دارم.

مرتضی یوسفی

زمستان ۱۳۹۰

بسمه تعالی

## تعهد اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب مرتضی یوسفی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی- آنالیز عددی با شماره دانشجویی ۸۸۰۶۵۱۱۱۴۰۰ اعلام می نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان **" حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی غیرخطی با استفاده از توابع هارگویاشده "** حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم، طبق ضوابط و رویه های جاری، آنرا ارجاع داده و در فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده ام. علاوه بر آن تاکید می نماید که این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح، پایین تر یا بالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود، بدینوسیله متعهد می شوم، در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام توسط دانشگاه، بدون کوچکترین اعتراض آنرا بپذیرم.

مرتضی یوسفی

بسمه تعالی

در تاریخ : ۱۳۹۰/۱۱/۱۶

دانشجوی کارشناسی ارشد، آقای **مرتضی یوسفی** از پایان نامه خوددفاع نموده

و با نمره **۱۸** به حروف **هجده** و با درجه **عالی**

مورد تصویب قرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

بسمه تعالی

**دانشکده علوم پایه- گروه ریاضی**

| | |
|---|---|
| **نام واحد دانشگاهی :** تهران مرکزی **کد واحد :** ۱۰۱ | **کد شناسایی پایان نامه :** ۱۰۱۳۰۱۱۳۸۹۲۰۰۳ |

**عنوان پایان نامه:** حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی غیرخطی با استفاده از توابع هارگویاشده

| | |
|---|---|
| **نام ونام وخانوادگی دانشجو:** مرتضی یوسفی<br>**شماره دانشجویی:** ۸۸۰۶۵۱۱۱۴۰۰<br>**رشته تحصیلی :** ریاضی کاربردی - آنالیزعددی | **سال و نیمسال اخذ پایان نامه :** ۱۳۹۰- اول<br>**تاریخ اتمام پایان نامه :** زمستان ۱۳۹۰ |

**نام و نام خانوادگی استاد راهنما :** محمدعلی فریبرزی

**نام و نام خانوادگی استاد مشاور:** حجت اله ادیبی

**آدرس و شماره تلفن:**

تهران- میدان امام حسین – خیابان صفای شرقی - پلاک ۳۵۸ ۰۲۱۳۳۳۲۱۶۷۶ - ۰۹۳۶۹۷۲۹۶۴۲

**چکیده پایان نامه :**

در این پایان‌نامه موضوع به‌کارگیری توابع هارگویاشده دوبعدی برای حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی غیرخطی نوع دوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا از روش هم محلی دوبعدی و گره‌های نیوتن کاتس استفاده می‌شود. در این روش یافتن جواب عددی منجر به حل یک دستگاه غیرخطی از معادلات جبری می‌گردد. به منظور بررسی کارآیی و دقت روش مطرح شده چند مثال عددی اجرا خواهند شد.

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش دانشگاه مناسب است / مناسب نیست تاریخ و امضاء

# فهرست مندرجات

# چکیده مطالب

در این پایان‌نامه موضوع به‌کارگیری توابع هارگویاشده دوبعدی برای حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی غیرخطی نوع دوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این راستا از روش هم محلی دوبعدی و گره‌های نیوتن کاتس استفاده می‌شود. در این روش یافتن جواب عددی منجر به حل یک دستگاه غیرخطی از معادلات جبری می‌گردد. به منظور بررسی کارآیی و دقت روش مطرح شده چند مثال عددی اجرا خواهند شد.

# مقدمه

تحلیل و آنالیز روش‌های محاسباتی برای معادلات انتگرال چندبعدی، در مقایسه با نوشته‌های فراوان در رابطه با تحلیل عددی معادلات انتگرال یک بعدی [10,2,6]، به‌تازگی آغاز شده و به‌خصوص در حالت غیرخطی توسعه زیادی نیافته است.

اما در هرصورت، در ۲۰ سال گذشته پیشرفت‌های مهمی در این زمینه ایجاد شده است که شروع آن با اثر معروف برونر[۱] و کاوزن[۲][7] بوده که در آن روش هم محلی و هم محلی تکراری را برای حل معادلات انتگرال ولترای خطی دوبعدی مطرح کردند. کاوزن همچنین در [21] این بحث را برای معادلات انتگرال ولترا فردهلم خطی بسط داد و برونر نیز در [8] شکل غیرخطی معادلات انتگرال ولترا را بیان کرد.

در کتاب‌های هان[۳] و دستیارانش، آثار فراوانی در این زمینه یافت می‌شود. آنها بسط‌های خطای مجانبی روشهای قدیمی را هنگامی‌که برای معادلات انتگرال دوبعدی به‌کار می‌روند، به‌دست آوردند و از آن‌ها به‌عنوان پایه‌ای برای معرفی الگوریتم‌های برونیابی استفاده کردند.[14]
آن‌ها از این رویکرد برای تحلیل جواب معادله انتگرال ولترا فردهلم خطی با استفاده از روش نیستروم ذوزنقه‌ای استفاده کردند. در [15,16] ، روش هم محلی تکراری برای به‌دست آوردن جواب معادله انتگرال ولترای غیرخطی به‌کار برده شده است. در [17,18] ، معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی مطرح شده‌اند که به ترتیب بر اساس روش نیستروم و روش تکراری گالرکین حل شده‌اند. همچنین در [19] ، روش تکراری گالرکین برای حل معادله انتگرال ولترای خطی به‌کار برده شده است.

در فصل ۵ (مثال ۵-۷) ، نتایج عددی خود را با نتایج به‌دست آمده در [24] مقایسه می‌کنیم ، که در آن مالک نژاد، از یک پایه از توابع ضربه‌ای قطعه‌ای برای حل معادله انتگرال ولترای غیرخطی

---

[۱] Brunner
[۲] Kauthen
[۳] Guogiang Han

دوبعدی  استفاده نموده است. در [33] ، تاری[۴] و شاهمراد[۵] روشی بر اساس پایه‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد برای حل عددی معادلات انتگرال ولترای خطی دوبعدی را توسعه داده‌اند.

روش‌های محاسباتی بر اساس کاربرد مجموعه‌های مختلف از توابع پایه‌ای، به ابزار بسیار متداول برای حل انواع مختلف معادلات تابعی از جمله انتگرال‌های یک بعدی، بدل شدند.

مجموعه متعامد موجک هار ، یک گروه از موج‌های با بزرگی $2^{\frac{j}{2}}$ و $-2^{\frac{j}{2}}$ به ازای $j = 0,1, \ldots$ است. [13]

لینچ[۶] و ریس[۷] در [22]، تبدیل هار را با حذف اعداد اصم ، گویا کردند. نتایج این اصلاح ، تبدیل هار گویا شده نامیده شد. تبدیل هارگویاشده تمامی ویژگی‌های اصلی تابع هار را دارا می‌باشد. توابع متناظر، توابع هارگویاشده نامیده می‌شوند.

یکی از خصوصیات توابع هار که آن‌ها را از نقطه نظر محاسباتی جذاب می‌کند، این‌است که محاسبه انتگرال‌های چنین توابعی بسیار آسان است. بنابراین هنگام حل عددی معادلات انتگرال یا دیفرانسیل، استفاده از پایه‌ای از توابع هار در مقایسه با سایر توابع پایه‌ای متعامد مرسوم مزایای زیادی را به همراه دارد. از طرف دیگر، سرعت همگرایی این روش‌ها، با پایه‌های دیگر توابع متعامد رقابت می‌کند.

این روشن می‌کند که چرا بسیاری از نویسندگان، روش‌های موجک را هنگام حل انواع مختلف معادلات تابعی، ترجیح می‌دهند. برای مثال اوکیتا[۸] و کابایاشی[۹] در [25,26]، موجک هار را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی به‌کار بردند. در [27]، آنها توابع هارگویاشده را برای تقریب زدن جواب معادلات دیفرانسیل جزئی ، استفاده کرده و به مزیت استفاده از چنین توابع پایه‌ای برای نمایش توابع دومتغیره اشاره کرده‌اند.

---

[۴] Tari
[۵] Shahmorad
[۶] Lynch
[۷] Reis
[۸] Ohkita
[۹] Kobayashi

در [29]، حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی یک بعدی، با استفاده از پایه‌ای از توابع هار توسط رزاقی و اردوخانی مطرح شده است. نتایج عددی نشان داده شده در این مقاله، همگرایی سریع این روش را، هنگام به کاربردن در معادلات انتگرال بیان می‌کند.

در این پایان‌نامه، در فصل اول به معرفی انواع معادلات انتگرال و خصوصیات آنها پرداخته و نمونه‌هایی از روش‌های حل معادلات انتگرال را بیان کرده‌ایم.

در فصل دوم به تفصیل به بحث در رابطه با موجک‌ها و کاربردهای آن پرداخته و نمونه‌هایی از موجک‌ها نیز ذکر شده است.

در فصل سوم، توابع متعامد قطعه‌ای ثابت و دو نمونه از آن یعنی توابع ضربه‌ای قطعه‌ای و توابع هار گویاشده معرفی و تشریح شده اند.

در فصل چهارم، حل عددی معادلات انتگرال غیرخطی دوبعدی را با استفاده از توابع هار گویا شده، مطرح کرده‌ایم . ضمنا مطالب این فصل بر اساس [4] بیان می‌شوند.

در فصل پنجم مثال‌های عددی متنوعی ارائه شده که نتایج، دقت و کارآیی روش را نمایان می‌کند. ضمنا برنامه کامپیوتری تعدادی از مثال‌ها نیز ارائه می‌شود.

# فصل اول: معادلات انتگرال

## ۱-۱ تاریخچه

اولین کسی که نام معادله انتگرال را به معادلاتی که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود نسبت داد بویس ریموند[۱۰] در سال ۱۸۸۸ بود. در واقع در سال ۱۸۷۲ لاپلاس[۱۱] اولین بار نظریه معادلات انتگرال را مطرح کرد. او معادله انتگرال $y(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt$ را مورد بررسی قرار داد. در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، فوریه[۱۲] در سال ۱۸۱۱ روی نظریه حرارت کار کرد و تئوری انتگرال فوریه در این سال ها شکل گرفت. به خاطر همین معمولا گفته می شود که مبدا معادلات انتگرال به تئوری انتگرال فوریه بر می گردد. در سال ۱۸۲۰ آبل[۱۳] در مساله خود که به مساله مکانیکی آبل معروف است کاربرد معادلات انتگرال را در چنین مسائلی مطرح کرد . در سال ۱۸۳۲ لیوویل[۱۴] بطور مستقل دسته خاصی از معادلات انتگرال را حل کرد و یک قدم مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط وی برداشته شد و آن چگونگی حل بعضی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود.

در سال ۱۸۹۶ برای اولین بار ولترا[۱۵] از ایتالیا نظریه عمومی معادلات انتگرال را به شکل زیر معرفی کرد:

$$u(x) = y(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۱)$$

---

[۱] Bois reymond
[۲] Laplace
[۱۲] Fourier
[۱۳] Abel
[۱۴] Lioville
[۱۵] Volterra

فردهلم[۱۶] سوئدی در سال های ۱۹۰۳-۱۹۰۰ با یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال کار ولترا را پوشش داد:

$$u(x) = y(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۲-۱)$$

ارائه یک سخنرانی توسط هولمگرن[۱۷] در سال ۱۹۰۱ روی کارهای فردهلم علاقه هیلبرت را به تحقیق در مورد معادلات انتگرال برانگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال بهره گرفت. یکی از کارهای مهم وی فرموله کردن مسائل مقدار مرزی به صورت یک معادله انتگرال است.

ارتباط معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال و یا مثال های دیگری در ریاضی فیزیک، یک تکنیک مهم را جهت حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی در تئوری معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی به وجود می‌آوردکه یکی از دستاوردهای مهم مطالعه معادلات انتگرال است.

قضایای فردهلم از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند. این قضایا ابتدا توسط فردهلم برای هسته های پیوسته ارائه شدند لیکن بعدها توسط افراد دیگری نظیر کارلمان[۱۸]و ریس[۱۹]برای هسته های کلی تر تعمیم یافت.

از اوایل نیمه دوم اخیر تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال به وسیله ویل[۲۰]در ارتباط با این‌که به ازای چه مقادیری از $\lambda$ معادله انتگرال جواب دارد صورت گرفت، لیکن از آنجا که در حالت کلی قادر به حل بسیاری از معادلات انتگرال که در عمل با آنها مواجه می‌شویم نیستیم، لذا از همین سال‌ها نیاز به روشهای تقریبی و عددی جهت حل معادلات انتگرال آشکار شد.

معادلات انتگرال به طور کلی در علومی مانند فیزیک- مکانیک، ارتباطات، پتروشیمی، ساختمان و پل سازی، اشعه لیزر، نیروگاه‌های هسته‌ای، راکتورها و غیره کاربردهای فراوانی دارد و این مسائل توسط معادلات انتگرال فرموله می‌شوند.

---

[۱۶] Fredholm
[۱۷] Holmgren
[۱۸] Carleman
[۱۹] Riesz
[۲۰] Weyl

## ۱-۲تعاریف و دسته بندی معادلات انتگرال[10,37,38]

**۱-۲-۱) تعریف معادله انتگرال** یک معادله انتگرال معادله‌ای است که درآن تابع مجهول زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر شود.

یک نمونه از معادله انتگرال که در آن $u(x)$ مجهول است و باید معلوم شود به صورت زیر است:

$$\mathrm{a(x)u(x)} = \mathrm{f(x)} + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۳)$$

که در آن $k(x,t)$ هسته معادله انتگرال و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال گیری هستند. بایدتوجه کرد که هسته معادله $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند.

با توجه به توسعه‌ی معادلات انتگرال و کاربردهای وسیع آن یک تقسیم‌بندی جامع بر آنها ضروری به‌نظر می‌رسد. به‌خصوص این‌که از یک طرف در مسائل مختلف فیزیک و مهندسی انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می‌شوند و از طرف دیگر راه‌هایی که جهت حل انواع مختلف این نوع معادلات ارائه شده است متفاوتند.

**۱-۲-۲) دسته بندی معادلات انتگرال**

معادلات انتگرال را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم:

**۱-۲-۲-۱) معادلات انتگرال فردهلم** معادلاتی هستند که در آن‌ها دامنه انتگرال گیری ثابت است و حد پایین و بالای انتگرال گیری اعداد ثابتی مثل $a$ و $b$ هستند. شکل کلی این معادلات به صورت زیر است:

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۴)$$

که در آن $a \le x\,, t \le b$

برحسب این‌که $\varphi(x)$ کدام‌یک از مقادیر زیر را انتخاب می‌کند معادلات انتگرال فردهلم به سه نوع تقسیم می‌شوند:

۱) زمانی‌که $\varphi(x) = 0$ معادله (۱-۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \ = 0 \quad (۱-۵)$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

۲) زمانی‌که $\varphi(x) = 1$ معادله (۱-۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad (۱-۶)$$

به این معادله انتگرال فردهلم نوع دوم گویند.

در حقیقت معادله (۱-۶) را می‌توان از معادله (۱-۴) با تقسیم طرفین بر $\varphi(x)$ به شرط آنکه $\varphi(x) \neq 0$ به دست آورد.

۳) زمانی‌که $\varphi(x) = 1$ و $f(x) = 0$ باشد معادله انتگرال فردهلم نوع دوم همگن به‌دست می‌آید که آن را معادله انتگرال فردهلم نوع سوم گوییم که به شکل زیر است:

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad (۱-۷)$$

**۱-۲-۲-۲) معادلات انتگرال ولترا** معادلات انتگرالی که در آنها حد بالای انتگرال گیری متغیر است را معادلات انتگرال ولترا گوییم که به حالت کلی زیر می‌باشد:

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad (۱-۸)$$

برحسب اینکه $\varphi(x)$ کدام‌یک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال ولترا نیز به سه نوع تقسیم می‌شوند:

۱) زمانی‌که $\varphi(x) = 0$ معادله (۱-۸) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \ = 0 \quad (۱-۹)$$

به این معادله انتگرال ولترای نوع اول گویند.

۲) زمانی‌که $\varphi(x) = 1$ معادله (۱-۸) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad (۱-۱۰)$$

که آن را معادله انتگرال ولترای نوع دوم گویند.

۳) زمانی‌که $\varphi(x) = 1$ و $f(x) = 0$ باشد، معادله انتگرال ولترای نوع دوم همگن را داریم که آن را معادله انتگرال ولترای نوع سوم گویند که به شکل زیر است:

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۱۱)$$

**نکته:** در واقع در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم نوع اول تابع مجهول $u(x)$ به غیر از زیر علامت انتگرال در جای دیگری ظاهر نمی‌شود اما در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم نوع دوم تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم در خارج از علامت انتگرال ظاهر می‌شود.

**نکته:** می‌توان معادله انتگرال ولترا را در حالت کلی به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به این صورت که در معادله (۱-۸) قرار دهیم:

$$\hat{k}(x,t) := \begin{cases} k(x,t) & a \le t \le x \\ 0 & x \le t \le b \end{cases} \qquad (۱-۱۲)$$

که در این‌صورت معادله (۱-۸) به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \hat{k}(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۱۳)$$

که یک معادله انتگرال فردهلم میباشد.

**نکته:**حل معادلات انتگرال نوع اول در مقایسه با نوع دوم مشکل تر است.

**۱-۲-۲-۳) معادلات انتگرال دیفرانسیل** در این گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف ظاهر می‌شود. در یک طرف $u(x)$ و حداقل یکی از مشتق‌هایش نظیر $u'(x)$ یا $u''(x)$ و یا ... زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به‌عنوان یک مشتق معمولی نمایان می‌شود. مثل:

$$u'(x) = -\sin x - 1 - \int_0^x u(t)dt, \;\; u(0) = 1 \qquad (۱-۱۴)$$

$$u''(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu'(t)dt\,, \; u(0) = 0\,, \; u'(0) = 1 \qquad (۱-۱۵)$$