بسم الله الرحمن الرحيم

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه شیخ بهایی

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

بررسی جواب های یک دسته از معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی در زمان های بزرگ با استفاده از روش های تفاضلات متناهی

نگارنده

کامیار نجومی ریک

استاد راهنما

دکتر مهدی تاتاری

استاد مشاور

دکتر رضا مختاری

بهمن ماه ۱۳۹۱

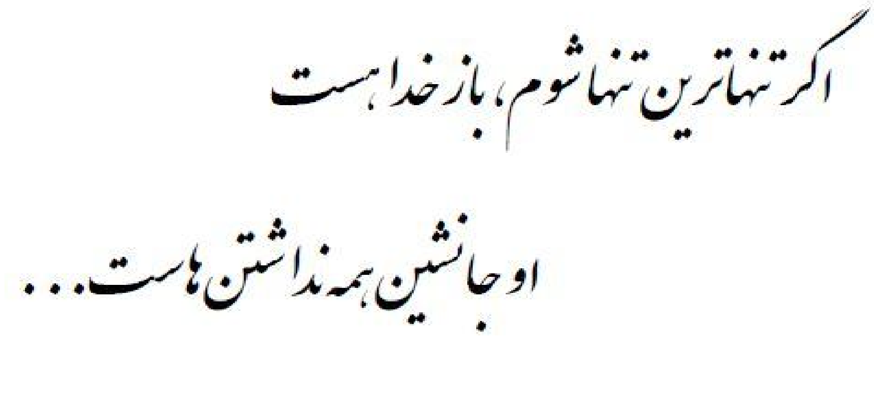
خدایا[1]...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می داری.

تو می دانی و همه می دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگانی من است، از شادی توست که من در دل می خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته ام می درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه هایم احساس می کنم. نمی توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله های ضعیف و افتاده، پنهان کرده ام دریاب، دریاب.

تو می دانی و همه می دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، قناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، روزی کن.



[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی

تقدیم به...

پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند .

سپاس گزاری...

سپاس و شکری لاینتاهی پروردگار یکتایی را که به انسان قدرت عنایت فرموده و چراغ دل انسان را به نور علم و معرفت روشن نمود.

بدون ابراز سپاس از تمام کسانی را که مرا یاری نمودند، نمی توان بر این سطور نقطه ای پایان گذاشت.

برای من موجب کمال افتخار و مباهات است که توفیق بهره مندی از محضر استاد عزیز و عالی قدرم جناب آقای دکتر مهدی تاتاری، که احاطه علمی ایشان در این زمینه و سوابق پژوهشی درخشانشان بر کسی پوشیده نیست، را داشته ام. خدا را شاکرم، چرا که در این مدت که شاگرد ایشان بودم، مطالبی خیلی فراتر از ریاضیات از محضرشان آموختم. از ایشان بی نهایت سپاسگزارم.

همچنین بر خود وظیفه می دانم از محضر استاد مشاورم، جناب آقای دکتر رضا مختاری که راهنمایی هایشان را از من دریغ ننمودند کمال تشکر و قدر دانی را داشته باشم.

از نظرات ارزشمند اساتید محترم، جناب آقای دکتر علی دانایی و جناب آقای دکتر علی داوری، که قبول زحمت داوری پایان نامه را بر عهده داشتند و همچنین از جناب آقای دکتر علی بابایی بعنوان نماینده ی تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع حضور داشتند سپاسگزاری نمایم.

از پدر مهربان و مادر عزیزتر از جانم که با دستان سرشار از عاطفه اش تمام زندگی اش را به پایم ریختند تا بر روی پاهایم بایستم، سپاس بی کران دارم.

در خاتمه، از تمامی همگنان عزیز به ویژه جناب آقای عبداله رحمانی و جناب مهندس فرزاد میثمی کمال تشکر و توفیقات روز افزون را برایشان آرزومندم.

عناوین مطالب

عنوان **صفحه**

فصل دوم: بررسی رفتار جواب ها در زمان های بزرگ

فصل سوم: فضای گسسته سازی و طرح تفاضلات متناهی

فصل چهارم: معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی

منابع و واژگان

چکیده

عنوان : بررسی جواب های یک دسته از معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی در زمان های بزرگ با استفاده از روش تفاضلات متناهی

در این پایان نامه، به بررسی جواب معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی تحت تاثیر میدان مغناطیسی که با تقریب تفاضلات متناهی در زمان های بزرگ به دست آمده اند، می پردازیم.

همچنین جواب در زمان های بزرگ $(t \to \infty)$ از مسائل مقداراولیه – مرزی با شرایط مرزی دیریکله همگن، را مطالعه می کنیم.

کلید واژه‌ها:

معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی، بررسی رفتارمجانبی، نیمه گسسته سازی و تقریب تفاضلات متناهی

Abstract

Title: Large time behavior of solutions and finite difference scheme to a nonlinear integro-differential equation

In this thesis, the analysis of the solution of a nonlinear integro-differential equation in large time behavior and finite difference approximation of the nonlinear integro-differential equation associated with the penetration of a magnetic field into a substance is studied.

Also analyzing the large-time behavior of solutions and initial-boundary value problems with homogeneous Dirichlet boundary conditions are considered.

Keywords:

Nonlinear integro-differential equation, Asymptotic behavior, Semidiscrete and finite difference schemes

مقدمه

حل عددی معادلات انتگرال یکی از مهم ترین شاخه های آنالیز عددی است که اهمیت آن از لحاظ مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات پاره ای است. کاربردهای مهم معادلات انتگرال، در مسائل فیزیک، ریاضی، مکانیک سیالات و مسائلی که در رابطه با مخابرات لیزر—زلزله نگاری و صنایع پتروشیمی، ماهواره های مخابراتی و راکتورهای اتمی، می باشد. در روند حل دسته ای از معادلات با مشتقات پاره ای و معادلات دیفرانسیل معمولی به معادلاتی برخورد می کنیم که در آن ها تابع مجهول زیر علامت انتگرال و بیرون آن ظاهر می شود.

در این پایان نامه، به بررسی جواب های یک دسته از معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی در زمان های بزرگ با استفاده از روش های تفاضلات متناهی پرداخته شده است .

در فصل اول، تاریخچه ای از معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل انتگرال ارائه می شود وهمچنین به ارائه ی تعاریف و مقدمات اولیه ی مورد نیاز در کل پایان نامه و در معادلات دیفرانسیل انتگرال می پردازیم. در فصل دوم، به بررسی جواب های معادلات دیفرانسیل انتگرالی در زمان های بزرگ پرداخته شده است .

فصل سوم، روش هایی بر پایه ی نیمه گسسته سازی می باشد که برای حل معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی استفاده می شود. فصل چهارم، به حل معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی، با استفاده از تقریب تفاضلات متناهی و ارائه ی مثالی عددی، اختصاص دارد .

فصل اول

تاریخچه
تعاریف و
مقدمات اولیه

تاریخچه

در سال های اخیر، تحقیقات بسیاری روی پیشرفت گسترده و موثر روش های حل معادلات انتگرال متمرکز شده است . نظریه معادلات انتگرال یکی ازمهم ترین شاخه های ریاضیات کاربردی است، درابتدا حل معادله انتگرال به عنوان معکوس گرفتن از انتگرال ها تلقی می شد. در روند حل دسته ای از معادلات با مشتقات پاره ای و معادلات دیفرانسیل معمولی به معادلاتی برخورد می کنیم که در آن ها تابع مجهول زیرعلامت انتگرال ظاهر می شود، بویس ریموند[۱] اولین کسی بود که درسال ۱۸۸۸، نام معادله ی انتگرال را به روی این گونه معادلات نهاد، اما تاریخ اولیه ی معادلات انتگرال ،عملاً به زمان لاپلاس[۲] در سال۱۷۸۲ برمی گردد . اوتبدیل انتگرالی $f\left(x\right)=\int_0^\infty \exp\left(-xt\right)g\left(t\right)dt$ را برای حل معادلات تفاضلی خطی و معادلات دیفرانسیل مطرح نمود و نظریه ی معادلات انتگرال را پایه ریزی کرد، این معادله اکنون به عنوان تبدیل لاپلاس مطرح است. همچنین به دنبال آن فوریه[۳] درسال ۱۸۱۱ نوع دیگری از این معادلات را ارائه و برای حل مسائل حرارت تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه را مطرح کرد. آبل[٤] در حل مسائل مکانیکی معادله ی انتگرالی آبل را مطرح کرد، افراد دیگری درسیرتکاملی معادلات انتگرال موثر بود ند که عبارتند از :
پواسون[۵] در نظریه ی مغناطیس، درسال ۱۸۳۲، لیوویل[٦] در حل برخی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرالی و درسال ۱۹۷۰ نویمان[۷] مسأله دیریکله را تبدیل به یک معادله انتگرال نمود، درسال۱۸۹٦،پوانکاره[۸] معادله انتگرال $f(x)=g(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)g(y)dy$ را در رابطه با معادله دیفرانسیل پاره ای $\nabla^2 g+\lambda g=f\left(x,y\right)$ به دست آورد . ولترا[۹] در سال ۱۸۹٦ برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرال را به شکل زیر معرفی کرد:

$$f(x)=y(x)+\int_a^x k(x,t)f(t)dt\ ,$$

---

۱) *Bois-Reymond*
۲) *Laplace*
۳) *Fourier*
٤) *Abel*
۵) *Poisson*
٦) *Lioville*
۷) *Neuman*
۸) *Poincare*
۹) *Volterra*

در حدود سال های ۱۹۰۳– ۱۹۰۰ ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم[1] یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال خطی به شکل $f(x)=g(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy$ انجام داد که شامل دسته بندی خاصی از معادلات ولترا نیز بودند. هیلبرت[2] نیز فعالیت هایی در مورد معادلات ا نتگرال انجام داد و از جمله مسائل دیفرانسیل را به صورت معادله انتگرال تنظیم نمود .

معادلات انتگرال منفرد در ارتباط با دو مسأله کاملاً مختلف توسط دو شخص معرفی شد، یکی از آن ها هیلبرت بود که روی بعضی مسائل مرزی توابع تحلیلی با آن ها برخورد کرد و دیگری پوانکاره بود که در تئوری جزرومد با آن ها مواجه شد. نظریه معادلات منفرد در دهه سوم و چهارم توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام ژیرا [2] و دو ریاضیدان روس به نام های وکوا [3] و موسخلیش ویلی[4] توسعه پیدا کرد. در حدود سال ۱۸۹۷ برونر[5] و ون درهاون[6] ودر سال ۱۹۹۵ هک بوش[7] و نهایتاً اتکینسون[8] کتاب هایی را در مورد معادلات انتگرال منتشر کرد ند. به عنوان مثال روش خطی سازی [۳]، روش انتگرال ضرب[۱۷]، روش هم مکانی هرمیتی، روش هوموتوپی[٦]، نمونه هایی از این تحقیقات هستند .گردزیانی[9] و جانگولادز[10] ، در مورد مدل هایی از نوع $\dfrac{\partial U}{\partial t}=a\left[\left(\int_0^t\int_0^1\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dxd\tau\right)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right],$ و $\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau\right)\dfrac{\partial U}{\partial x}\right],$ به وجود یک جواب کلی از مسائل مقدار اولیه– مرزی در فضای یک بعدی پرداخته اند . برای اطلاعات بیشتردر زمینه وجود و یکتایی جواب این گونه معادلات به[۱۱] مراجعه شود. نتا [11]، در مورد تقریب عنصرهای متناهی از معادله دیفرانسیل انتگرال غیرخطی در [۱۲]به بحث پرداخته است.

---

۱) *Fredholm*

۲) *Hilbert*

۳) *J.Veka*

٤) *N.Muskhelish vili*

٥) *Bruner*

٦) *Vander Hauwen*

۷) *Hack Busch*

۸) *Atkinson*

۹) *D.G.Gordeziani*

۱۰) *T.A.Jangveladze*

۱۱) *B.Neta*

۱.۱ تعریف معادله انتگرال

تعریف ۱ـ ۱: هرگاه در یک معادله تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار داشته باشد به آن معادله، معادله انتگرال می گویند که نمونه ای از صورت کلی یک معادله انتگرال به صورت زیر است :

$$u(x)\varphi(x) = g(x) + \lambda\int_a^{b(x)} k(x,t)u(t)\,dt, \qquad (۱-۱)$$

به طوری که $u(t)$ تابع مجهول و g، k و $\varphi(x)$ توابع معلوم هستند و $k(x,t)$ را هسته[1] معادله انتگرال می نامند و $\lambda \neq 0$ عددی مختلط یا حقیقی است، مقدار ثابت a حد پایین انتگرال و مقدار ثابت یا متغیر b حد بالای ا نتگرال نامیده می شود. هدف از حل یک معادله انتگرال تعیین تابع مجهول $u(t)$ است که در رابطه ی (۱ـ ۱) صدق کند. به طور کلی همیشه امکان تعیین جواب تحلیلی برای معادلات انتگرال وجود ندارد و در این حالت به دنبال روش هایی هستیم که بتوان تقریبی برای جواب به دست آورد [۵]. در مثال زیر درباره نحوه ی تبدیل یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال بحث خواهیم کرد.

مثال ۱ـ ۱ : مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم

$$u'(x) = 2xu(x), \qquad x \geq 0 \qquad (۱-۲)$$

که در شرط اولیه زیر صدق می کند

$$u(0) = 1. \qquad (۱-۳)$$

معادله $(۱-۲)$ را می توان به سادگی با به کار بردن ایده جدا کردن متغیرها حل کرد. جواب معادله دیفرانسیل رابطه ی $(۱-۲)$ با توجه به شرط $(۱-۳)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x) = \exp\left(x^2\right). \qquad (۱-٤)$$

اما اگر از طرفین رابطه ی $(۱-۲)$ نسبت به x در بازه $[0,x]$ انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int_0^x u'(t)\,dt = \int_0^x 2tu(t)\,dt, \qquad (۱-٥)$$

و در نتیجه با انتگرال گرفتن از طرفین رابطه ی $(۱-۵)$ و استفاده از شرایط اولیه $(۱-۳)$ داریم

$$u(x)=1+\int_0^x 2tu(t)dt. \qquad (۱-٦)$$

از مقایسه طرفین رابطه ی $(۱-٦)-(۱-۲)$، در می یابیم که رابطه ی $(۱-٦)$ یک معادله انتگرال با هسته $K(x,t)=2t$ و تابع $\varphi(x)=1$ است [۸] و [۷].

۲.۱ هسته های انتگرالی متداول

در این قسمت به معرفی برخی از هسته های انتگرالی که معمولاً در معادلات مختلف ظاهر می شود، می پردازیم.

۱.۲.۱ هسته متقارن(۱) : هسته ای است که از جابجایی متغیرها هسته جدیدی پیدا نمی شود. به عبارت دیگر داریم

$$K(x,t)=K(t,x).$$

۲.۲.۱ هسته جدایی پذیر یا تبهگن(۲) : اگر برای هسته $K(x,t)$، داشته باشیم

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t).$$

در این صورت هسته را جدا پذیر یا تبهگن می نامند.

۳.۲.۱ هسته L^2 : هسته $K(x,t)$ را هسته L^2 یا مربع انتگرال پذیر(۳) می گوییم و می نویسیم $k(x,t)\in L^2(a,b)$، در صورتی که

$$۱)\ \int_a^b\int_a^b \left|K(x,t)\right|^2 dtdx<\infty,$$

$$۲)\ \forall x \quad \int_a^b \left|K(x,t)\right|^2 dt<\infty,$$

---

۱) *Symmetric* ۲) *Degenerate* ۳) *Square integrable*

$$۳)\ \forall t \quad \int_a^b \left|K(x,t)\right|^2 dx < \infty.$$

۳.۱ تقسیم بندی معادلات انتگرال

معادلات انتگرال خطی و غیرخطی را بر حسب ساختار می توان به سه گروه زیر دسته بندی کرد :

۱) معادلات انتگرال فردهلم
۲) معادلات انتگرال ولترا
۳) معادلات انتگرال منفرد(۱)

۱.۳.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آن ها حد پایین و حد بالای انتگرال گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می باشند [۵].

$$\varphi(x)u(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt, \qquad a \le x,t \le b. \qquad (۱-۷)$$

که در آن هسته معادله انتگرال $K(x,t)$ و تابع $g(x)$ توابع معلوم هستند و λ هم یک پارامتر معلوم است. بر حسب اینکه $\varphi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده تقسیم می شوند :

۱- زمانی که $\varphi(x) \equiv 0$، معادله $(۱-۷)$ به معادله زیر تبدیل می شود.

$$g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt = 0.$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می نامند.

---

۱) *Singular*

۲- اگر $\varphi(x)\equiv 1$، معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می نامند.

۲.۳.۱ معادلات انتگرال خطی ولترا

در معادلات انتگرال ولترا، حداقل یکی از حدود انتگرال به صورت تابعی از متغیرمستقل است و معمولاً حد بالای انتگرال به عنوان متغیر انتخاب می شود که به صورت زیر است

$$\varphi(x)u(x)=g(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)\,dt, \tag{۱-۸}$$

که در آن تابع مجهول یعنی $u(t)$ در زیر علامت انتگرال به صورت خطی می باشد. باید توجه کرد که رابطه ی $(۱-۸)$ را می توان به عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت، به طوری که هسته $k(x,t)$، برای $t>x$ و $x\in[a,b]$ صفر فرض شود. معادلات انتگرال ولترا را می توان با توجه به مقدار $\varphi(x)$ به دو گروه دسته بندی کرد.

۱- در حالتی که $\varphi(x)\equiv 0$، معادله $(۱-۸)$ به صورت زیر تبدیل خواهد

$$g(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)\,dt=0,$$

این معادله را معادله انتگرال ولترای از نوع اول می گویند.

۲- زمانی که $\varphi(x)\equiv 1$، آنگاه معادله $(۱-۸)$ به شکل زیر در خواهد آمد

$$u(x)=g(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)\,dt,$$

این معادله را معادله انتگرال ولترای نوع دوم می نامند[۹].

۳.۳.۱ معادلات انتگرال منفرد

معادله انتگرال از نوع اول

$$g(x)=\lambda\int_{\beta(x)}^{\alpha(x)}K(x,t)u(t)\,dt,$$

یا از نوع دوم

$$u(x)=g(x)+\lambda\int_{\beta(x)}^{\alpha(x)}K(x,t)u(t)\,dt,$$

را که در آن ها حد پایین، حد بالا یا هر دو حد انتگرال گیری نامتناهی باشند، را معادلات انتگرال منفرد می نامند. در زیر چند مثال از معادلات انتگرال منفرد آورده شده است که علت منفرد بودن آن ها نامتناهی بودن حوزه انتگرال گیری مربوطه است

۱) $u(x)=2x+6\int_{0}^{\infty}\sin(x-t)u(t)\,dt,$

۲) $u(x)=x+\frac{1}{3}\int_{0}^{\infty}\cos(x+t)u(t)\,dt,$

۳) $u(x)=1+x^2+6\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x+t)u(t)\,dt,$

همچنین در زیر چند مثال از معادلات منفرد ارائه شده است. در این مثال ها هسته $K(x,t)$ وقتی که $t\to x$ نامتناهی می شود، لذا معادلات انتگرال نیز منفرد هستند.

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}exp(-i\lambda x)\,u(x)\,dx, \qquad (۱-۹)$$

$$L[u(x)]=\int_{0}^{+\infty}exp(-\lambda x)\,u(x)\,dx, \qquad (۱-۱۰)$$

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{\sqrt{x-t}}\,u(t)\,dt, \qquad (۱-۱۱)$$

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{(x-t)^{\alpha}}\,u(t)\,dt, \qquad 0<\alpha<1. \qquad (۱-۱۲)$$

معادلات انتگرال (۱-۹)–(۱-۱۰) به ترتیب توابع تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس هستند. معادلات مشابه (۱-۱۱) و (۱-۱۲) به ترتیب به معادله انتگرال آبل و آبل تعمیم یافته شهرت یافته اند.

۴.۱ معادلات انتگرال خطی و غیرخطی

هرگاه تابع مجهول زیرانتگرال به صورت خطی یعنی $K(x,t)y(t)$ ظاهر شود آنگاه آن معادله را معادله انتگرال خطی گویند و اگر تابع زیر انتگرال به صورت غیرخطی یعنی $K(x,t,y(t))$ ظاهر شود آن را معادله انتگرال غیرخطی گویند. در زیر مثال هایی از معادلات انتگرال غیرخطی آورده شده است

۱) $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) u^2(t)\,dt,$

۲) $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) \exp(u(t))\,dt,$

۳) $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) \sin(u(t))\,dt.$

۵.۱ معادلات دیفرانسیل- انتگرال

معادلات دیفرانسیل- انتگرال ابتدا در اوائل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا معرفی شدند. ولترا در حال مطالعه پدیده رشد جمعیت و به خصوص تاثیر وراثت بود که در تحقیق خود با این گونه معادلات برخورد کرد و نام مذکور را برای آن ها انتخاب کرد. معادلات دیفرانسیل- انتگرال درعلوم مختلفی نظیر انتقال گرما، پدیده انتشار، پخش نوترون و... کاربردهای فراوانی دارد.

تعریف ۱ـ ۲ : هرگاه تابع مجهول $u(x)$ و حداقل یکی از مشتق هایش نظیر $u'(x)$ یا $u''(x)$ و... در خارج و همچنین زیر علامت انتگرال قرار گیرد آن گاه آن را معادله دیفرانسیل- انتگرال گویند . بالاترین مرتبه مشتق در این معادلات را مرتبه معادله دیفرانسیل- انتگرال می نامند .