دانشگاه شاهد
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی و علوم کامپیوتر
پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

مدول های بئر و شبه بئر

نگارش
محدثه انزانی

استاد راهنما
دکتر سید حمید حاج سید جوادی

استاد مشاور
دکتر سید احمد موسوی

تیر ۱۳۸۹

تقدیم به

آنانی که هر لحظه و هر جا دلشان برای ثمره زندگیشان می تپد،

که

وجودشان تکیه گاه زندگی،

کلامشان امید پایندگی

و خدمتشان افتخار همیشگی است.

پدر و مادر عزیزم که مظهر عشق و استقامت در زندگی ام بوده اند.

تقدیر و تشکر

بارالها تو را شکر که به من توانایی بخشیدی تا قدمی هر چند ناچیز در راه کسب علم بردارم، و به من آموختی تا در زندگی صبر را سرلوحه خویش قرار دهم.

اینجانب بر خود لازم می دانم از زحمات بی شائبه استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر سید حمید حاج سید جوادی که اگر وجود ارزشمند ایشان نبود این کار به نتیجه مطلوب نمی رسید، تشکر و قدردانی را به جای آورم.

کمال تشکر را از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر سید احمد موسوی برای راهنمایی های ایشان در مراحل کار این پایان نامه ابراز می نمایم.

از جناب آقای دکتر نصر آزادانی و دکتر رحمتی که قبول داوری این پایان نامه را پذیرفته اند صادقانه قدردانی می نمایم.

از سایر اساتید گروه و کارکنان دانشکده تشکر می نمایم.

در پایان از پدر و مادر فداکار و مهربانم که در طول این مدت همواره دعای خیرشان امیدی برای ادامه کارم بوده و مشوقان اصلی من در طی این مسیر بوده اند و برای ادامه این راه نیز هستند نهایت تقدیر و تشکر را ابراز می نمایم. هم چنین از خواهر و برادر عزیزم که باعث دلگرمی اینجانب بوده اند قدردانی می نمایم.

از خداوند منان توفیق روز افزون را برای همه این عزیزان خواستارم.

چکیده

در این پایان نامه حلقه های بئر و شبه بئر و حلقه های مرتبط به آن ها (حلقه های شبه بئر اصلی راست و حلقه های تصویری اصلی راست) را مورد مطالعه قرار می دهیم. سپس به بررسی مدول های بئر و شبه بئر، توسیع چند جمله ای مدول های بئر و شبه بئر و ارتباط آن ها با مدول های توسیعی، کاملا پایای توسیعی، k-نامنفرد و کاملا پایای k-نامنفرد می پردازیم. هم چنین با مطالعه حلقه های بئر و شبه بئر اساسی راست، مفهوم مدول های بئر و شبه بئر اساسی راست را تعریف می کنیم و با ذکر قضایا و مثال هایی خواص این رده مهم از مدول ها را بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی: خودتوان، پوچ ساز، حلقه بئر، حلقه شبه بئر، مدول بئر، مدول شبه بئر، زیرمدول کاملا پایا، زیرمدول اساسی.

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه حلقه های بئر ریشه در آنالیز تابعی دارد. ریاضیدانانی همچون کاپلانسکی[۱]، کلارک[۲]، ریکارت[۳] و بربریان[۴] به مطالعه و بررسی چنین حلقه هایی و تعریف حلقه های وابسته به آن پرداختند. ریکارت به مطالعه C^*- جبرها با این ویژگی که پوچ ساز راست هر عضو به وسیله تصویر (p تصویر است هرگاه $p = p^2 = p^*$ که در آن $*$ عملگر روی جبر است) تولید شود پرداخت [۲].

کاپلانسکی AW^*-جبری را به عنوان C^*-جبر با ویژگی قوی تری که پوچ ساز راست هر زیر مجموعه غیر تهی از آن توسط تصویر تولید شود تعریف کرد [۱۱]. هم چنین حلقه های بئر با ویژگی هایی از جبر فون نیومن و حلقه های $*$-منظم کامل توسط کاپلانسکی معرفی شدند [۱۲]. حلقه های بئر شامل جبر فون نیومن، C^*-جبر جابه جایی از توابع مختلط روی فضای استون و حلقه های منظم که شبکه ایده آل های راست اصلی آن کامل باشد، می باشد.

بربریان به ادامه کار بر روی مفهوم حلقه های بئر پرداخت [۱۶]. حلقه های شبه بئر توسط کلارک تعریف شد و با استفاده از آن ها نشان داده شد جبر با بعد متناهی و با همانی روی میدان بسته جبری با جبر نیم گروه یکه ماتریسی پیچیده ایزومورفیک است [۲۲].

برکین مایر[۵] به تعریف مفهوم حلقه های شبه بئر اصلی پرداخت. حلقه های شبه بئر اصلی شامل حلقه های منظم، حلقه های شبه بئر، حلقه های آبلی و حلقه های تصویری اصلی می باشد [۱۰].

مفاهیم مطرح شده برای حلقه ها قابل تعمیم برای مدول ها نیز می باشد.

ریزوی[۶] و رومن[۷] به تعریف مفهوم مدول های بئر و شبه بئر و بیان ویژگی های آن پرداختند. در [۴]و [۶] مدول های پایای کامل توسیعی و مدول های نامنفرد مورد بررسی قرار گرفتند و با استفاده ازمفاهیم مشابه در حلقه ها، رابطه بین آن ها و مدول های بئر و شبه بئر بیان شده اند [۱۸].

هدف اصلی این پایان نامه مطالعه مدول های بئر و شبه بئر می باشد که بنا به ضرورت، به مطالعه حلقه های بئر و شبه بئر می پردازیم. این پایان نامه شامل ۴ فصل همراه با بخش هایی به شرح زیر

[۱] Kaplansky
[۲] Clark
[۳] Ricart
[۴] Berberian
[۵] Birkenmeier
[۶] Rizvi
[۷] Roman

می باشد:

فصل اول که شامل ۲ بخش، مفاهیم و قضایای مقدماتی مربوط به حلقه ها و مدول ها می باشد که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرند. سعی بر آن شده است که تعاریف و قضایای اولیه برگرفته از مقالات و کتب مورداستفاده در این پایان نامه در این فصل گنجانده شود.

فصل دوم شامل ۳ بخش اصلی می باشد. در بخش اول، حلقه های بئر و شبه بئر معرفی می شوند و قضایای مربوط به آن ها نیز بیان می شود. در بخش دوم، به معرفی حلقه های شبه بئر اصلی و حلقه های تصویری اصلی و بیان قضایا و مثال های مربوطه پرداخته می شود. در بخش سوم حلقه های چندجمله ای از حلقه های معرفی شده در بخش های قبل، مورد بررسی قرار می گیرند.

فصل سوم شامل ۳ بخش اصلی می باشد. در بخش اول به معرفی مدول های بئر و بیان قضایای مربوط به آن ها پرداخته می شود. در بخش دوم مدول های شبه بئر تعریف می شوند. در این بخش نشان داده می شود که حلقه درونریختی مدول های بئر (شبه بئر) حلقه بئر(شبه بئر) می باشد. در بخش سوم نشان داده می شود که توسیع چند جمله ای مدول های بئر و شبه بئر نیز این ویژگی را به ارث می برند.

درفصل چهارم بامطالعه حلقه های بئر و شبه بئر اساسی راست، تعمیمی از آن را برای مدول ها تحت عنوان مدول های بئر و شبه بئر اساسی راست ارائه می کنیم و سپس قضایای مربوط به آن ها را اثبات می کنیم.

اکثر مطالب این پایان نامه از مقالات زیر برگرفته شده اند:

(1) S. T. Rizvi; C. S. Roman, Baer and quasi-Baer modules, Communications in Algebra, **32**(1), 103-123(2004).

(2) G. F. Birkenmeier; J. Y. Kim; J. K. Park, Polynomial extensions of Baer and quasi-Baer rings, Journal of Pure and Applied Algebra, **159**, 25-42(2001).

(3) G. F. Birkenmeier; J. Y. Kim; J. K. Park, Principally quasi-Baer rings, Communications in Algebra, **29**(2), 639-660(2001).

لازم به ذکر است در راستای مطالعات خویش در دوره پژوهشی کارشناسی ارشد دستاوردهای زیر حاصل شده است که برای مجلات مختلف ارسال گردیده و هم اکنون در دست داوری است.

1. H. HaJ Seyyed javadi; M. K. Dadsetani; M. Anzani, S-unitally quasi-Baer rings, Algebra Colloquium Journal, submitted on 20/4/2010.

2. M. Anzani; H. HaJ Seyyed javadi, A note on generalized quasi-Baer rings, Mathematical Japonicae Journal. Submitted on 6/3/2010.

3. M. Anzani; H. HaJ Seyyed javadi, A note on zip modules, Bull. Korean Math. Soc. Submitted on 30/12/ 2009.

4. M. Anzani; H. HaJ Seyyed javadi, Right essentially Baer and quasi-Baer rings, Ukraninian Mathematical Journal. Submitted on 8/3/2010.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به ذکر تعاریف، لم ها و قضایای مورد نیاز در این پایان نامه می پردازیم. در سراسر این پایان نامه منظور از R، حلقه شرکت پذیر یکدار که لزوما جابه جایی نیست، می باشد.

۱.۱ تعاریف اولیه حلقه ها

تعریف ۱.۱.۱. عضو a از حلقه R را مرکزی گوییم هرگاه به ازای هر $r \in R$، $ar = ra$. مجموعه تمام عناصر مرکزی حلقه R را با $Z(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم R حلقه باشد در این صورت؛

۱. عضو e در حلقه R را خودتوان گوییم هرگاه $e^2 = e$.

۲. خودتوان e از حلقه R را نیم مرکزی چپ (راست) گوییم هرگاه به ازای هر $x \in R$، $xe = exe$ $(ex = exe)$. مجموعه تمام خودتوان های نیم مرکزی چپ (راست) را با $S_l(R)$ $(S_r(R))$نمایش می دهیم.

۳. مجموعه تمام خودتوان های مرکزی حلقه R را با $B(R)$ نمایش می دهیم.

گزاره ۳.۱.۱. در هر حلقه R، $S_l(R) \cap S_r(R) = B(R)$.

- در فصل آتی با اضافه کردن شرطی بر حلقه نشان می دهیم $S_l(R) = S_r(R) = B(R)$.

تعریف ۴.۱.۱. خودتوان $e \in R$ را تقلیل یافته نیم مرکزی گوییم هرگاه $S_l(eRe) = \{0, e\}$. اگر ۱ تقلیل یافته نیم مرکزی باشد گوییم حلقه R تقلیل یافته نیم مرکزی است.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم R حلقه باشد. پوچ ساز راست زیرمجموعه ای مانند S از R عبارت است از $r_R(S) = \{y \in R \mid Sy = 0\}$. به طور مشابه پوچ ساز چپ S عبارت است از $l_R(S) = \{y \in R \mid yS = 0\}$. هم چنین برای عضو $a \in R$، منظور از $r_R(a)$ و $l_R(a)$ به ترتیب $r_R(\{a\})$ و $l_R(\{a\})$ می باشد.

- $r_R(S)$ ایده آل راست حلقه R و $l_R(S)$ ایده آل چپ حلقه R است.
- هرگاه S ایده آل راست (چپ) باشد آن گاه $r_R(S)$ $(l_R(S))$ ایده آل دوطرفه حلقه R است.

گزاره ۶.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و S، T و S_i زیرمجموعه هایی از R باشند در این صورت:

۱. اگر $S \subseteq T$ آن گاه $l_R(T) \subseteq l_R(S)$؛

۲. $S \subseteq l_R(r_R(S))$ و $S \subseteq r_R(l_R(S))$؛

۳. اگر $T = l_R(S)$ آن گاه $T = l_R(r_R(T))$؛

۴. $l_R(\cup S_i) = \cap l_R(S_i)$.

اثبات. (۱) واضح است.
(۲) فرض کنیم $s \in S$ و $x \in r_R(S)$. در نتیجه $sx = 0$ که نشان می دهد $s \in l_R(r_R(S))$. لذا اثبات کامل می شود.
(۳) طبق رابطه (۲)، $T \subseteq l_R(r_R(T))$. کافی است نشان دهیم $l_R(r_R(T)) \subseteq T$. از آن جا که $S \subseteq r_R(l_R(S))$ در نتیجه $l_R(r_R(l_R(S))) \subseteq l_R(S) = T$. لذا اثبات کامل می شود.
(۴) فرض کنیم $x \in l_R(\cup_i S_i)$. آن گاه برای هر i، $xS_i = 0$ در نتیجه برای هر i، $x \in l_R(S_i)$ لذا $l_R(\cup_i S_i) \subseteq \cap_i l_R(S_i)$. عکس رابطه به وضوح برقرار است، بنابراین $l_R(\cup_i S_i) = \cap_i l_R(S_i)$.
□

قضیه ۷.۱.۱. اگر به ازای $i = 1, ..., n$، e_i ها خودتوان های نیم مرکزی چپ باشند در این صورت $\bigcap_{i=1}^n e_i R = eR$ که $e = \prod_{i=1}^n e_i$.

اثبات. کافی است درستی رابطه را برای $n = 2$ نشان دهیم.
فرض کنیم $e_1, e_2 \in S_L(R)$ و $x \in e_1 R \cap e_2 R$. در این صورت برای $r_1, r_2 \in R$، $x = e_1 r_1$ و $x = e_2 r_2$. بنابراین $e_1 x = e_1^2 r_1 = e_1 r_1 = x$ و $x = e_1 x = e_1 e_2 r_2$ در نتیجه $x \in e_1 e_2 R$. لذا $e_1 R \cap e_2 R \subseteq e_1 e_2 R$. حال اگر $x \in e_1 e_2 R$، در این صورت برای $r \in R$، $x = e_1 e_2 r$ در نتیجه $x \in e_1 R$. از طرفی از آن جا که e_2 نیم مرکزی چپ است، $x = e_1 e_2 r = e_2 e_1 e_2 r \in e_2 R$ در نتیجه $x \in e_2 R$. بنابراین $x \in e_1 R \cap e_2 R$ که نشان می دهد $e_1 R \cap e_2 R \subseteq e_1 e_2 R$. □

تعریف ۸.۱.۱. حلقه R را آبلی گوییم هرگاه هر خودتوان آن مرکزی باشد.

گزاره ۹.۱.۱. برای حلقه R شرایط زیر معادلند:

۱. پوچ ساز راست هر عضو از حلقه R، ایده آل است؛

۲. برای عناصر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$ آن گاه $aRb = 0$.

اثبات. (۲)$\Leftarrow$(۱) فرض کنیم $ab = 0$ در این صورت $b \in r_R(a)$. از آن جا که $r_R(a)$ ایده آل است در نتیجه $Rb \subseteq r_R(a)$ بنابراین $aRb = 0$.

(۱)$\Leftarrow$(۲) فرض کنیم $b \in r_R(a)$ در نتیجه $ab = 0$ و طبق (۲)، $aRb = 0$ که نشان می دهد $Rb \subseteq r_R(a)$. از آن جا که $r_R(a)$ ایده آل راست است در نتیجه $r_R(a)$ یک ایده آل است □

تعریف ۱۰.۱.۱. حلقه R نیم جابه جایی است هرگاه در یکی از شرایط گزاره (۹.۱.۱) صدق کند.

تعریف ۱۱.۱.۱. عضو a از حلقه R را پوچ توان گوییم هرگاه به ازای عضوی مانند $n \in N$، $a^n = 0$.

گزاره ۱۲.۱.۱. برای حلقه R شرایط زیر معادلند:

۱. R فاقد عضو پوچ توان ناصفر است؛

۲. برای هر عضو $x \in R$، $x^2 = 0$ نتیجه می دهد $x = 0$.

اثبات. (۲)$\Leftarrow$(۱) واضح است.

(۱)$\Leftarrow$(۲) فرض کنیم $a \in R$ عضو ناصفری باشد به طوری که $a^n = 0$ و n کوچکترین عددی باشد که در این رابطه صدق می کند در این صورت $(a^{n-1})^2 = a^n.a^{n-2} = 0$. طبق فرض، $a^{n-1} = 0$ که تناقض است. □

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه R را تقلیل یافته گوییم هرگاه در یکی از شرایط گزاره (۱۲.۱.۱) صدق کند.

- مفهوم پوچ ساز چپ و راست در حلقه های تقلیل یافته بر هم منطبقند.

مثال ۱.۱.۱۴. حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ حلقه تقلیل یافته است. هم چنین هر میدان و هر حلقه چند جمله ای روی میدان، حلقه تقلیل یافته است.

لم ۱.۱.۱۵. هر حلقه تقلیل یافته حلقه نیم جابه جایی است.

اثبات. فرض کنیم R حلقه تقلیل یافته باشد و برای $x, y \in R$، $xy = 0$. در نتیجه $yx = 0$ و $(xry)^2 = xryxry = 0$ که نشان می دهد $xry = 0$. □

لم ۱.۱.۱۶. اگر حلقه R نیم جابه جایی باشد آن گاه R حلقه آبلی است.

اثبات. باید نشان دهیم هر خودتوان حلقه R مرکزی است. فرض کنیم e خودتوانی از R باشد در این صورت $e(1-e) = 0$، حال طبق نیم جابه جایی بودن، برای $x \in R$، $ex(1-e) = 0$ بنابراین $ex = exe$. به طور مشابه $xe = exe$ از این رو $ex = xe$ که نشان می دهد e مرکزی است. □

نتیجه ۱.۱.۱۷. هر حلقه تقلیل یافته، حلقه آبلی است.

تعریف ۱.۱.۱۸. حلقه R را ددکیند-متناهی گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in R$، اگر $xy = 1$ آن گاه $yx = 1$.

قضیه ۱.۱.۱۹. هر حلقه آبلی حلقه ددکیند-متناهی است.

اثبات. فرض کنیم R حلقه آبلی باشد و برای $x, y \in R$، $yx = 1$. در این صورت $e = xy$ خودتوان است. حال از آن جا که e مرکزی است $e = yxe = yex = (yx)(yx) = 1$. از این رو $xy = 1$. □

لم ۱.۱.۲۰. برای خودتوان $e \in R$ شرایط زیر معادلند:

۱. $e \in S_l(R)$؛

۲. $1 - e \in S_r(R)$؛

۳. $(1-e)Re = 0$؛

۴. eR ایده آلی از R است؛

۵. $R(1-e)$ ایده آلی از R است؛

۶. $eR(1-e)$ ایده آلی از R است و $eR = eR(1-e) \oplus Re$.

اثبات. برهان واضح است. $\square$

لم ۲۱.۱.۱. فرض کنیم R حلقه و e خودتوانی از آن باشد در این صورت $S_l(eRe) = \{0, e\}$ اگر و تنها اگر $S_r(eRe) = \{0, e\}$.

اثبات. طبق لم (۲۰.۱.۱)، برهان واضح است. $\square$

لم ۲۲.۱.۱. فرض کنیم R حلقه باشد و $e^2 = e \in R$ در این صورت $r_R(Re) = (1-e)R$.

اثبات. از آن جا که $Re(1-e) = 0$ در نتیجه $(1-e)R \subseteq r_R(Re)$. حال اگر $x \in r_R(Re)$ آن گاه $Rex = 0$، ازاین رو $x = (1-e)x \in (1-e)R$. لذا $r_R(Re) \subseteq (1-e)R$ و اثبات کامل می شود. $\square$

تعریف ۲۳.۱.۱. خودتوان های e و f را متعامد گوییم هرگاه $ef = fe = 0$.

قضیه ۲۴.۱.۱. فرض کنیم $B_1, ..., B_n$ ایده آل های چپ در حلقه یکدار R باشند آن گاه $R = B_1 \oplus ... \oplus B_n$ اگر و تنها اگر خودتوان های متعامد $e_1, ..., e_n$ موجود باشند به طوری که $B_i = Re_i$ و $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$.

اثبات. فرض کنیم $R = B_1 \oplus ... \oplus B_n$. از آن جا که $1 \in R$، برای $1 \leqslant i \leqslant n$، e_i هایی موجود هستند که $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$. در نتیجه برای $1 \leqslant j \leqslant n$، $e_j = \sum_{i=1}^{n} e_i e_j$. از آن جا که برای هر i, j که $i \neq j$، $B_i \cap B_j = 0$ در نتیجه $e_i^2 = e_i$ و $e_i e_j = 0$. هم چنین ازآن جا که برای هر $b \in B_i$، $b = b.1 = b \sum_{i=1}^{n} e_i$ در نتیجه $B_i = Re_i$.

برای اثبات عکس رابطه، فرض کنیم $e_i^2 = e_i$، $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$ و برای هر $i \neq j$، $e_i e_j = 0$ و $B_i = Re_i$. لذا برای هر $x \in B_i \cap B_j = Re_i \cap Re_j$، $x = xe_i = xe_j$ در نتیجه $x = xe_i = xe_ie_j = 0$ و $B_i \cap B_j = 0$.

حال فرض کنیم $x \in R$ در نتیجه $x = x.1 = x.\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} xe_i \in (B_1 \oplus ... \oplus B_n)$.
از آن جا که x دلخواه انتخاب شده است، $R = B_1 \oplus ... \oplus B_n$. $\square$

تعریف ۲۵.۱.۱. مجموعه مرتب $\{b_1, ..., b_n\}$ از خودتوان های مجزای غیر صفر در R را خودتوان های مثلثی چپ R گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $b_1 + b_2 + ... + b_n = 1$؛

۲. $b_1 \in S_l(R)$؛

۳. $b_{k+1} \in S_l(c_k R c_k)$ که برای $1 \leq k \leq n-1$، $c_k = 1 - (b_1 + ... + b_k)$.

• مجموعه خودتوان های مثلثی چپ $\{b_1, ..., b_n\}$ را کامل گوییم هرگاه برای هر $1 \leq k \leq n$، $S_l(b_k R b_k) = \{0, b_k\}$.

• به طور مشابه خودتوان های مثلثی راست و خودتوان های مثلثی راست کامل قابل تعریف هستند.

تعریف ۲۶.۱.۱. حلقه R را فون نیومن منظم[۱] گوییم هرگاه برای هر عضو $a \in R$، عضو $b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $a = aba$.

• برای مثال هر میدان حلقه فون نیومن منظم است.

تعریف ۲۷.۱.۱. حلقه R را اول گوییم هر گاه به ازای هر $a, b \in R$، $aRb = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

تعریف ۲۸.۱.۱. حلقه R را نیم اول گوییم هرگاه به ازای هر $a \in R$، $aRa = 0$ آن گاه $a = 0$.

۲.۱ تعاریف اولیه مدول ها

با توجه به این که یکی از اهداف اصلی این پایان نامه مطالعه و بررسی بر روی مدول های بئر و شبه بئر می باشد، در این بخش به بیان تعاریف و قضایای اولیه مربوط به مدول ها می پردازیم. منظور از M، R-مدول راست و $S = End_R(M)$ حلقه R-درونریختی های M است. زیر مدول های M، R-زیرمدول های راست خواهند بود.

[۱] Von neumann regular

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک R- مدول راست، یک گروه آبلی جمعی M همراه با نگاشت $M \times R \longrightarrow M$ است به طوری که برای هر $r, s \in R$ و $m_1, m_2 \in M$،

۱. $(m_1 + m_2)r = m_1r + m_2r$؛

۲. $m(r+s) = mr + ms$؛

۳. $(ms)r = m(sr)$.

• فرض کنیم M یک R-مدول باشد. مجموعه درونریختی های گروه M که با $End_R(M)$ نمایش داده می شود همراه با اعمال دوتایی جمع و ضرب زیر تشکیل حلقه می دهد.
به ازای هر $f, g \in End_R(M)$ و $x \in M$،

۱. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$؛

۲. $fg(x) = f(g(x))$.

تعریف ۲.۲.۱. مجموع خانواده $(N_i)_{i \in I}$، از R-زیرمدول های R-مدول M را مجموع مستقیم داخلی گوییم هرگاه هر عضو x از این مجموع را بتوان به طور منحصر به فرد به صورت $x = \sum_i x_i$ نوشت که در آن $x_i \in N_i$ و به ازای هر $i \in I$ به جز تعداد متناهی از آن ها $x_i = 0$.
مجموع مستقیم داخلی را با $\oplus \sum_{i \in I} N_i$ نمایش می دهیم و در صورتی که I مجموعه متناهی باشد آن را به صورت $N_1 \oplus ... \oplus N_k$ می نویسیم.
• هر N_i در مجموع مستقیم را یک جمعوند مستقیم گوییم.

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنیم $M = \oplus \sum_{i=1}^{k} M_i$ مجموع مستقیم R-مدول های M_i باشد. در این صورت به عنوان دو حلقه

$$Hom_R(M,M) \cong \begin{pmatrix} Hom_R(M_1,M_1) & Hom_R(M_2,M_1) & ... & Hom_R(M_k,M_1) \\ Hom_R(M_1,M_2) & Hom_R(M_2,M_2) & ... & Hom_R(M_k,M_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Hom_R(M_1,M_k) & Hom_R(M_2,M_k) & \cdots & Hom_R(M_k,M_k) \end{pmatrix}$$

اثبات. رجوع شود به ([۲۶]، قضیه ۱.۱) □

تعریف ۴.۲.۱. R-مدول ناصفر M را ساده گوییم هرگاه زیرمدول نابدیهی نداشته باشد. به عبارتی تنها زیرمدول هایش 0 و M باشند.

مثال ۵.۲.۱. حلقه بخشی و میدان به عنوان R-مدول روی خودشان ساده هستند.

تعریف ۶.۲.۱. R-مدول M را نیم ساده گوییم هرگاه هر R-زیر مدول آن جمعوند مستقیمی از آن باشد.

- با فرض $M = R_R$ حلقه های نیم ساده قابل تعریف هستند.

مثال ۷.۲.۱. مدول صفر نیم ساده است اما ساده نیست.

لم ۸.۲.۱. هر زیرمدول یک مدول نیم ساده، نیم ساده است.

اثبات. رجوع شود به ([۲۰]، قضیه ۲.۲). □

تعریف ۹.۲.۱. مجموع تمام زیرمدول های ساده از مدول M را ساکل M گوییم و با نماد $soc(M)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱۰.۲.۱. برای R-مدول M شرایط زیر معادلند:

۱. M نیم ساده است؛

۲. M مجموع مستقیم خانواده ای از زیرمدول های ساده M است؛

۳. M مجموع خانواده ای از زیرمدول های ساده M است.

اثبات. رجوع شود به ([۲۰]، قضیه ۲.۴). □

نتیجه ۱۱.۲.۱. مدول M نیم ساده است هر گاه $soc(M) = M$.

تعریف ۱۲.۲.۱. یک جفت از همریختی های مدولی مانند

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

را در B دقیق گوییم هرگاه $Imf = Kerg$. یک دنباله متناهی از همریختی های مدولی مانند

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$$

را دقیق گوییم هرگاه برای هر $i = 1, 2, \cdots, n-1$، $Imf_i = Kerf_{i+1}$. دنباله نامتناهی

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \cdots$$

را دقیق گوییم هرگاه برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $Imf_i = kerf_{i+1}$.
هر دنباله دقیق به شکل $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق کوتاه است.

قضیه ۱۳.۲.۱. فرض کنیم R حلقه باشد و $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A_2 \longrightarrow 0$ دنباله دقیق کوتاه باشد در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱. R-مدول همریختی $h : A_2 \longrightarrow B$ وجود دارد به طوری که $gh = 1_{A_2}$؛

۲. R-مدول همریختی $k : B \longrightarrow A_2$ وجود دارد به طوری که $kf = 1_{A_1}$؛

۳. دنباله فوق با دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{g} A_2 \longrightarrow 0$ یکریخت است. به ویژه $B \cong A_1 \oplus A_2$.

اثبات. رجوع شود به ([۲۵]، قضیه ۱۸.۱.۴) □

تعریف ۱۴.۲.۱. دنباله دقیق کوتاه را شکافنده گوییم هرگاه در یکی از شرایط قضیه (۱۳.۲.۱) صدق کند.

قضیه ۱۵.۲.۱. برای R-مدول یکانی M شرایط زیر معادلند:

۱. M دارای پایه ناتهی است؛

۲. M مجموع مستقیم داخلی خانواده ای از R-مدول های دوری است که هر یک به عنوان R-مدول چپ با R یکریخت می باشند؛

۳. M با مجموع مستقیم کپی هایی از R-مدول چپ R یکریخت است؛

۴. مجموعه ناتهی X و تابع $i : X \to M$ با خاصیت زیر وجود دارند: به ازای هر R-مدول یکانی A و تابع $f : X \to A$، همریختی منحصر به فردی از R-مدول ها مانند $\widehat{f} : M \to A$ وجود دارد به طوری که $\widehat{f}i = f$.

اثبات. رجوع شود به ([۲۵]، قضیه ۱.۲.۴). $\square$

تعریف ۱۶.۲.۱. R-مدول یکانی M را آزاد گوییم هرگاه در یکی از شرایط قضیه (۱۵.۲.۱) صدق کند.

تعریف ۱۷.۲.۱. مدول P را روی حلقه R تصویری گوییم هرگاه به ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

از همریختی های R-مدول ها که سطر پایین آن دقیق است یک همریختی R-مدول ها مانند $h : P \to A$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

تعویض پذیر باشد(یعنی $gh = f$).

قضیه ۱۸.۲.۱. هر مدول آزاد M روی حلقه یکدار R تصویری است.

اثبات. رجوع شود به ([۲۵]، قضیه ۲.۳.۴). $\square$