دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد در رشته ریاضی

گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

# ساختن قاب‌های تلفیقی تنگ

استاد راهنما

دکتر اصغر رحیمی

استاد مشاور

دکتر بیاض دارابی

نگارش

حجت ملکی

شهریور ۹۱

| | |
|---|---|
| نام خانوادگی: ملکی | نام: حجت |
| عنوان پایان نامه: ساختن قاب های تلفیقی تنگ | |
| استاد راهنما: دکتر اصغر رحیمی<br>استاد مشاور: دکتر بیاض دارابی | |
| مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد<br>گرایش: آنالیز ریاضی | رشته: ریاضی محض |
| دانشگاه: مراغه<br>تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ماه ۹۱ | دانشکده: علوم پایه<br>تعداد صفحه: ۹۱ |
| کلید واژه ها: قاب ، قاب تنگ ، قاب تلفیقی ، قاب تلفیقی تنگ | |


چکیده

قاب های تلفیقی تنگ موضوع جدیدی از نظریه قاب، با کاربرد هایی در توزیع سنجش و علم ارتباطات می باشد.درمورد وجود این گونه قابها هنوز مطالب اندکی اثبات شده است. در این پایان نامه ما به پرسش از وجود قاب ها در حالت خاصی که فضای زمینه بعد متناهی دارد و زیرفضاهای قاب های تلفیقی دارای بعد برابر هستند پاسخ مناسب داده ایم. یعنی شرایطی را ایجاد کرده ایم که تحت آن مجموعه ای از ماتریس های متعامد با رتبه یکسان چنان موجودند که حاصل جمع آنها یک ضرب اسکالرِ ماتریس همانی است. مجموعه شرایط برای وجود این نوع از قاب ها مناسب است و در نتیجه اغلب قابل دسترس می باشند.روشی که‌در این پایان نامه برای ساختن قاب های تنگ نرم واحد بکار برده ایم روشی کاملاً ساختاری، جدید و انعطاف پذیر می باشد.

تقدیم به همسرم اسماء

و

دخترم نوازش

سپاس گزاری

در آغاز لازم می دانم از زحمات بی دریغ همسرم و نیز پدر و مادر دلسوزم که آسایش فکری فراهم نمودند تا این پایان نامه را به اتمام برسانم؛ سپاسگزاری نمایم. همچنین از زحمات استاد گرامی آقای دکتر اصغر رحیمی که با راهنمایی‌های خود در زمان نگارش این پایان نامه راهگشای اینجانب بوده اند و از آقای دکتر دارابی که زحمت مطالعه و مشاوره آن را متقبل شده اند کمال امتنان را دارم.

حجت ملکی

شهریور۹۱

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# تعاریف و قضایای اولیه

## ۱.۱ مقدمه

با وجود اینکه تبدیل فوریه ابزاری اساسی و مهم در آنالیز برای مدت بیش از یک قرن می باشد لیکن دارای کمبودها و نقص های جدی در آنالیز سیگنال ها می باشد از جمله می توان به مخفی نگه داشتن اطلاعات مربوط به زمان و فرکانس در یک لحظه مورد نظر اشاره کرد.در سال ۱۹۴۶دنیس گابور[1] این شکاف را پرکردو روشی برای تجزیه یک سیگنال به سیگنال های مقدماتی مطرح نمود.روش گابور سریعاً تبدیل به الگویی در آنالیز طیفی با تکیه بر روش های زمان–فرکانس گردید،وی به خاطر این کار در سال ۱۹۷۱ موق به اخذ جایزه نوبل فیزیک گردید.

مفهوم قاب برای فضاهای هیلبرت توسط دافین[2] و شیفر[3] در سال ۱۹۵۲ به عنوان بخشی از تحقیقات درباره سریهای فوریه غیر هارمونیک مطرح گردید. در واقع دافین و شیفر کارهای گابور درآنالیز سیگنال ها را به شکل محض و مجرد بیان نمودند. در ابتدا به نظر نمی رسید که ایده های دافین و شیفر در خارج از زمینه سری های فوریه غیر هارمونیک کاربردی داشته باشد،اما پس از انتشار یک مقاله در سال۱۹۸۶ توسط دابچیز[4]،گراسمان[5] و میر[6] نظریهٔ قاب ها با سرعت زیادی و به شکل وسیعی مورد مطالعه قرار گرفت و محققین زیادی در شاخه های مختلف علوم و مهندسی شروع به مطالعه آنها نمودند.

امروزه قاب ها در مطالعه پردازش سیگنال،پردازش تصویر،انتقال داده ها،کد گذاری، کد برداری، سیستم های موبایل، شبکه های اطلاعاتی و اینترنت، اپتیک، فیلتر بانک، نظریهٔ سمپلینگ و ... مورد استفاده قرار می گیرند. در ایران و طی چند سال اخیر در برخی از دانشگاه ها مانند دانشگاه مراغه، تبریز، تربیت معلم تهران، فردوسی مشهدو ولی عصر رفسنجان مطالعاتی روی قاب ها و توسیع روی آنها صورت گرفته است.

---
[1] D.Gabor
[2] Dufin
[3] Scheffer
[4] Daubechies
[5] Grossman
[6] Meyer

## ۲.۱ پایه‌ها

در مطالعه فضاهای برداری، یکی از مهمترین مفاهیم پایه می‌باشد که به ما اجازه می‌دهد هر عضوی از فضای برداری را به شکل ترکیب خطی از اعضای پایه بنویسیم. مستقل خطی بودن اعضای پایه یکی از شرایط محدودکننده است و اگر بخواهیم اعضای پایه نسبت به یک ضرب داخلی دو به دو متعامد باشند، شرایط محدودکننده‌تر خواهد بود و یافتن چنین پایه‌ای مشکل و در مواردی غیرممکن خواهد بود و این می‌تواند دلیلی برای جستجوی ابزاری باشد که انعطاف بیشتری داشته باشد. با توجه به اهمیت پایه در فضاهای هیبلرت و ارتباط زیاد آن با قاب‌ها[۷] در این بخش مطالبی در مورد مفهوم پایه از [۱۱] مطرح می‌گردد. درسراسر این پایان نامه $\mathcal{H}$ نشانگر یک فضای هیلبرت جدایی پذیر است.

**تعریف ۱.۲.۱** دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ یک دنباله بسل[۸] نامیده می‌شود اگر ثابت $B>0$ وجود داشته باشد به طوری که

برای هر $f \in \mathcal{H}$:
$$\sum_{i=1}^{\infty} |< f, f_i >|^2 \leq B\|f\|^2$$

ثابت $B$ را کران بسل دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ می‌نامیم.

**قضیه ۲.۲.۱** فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل با کران $B$ است اگر و تنها اگر $T: \{c_i\}_{i=1}^{\infty} \to \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ یک عملگر کراندار خوش تعریف از $l^2(\mathbb{N})$ به روی $\mathcal{H}$ باشد و $\|T\| \leq \sqrt{B}$.

اثبات: مراجعه شود به [۱۱] . ■

**قضیه ۳.۲.۱** فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ و $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ برای همه $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ همگرا باشد آنگاه:

---
[۷] Frames
[۸] Bessel sequence

$$T: l^2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H} \;\; , \;\; T\{c_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

یک عملگر خطی کراندار تعریف می‌کند و عملگر الحاقی آن به صورت

$$T^* := \mathcal{H} \to l^2(\mathbb{N}) \;\; , \;\; T^*(f) = \{< f, f_i >\}_{i=1}^{\infty}$$

تعریف می‌شود و برای هر $f \in \mathcal{H}$ : $\sum_{i=1}^{\infty} |< f, f_i >|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2$.

اثبات: مراجعه شود به [۱۱] ■

**قضیه ٤.۲.۱** اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ و $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ برای همه $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ همگرا باشد آنگاه $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل است.

اثبات: مراجعه شود به [۱۱]. ■

**تعریف ٥.۲.۱** فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد، سری $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ را به طور نامشروط همگرا[9] گوییم هرگاه هر آرایش از آن همگرا باشد.

**قضیه ٦.۲.۱** اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل در $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ برای تمام $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2(\mathbb{N})$ همگرای نامشروط است.

اثبات: مراجعه شود به [۱۱].

**تعریف ۷.۲.۱** دنباله $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ازبردارهای $\mathcal{H}$ را در نظر می‌گیریم:

[9] Unconditionally convergent

۱) دنباله $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه شودر برای $\mathcal{H}$ است، اگر برای هر $f \in \mathcal{H}$ ضرایب اسکالر منحصربفرد $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ چنان موجود باشند که: $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k$

۲) پایه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک پایه نامشروط گوییم هرگاه سری تعریف شده در (۱) برای هر $f \in \mathcal{H}$ همگرای نامشروط باشد.

۳) پایه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه است اگر یک دستگاه متعامد یکه باشد یعنی:

$$\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } k = j \\ 0 & \text{اگر } k \neq j \end{cases}$$

۳) دو دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ در یک فضای هیلبرت را دو به دو متعامد گوییم هرگاه:

$$\langle f_k, g_k \rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } k = j \\ 0 & \text{اگر } k \neq j \end{cases}$$

در قضیه بعد شرط‌های معادلی برای تبدیل یک دستگاه متعامد یکه به یک پایه متعامد یکه ارائه می‌شود:

**قضیه ۸.۲.۱** برای دستگاه متعامد یکه $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ احکام زیر معادل هستند:

۱) $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$یک پایه متعامد یکه است.

۲) برای هر $f \in \mathcal{H}$، $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$.

۳) برای هر $f, g \in \mathcal{H}$، $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle \langle e_i, g \rangle$.

۴) برای هر $f \in \mathcal{H}$، $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2 = \|f\|^2$.

۵) $\overline{span}\{e_i\}_{i=1}^{\infty} = \mathcal{H}$.

۶) برای هر $i \in \mathbb{N}$، اگر $\langle f, e_i\rangle = 0$ آنگاه $f = 0$.

اثبات: مراجعه شود به [۱۱] . ■

در قضیه بالا اتحاد (۴) را اتحاد پارسوال[۱۰] گویند.

**نتیجه ۹.۲.۱** اگر $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه باشد آنگاه هر $f \in \mathcal{H}$ یک بسط به صورت $f = \sum_{i=1}^{\infty}\langle f, e_i\rangle e_i$ دارد که همگرای نامشروط است.

**گزاره ۱۰.۲.۱** فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله از بردارهای نرمال شده در $\mathcal{H}$ باشد که برای هر $\forall f \in \mathcal{H}$، $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f, e_i\rangle|^2 = \|f\|^2$ در این صورت $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه نرمال شده برای $\mathcal{H}$ است.

اثبات: مراجعه شود به [۱۱] . ■

**قضیه ۱۱.۲.۱** در فضای $\mathbb{C}^n$ تعداد $n$ بردار را در نظر گرفته و آنها را در یک ماتریس $n \times n$ به صورت ستونی قرار می‌دهیم:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

در این صورت احکام زیر معادل هستند:

ستون‌های $\Lambda$ (یعنی بردارهای داده شده) تشکیل یک پایه برای $\mathbb{C}^n$ می‌دهند.

۱) سطرهای $\Lambda$ تشکیل یک پایه برای $C^n$ می‌دهند.

---

[۱۰] Parseval

۲) دترمینان $\Lambda$ غیرصفر است.

۳) $\Lambda$ معکوس‌پذیر است

۴) $\Lambda$ یک نگاشت یک به یک روی $C^n$ تعریف می‌کند.

۵) $\Lambda$ یک نگاشت پوشا روی $C^n$ تعریف می‌کند.

۶) ستون‌های $\Lambda$ مستقل خطی هستند.

۷) $\Lambda$ رتبه برابر $n$ دارد.

**تعریف ۱۲.۲.۱** فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد، گوییم:

۱) دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ مستقل خطی است هر زیردنباله متناهی $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ مستقل خطی باشد.

۲) دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را $\omega$- مستقل خطی گویند اگر برای هر دنباله $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اسکالرها که $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ داشته باشیم: $\forall c_k \in \mathbb{N}\ ,\quad c_k = 0$

۳) دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ مینیمال است هرگاه برای هر $j \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$f_j \notin \overline{span}\{f_k\}_{k\neq j}$$

## ۲.۱ قاب‌ها در فضای هیلبرت

در این بخش مفاهیم بنیادی قاب‌ها را که در این پایان نامه به کا رمی‌روند بیان خواهیم کرد.

**تعریف ۱.۳.۱** فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. این دنباله برای $\mathcal{H}$ یک قاب نامیده می‌شود. اگر اعداد $0 < A \leq B < \infty$ موجود باشند به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$A\|f\|^{۲} \leq \sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^{۲} \leq B\|f\|^{۲} \qquad (۱.۱)$$

اعداد ثابت $B, A$ کران‌های قاب نامیده می‌شوند. بزرگترین مقدار ممکن برای $A$ و کوچکترین مقدار ممکن بر $B$ کران‌های بهینه قاب نامیده می‌شوند.

اگر $A = B$ قاب را تنگ[۱۱] و اگر $A = B = ۱$، قاب را قاب پارسوال می‌نامند. اگر نابرابری سمت راست در (۱.۱) برقرار باشد، دنباله $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنباله بسل در $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۲.۳.۱** اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ برای $\mathcal{H}$ یک قاب باشد، درصورتیکه این دنباله با حذف یک عضو دلخواه خاصیت قاب بودن خود را از دست دهد به آن قاب دقیق[۱۲] می‌گوییم.

**تعریف ۳.۳.۱** دنباله $\{f_i\}_{i\in I}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، کامل نامیده می‌شود هرگاه $\overline{span}\{f_i\}_{i\in I} = \mathcal{H}$.

**گزاره ٤.۳.۱** فرض کنیم $\{f_i\}_{i=۱}^{n}$ دنباله‌ای در $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $\{f_i\}_{i=۱}^{n}$ یک قاب برای $\overline{span}\{f_i\}_{i=۱}^{n}$ است.

برهان: رجوع شود به [۱۱]. ■

**تعریف ۵.۳.۱** فرض کنید $l_۲(I) = \{\{c_i\}_{i\in I} | \sum_{i\in I}|c_i|^۲ < \infty\}$، اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب در $\mathcal{H}$ باشد در آن صورت عملگر

$$T: l_۲(I) \to \mathcal{H} \quad , T\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i f_i$$

یک عملگر کراندار خواهد بود که آن را عملگر ترکیب یا عملگر پیش قاب می‌نامند. عملگر الحاقی $T$ را به صورت

$$T^*: \mathcal{H} \to l_۲(I) \quad , \quad T^* f = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I} .$$

---

[۱۱] tight
[۱۲] Exact frame

تعریف می‌شود که آن را عملگر تجزیه قاب می‌نامند. با ترکیب دو عملگر $T$ و $T^*$ عملگر قاب حاصل می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S:\mathcal{H} \to \mathcal{H} \quad , \quad Sf = TT^*f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i \ .$$

اگر $B$ , $A$ کران‌های قاب باشند در آن صورت $AI \leq S \leq BI$ و در نتیجه $S$ یک عملگر کراندار، وارون‌پذیر و مثبت است و $B^{-۱}I \leq S^{-۱} \leq A^{-۱}I$.

**قضیه ۶.۳.۱** $\{f_i\}_{i\epsilon I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر عملگر

$$T: l^{۲}(I) \to \mathcal{H} \quad , T\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i f_i$$

خوش تعریف و پوشا باشد.

برهان: مراجعه شود به [۱۱] . ■

**قضیه ۷.۳.۱** فرض کنید $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب $S$ و کران‌های $A, B$ باشد، آنگاه احکام زیر برقرارند:

۱) $S$ یک عملگر کراندار، وارون‌پذیر، خودالحاقی و مثبت است.

۲) $\{S^{-۱}f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با عملگر قاب $S^{-۱}$ و کران‌های $B^{-۱}, A^{-۱}$ خواهد بود و اگر $B$ , $A$ کران‌های بهینه قاب $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ باشند، آنگاه $B^{-۱}, A^{-۱}$ نیز کران‌های بهینه قاب $\{S^{-۱}f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ خواهند بود.

قاب $\{S^{-۱}f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ را قاب دوگان استاندارد برای قاب $\{f_i\}_{i=۱}^{\infty}$ می‌نامند.

برهان: مراجعه شود به [۱۱] . ■

**قضیه ۸.۳.۱** فرض کنید $\{f_i\}_{i\epsilon I}$ یک قاب با عملگر قاب $S$ باشد آنگاه هر $f \in \mathcal{H}$ را می‌توان به صورت‌های زیر نمایش داد:

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i \quad , \; f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle S^{-1}f_i$$

برهان: مراجعه شود به [۱۱] . ■

**تعریف ۹.۳.۱** فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد، گوییم $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله قاب است اگر و فقط اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\overline{span}\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ باشد.

**مثال ۱۰.۳.۱** فرض کنید $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد.

۱) با تکرار هر دو عضو دنباله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\{f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \ldots\}$$

با توجه به تعریف (۱.۱) و قاب تنگ با در نظر گرفتن $f = e_1$ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f, f_i\rangle|^2 &= |\langle e_1, e_1\rangle|^2 + |\langle e_1, e_1\rangle|^2 + |\langle e_1, e_2\rangle|^2 + \cdots \\ &= 2 + 0 + 0 + \cdots \\ &= 2\|f\|^2\end{aligned}$$

لذا دنباله مذکور یک قاب تنگ با کران قاب $A = 2$ است.

۲) دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ یک قاب با کران‌های قاب $A = 1$ و $B = 2$ است.

۳) فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}=\left\{e_1,\frac{1}{\sqrt{2}}e_2,\frac{1}{\sqrt{2}}e_2,\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\ldots\right\}$

در این صورت برای هر $f\in\mathcal{H}$:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f,f_i\rangle|^2=\sum i\left|\langle f,\frac{1}{\sqrt{i}}e_i\rangle\right|^2$$

$$=\|f\|^2$$

بنابراین $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب تنگ با کران قاب $A=1$ است لذا بنابر تعریف $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک قاب پارسوال است.

۴) اگر $I$ یک زیرمجموعه محض از $\mathbb{N}$ باشد در این صورت $\{e_i\}_{i\epsilon I}$ برای $\mathcal{H}$ کامل نیست و نمی‌تواند برای $\mathcal{H}$ یک قاب باشد ولی $\{e_i\}_{i\epsilon I}$ برای فضای $\overline{span}\{e_i\}_{i\epsilon I}$ یک قاب است یعنی یک دنباله قاب است.

**قضیه ۱۱.۳.۱** فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:

۱) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه ریس[۱۳] برای $\mathcal{H}$ است.

۲) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب دقیق است.

۳) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ مینیمال است.

۴) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله دو به دو متعامد[۱۴] است.

۵) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دو به دو متعامد هستند.

۶) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$، $\omega$- مستقل خطی است.

[۱۳] Riesz basis
[۱۴] biorthogonal

۷) اگر برای $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$ داشته باشیم $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$ در این صورت برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $c_k = 0$.

۸) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه است.

اثبات: مراجعه شود به [۱۱]. ■

## ۴.۱ عملگرها روی فضای هیلبرت

**تعریف ۱.۴.۱** اگر $\mathcal{H}$ و $K$ دو فضای هیلبرت باشند، یک ایزومورفیسم بین $\mathcal{H}$ و $K$ نگاشت خطی یک به یک و پوشا به صورت $U: \mathcal{H} \to K$ است اگر به ازای هر $h, g \in \mathcal{H}$، $\langle Uh, Ug \rangle = \langle h, g \rangle$.

در این صورت $\mathcal{H}$ و $K$ را ایزومورف یا یکریخت گوییم.

**تعریف ۲.۴.۱** اگر $T \in B(\mathcal{H})$ و $\{e_i\}_{i \in I}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد و

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i \in I} \|Te_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

اگر $\|T_2\| < \infty$. در این صورت $T$ را یک عملگر هیلبرت-اشمیت[15] گوییم.

**تعریف ۳.۴.۱** فرض کنیم $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ یک پایه متعامد یکه برای $l_2(\mathbb{N})$ باشد و $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اسکالرها باشد. اگر عملگری کراندار مانند $T$ روی $l_2$ موجود باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $Te_i = c_i e_i$ آنگاه $T$ را یک عملگر قطری گوییم. در این تعریف $\|T\| = sup\{|c_i|:\ i \geq 1\}$.

**تعریف ۴.۴.۱** اگر $U \in B(\mathcal{H})$ آنگاه:

---

[15] Hilbert-Schmidt

۱) $T$ را خودالحاقی گوییم هرگاه $T = T^*$

۲) $A$ را نرمال گوییم هرگاه $T.T^* = T^*.T$

**قضیه ۵.٤.۱** اگر $U: X \to X$ کراندار باشد و $\|I - U\| < ۱$ و $X$ یک فضای نرم‌دار باشد، آنگاه $U$ معکوس‌پذیر است و $U^{-۱} = \sum_{K=۰}^{\infty}(I-U)^K$،

بعلاوه: $\|U^{-۱}\| \le \frac{۱}{۱-\|۱-U\|}$

اثبات: مراجعه شود به [۱۱] . ■

**لم ٦.٤.۱** فرض کنید $\mathcal{H}$ و $K$ دو فضای هیلبرت و $U: K \to \mathcal{H}$ عملگری کراندار باشد در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) $\|U^*\| = \|U\|$ و $\|UU^*\| = \|U\|^۲$.

۲) $R_U$ در $\mathcal{H}$ بسته است اگر و فقط اگر $R_{U^*}$ در $K$ بسته باشد.

۳) $U$ عملگری پوشا است اگر و فقط اگر ثابت $c > ۰$ چنان موجود باشد که:

$$\|U^*y\| \ge c\|y\| \qquad , \forall y \in \mathcal{H}$$

اثبات: مراجعه شود به [۱۱] . ■

**تعریف ۷.٤.۱** عملگر $U: \mathcal{H} \to K$ وقتی که $\mathcal{H}$ و $K$ فضاهای هیلبرت‌هستند، فشرده‌گوییم اگر $V := \overline{\{Ux: \quad \|x\| \le ۱\}}$ فشرده باشد. یعنی هر دنباله از $V$ دارای یک زیردنباله همگرا باشد.

**قضیه ۸.٤.۱** (نمایش ریس[16]) فرض کنید $f:\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد. در این صورت $y \in \mathcal{H}$ منحصر به فرد موجود است به طوری که:

$$f(x) = \langle x, y \rangle \ , \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

**تعریف ۹.٤.۱** عملگر کراندار $U:\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ را عملگر یکانی گوییم هرگاه:

$$U.U^* = U^*U = I$$

اگر $U$ یکانی باشد آنگاه:

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \ , \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{H}$$

**تعریف ۱۰.٤.۱** عملگر کراندار $U:\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ را خودالحاق گوییم هرگاه $U = U^*$. وقتی $U$ خوادالحاق است داریم:

$$\|U\| = sup_{\|x\|=1} |\langle Ux, x \rangle|$$

**تعریف ۱۱.٤.۱** فرض کنید $V$ زیرفضای بسته از $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت عملگر $P:\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ یک تصویر متعامد[17] از $\mathcal{H}$ به روی $V$ است به طوری که:

$$Px = \begin{cases} x & x \in V \\ 0 & x \in V^{\perp} \end{cases}$$

## ٤ .۱ پایه‌های ریس[18]

**تعریف ۱.۵.۱** یک پایه ریس برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به صورت $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌باشد که $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ و $U:\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ یک عملگر دوسویی و کراندار است.

[16] Riesz' representation theorem
[17] orthogonal projection
[18] Riesz bases