بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

گروه ریاضی

## پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان :

# نقاط ثابت انقباض های غیر خطی در فضاهای متریک مرتب جزئی

استاد راهنما :

دکتر علی پارسیان

استاد مشاور :

دکتر اسماعیل نظری

پژوهشگر :

علی رضا جعفری ازان

تابستان و پاییز ۱۳۸۹

تقدیر وتشکر

حمد و سپاس فراوان خدای رحمان و رحیم را که الطافش همیشه و همه جا بر بندگانش گسترده است و همه از عنایات او برخوردارند و من هم از این قاعده خارج نبوده‌ام. در اینجا بر خود لازم می‌دانم از اساتید عزیز آقایان دکتر علی پارسیان و دکتر اسماعیل نظری که زحمات فراوانی در طی دوره تحصیل و تهیه و تنظیم این پایان نامه متقبل شده‌اند قدردانی نموده و برای ایشان توفیق روز افزون آرزو نمایم و گرامی می‌دارم یاد مرحوم دکتر ولی اله شاه سنایی [1] را.

همچنین تشکر می کنم از همسرم که صبورانه در طول دوره شرایط مرا درک و مرا یاری کرده است .

---

[1] استاد جبر دانشگاه قم ، روحش شاد

# چکیده

دراین پایان نامه در صدد معرفی مفاهیمی مثل نقاط ثابت زوج ، نقاط انطباقی ، تعویض پذیری توابع ، یکنوایی توابع ، $g-$یکنوائی مرکب و قضایای وجود و یکتایی نقاط ثابت نگاشت های انقباضی در فضاهای متریک کامل مرتب جزیی هستیم که تعمیم قضایای بهاسکار [۲] و لاکاشمیکامدام [۳]می باشند.

---

[۲] T.G.Bahaskar

[۳] V.Lakshmikamitham

## مقدمه

اصل انقباض باناخ معروف ترین قضیه نقاط ثابت است شاید مشهورترین نتیجه در نظریه نقاط ثابت ، قضیه نقطه ثابت باناخ باشد که در سال ۱۹۲۲ استفان باناخ در رساله خود آن را تبیین کرد. به طور کلی در نظریه نقطه ثابت سه مسأله زیر مطرح است:

$(i)$ وجود و یگانگی نقطه‌ی ثابت؛

$(ii)$ ساختار مجموعه‌ی نقاط ثابت؛

$(iii)$ روش‌های تقریب نقاط ثابت و همگرایی آنها.

قضیه انقباض باناخ و چندین تعمیم آن برای نگاشتهادر فضاهای متریک ، ابزارهای قدرتمندی برای پیدا کردن نقاط ثابت نگاشتهای انقباضی می باشند. این قضیه را بوید [۴] و ونگ [۵] به نگاشت های انقباضی غیر خطی گسترش دادند . به تازگی بهاسکار[۶] وقبل از او کسانی مثل لوپز [۷] و جبلی [۸] و دیگران نتایج جدیدی بدست آورده اند. بهاسکار و لاکاشمیکامدام [۹] معتقد هستند که قضیه آنها می تواند در جهت بررسی بسیاری از مسائل به عنوان تنها راه حل مورد استفاده قرار گیرد . بر این اساس این پایان نامه شامل سه فصل است، فصل اول شامل یادآوری مطالب اساسی و تعاریف مورد استفاده در فصل های بعد و فصل دوم شامل قضایای اصلی یعنی قضایای وجود نقاط ثابت برای انقباض های غیر خطی در فضاهای متریک مرتب جزئی و نتایج آنها است و فصل سوم به قضایای یکتایی نقاط ثابت و نقاط ثابت انقباض های میر کیلر[۱۰] می پردازد .

---

[۴] Boyd

[۵] Wong

[۶] Bahaskar

[۷] Lopez

[۸] Gebeily

[۹] V.Lakshmikamitham

[۱۰] Meir-keeler

# فهرست مندرجات


۱ یادآوری مفاهیم اولیه و تعاریف اساسی در نقاط ثابت ۱

۱.۱ یادآوری مفاهیم اولیه . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲

۲.۱ تعاریف اساسی در نقاط ثابت . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۷

۲ قضایای وجود نقاط ثابت انقباض های غیر خطی در فضاهای متریک غیر خطی و نتایج آنها ۱۲

۱.۲ قضایای وجود نقاط ثابت برای انقباض های غیر خطی . . . . . . . . . . ۱۳

۲.۲ چند نتیجه از قضایای وجود نقاط ثابت . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۳۰

۳ قضایای یکتایی نقاط ثابت انقباض های غیر خطی در فضاهای

**۳ متریک و بررسی نقاط ثابت نگاشت های میر کیلر ۳۵**

۱.۳ قضایای یکتایی نقاط ثابت انقباض های غیر خطی . . . . . . . . . . . ۳۶

۲.۳ بررسی نقاط ثابت نگاشت های میر کیلر . . . . . . . . . . . . . . . . ۴۲

**الف مراجع مورد مطالعه ۵۵**

**ب واژه نامه فارسی به انگلیسی ۵۸**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۵۸

فصل ۱

# یادآوری مفاهیم اولیه و تعاریف اساسی در نقاط ثابت

## ۱.۱ یادآوری مفاهیم اولیه

**تعریف ۱.۱.۱** فرض کنیم $X$ مجموعه‌ای غیرتهی باشد ، مجموعه همه زیر مجموعه‌های آنرا در نظر می گیریم و زیر مجموعه‌ای از آنرا $T$ می نامیم به طوری که :

الف ) $T$ شامل $X$ و $\emptyset$ باشد؛

ب ) اشتراک هر دو عضو $T$ ، عضو $T$ باشد ؛

ج ) اجتماع هر خانواده از اعضای $T$ ، عضو $T$ باشد.

در این صورت $T$ را یک توپولوژی روی $X$ و $(X,T)$ را فضای توپولوژیک گوییم .

**تعریف ۲.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه ناتهی باشد ، یک ترتیب کلی بر $X$ رابطه‌ای است که با $<$ نمایش داده می شود و دو خاصیت زیر را دارد.

الف ) برای هر $x$ و $y$ در $X$ ، یک و فقط یکی از روابط $x < y$ یا $y < x$ یا $x = y$ برقرار باشد.

ب ) برای هر $x$ و $y$ و $z$ در $X$ ، اگر $x < y$ و $y < z$ برقرار باشد آنگاه $x < z$ باشد .

**تعریف ۳.۱.۱** یک مجموعه مرتب جزیی مجموعه‌ای است ناتهی مانند $A$ همراه با رابطه‌ای مثل $R$ بر $A \times A$ که با $\leq$ نمایش می دهیم و شرایط زیر را دارد.

الف ) برای هر $x$ در $A$ ، $x \leq x$ برقرار باشد.

ب ) برای هر $x$ و $y$ و $z$ در $A$ ، اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ برقرار باشد آنگاه $x \leq z$ باشد .

ج ) برای هر $x$ و $y$ در $A$ ، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ برقرار باشد آنگاه $x = y$ باشد .

عناصر $x$ و $y$ در $A$ را قابل مقایسه گویند اگر $x \leq y$ یا $y \leq x$ باشد.

**تعریف ۴.۱.۱** فرض کنیم $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد ، زیر مجموعه ناتهی $B$ از $A$ که با $\leq$ مرتب کلی باشد را یک زنجیر در $A$ گوییم .

**تعریف ۵.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه مرتب جزیی و $f$ نگاشتی از $X$ به $X$ باشد

، اگر برای هر $x$ و $y$ در $X$ که $x \leq y$ آنگاه ، $f(x) \leq f(y)$ باشد نگاشت $f$ را نگاشت غیرنزولی گویند واگر برای هر $x$ و $y$ در $X$ که $x \leq y$ آنگاه ، $f(x) \geq f(y)$ باشد نگاشت $f$ را نگاشت غیرصعودی گویند.

**تعریف ۶.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه غیرتهی باشد ، تابعی مثل $d$ از $X \times X$ به $R$ با شرایطزیر را یک متر گویند .

الف) برای هر $x$ و $y$ در $X$ ، $d(x,y) \geq \circ$ باشد.

ب) برای هر $x$ و $y$ در $X$ ، $d(x,y) = d(y,x)$ باشد .

ج)برای هر $x$ و $y$ در $X$ ، $d(x,y) = \circ$ باشد اگر و فقط اگر $x = y$ باشد.

د)برای هر $x$ و $y$ و $z$ در $X$ ، داشته باشیم $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

اگر $d$ یک متر باشد ، $(X,d)$ را فضای متریک گویند.

**تعریف ۷.۱.۱** فرض کنیم $E$ زیر مجموعه یک فضای متری $X$ باشد و $x$ و $y$ اعضای $E$ باشند و $S$ مجموعه تمام اعداد حقیقی $d(x,y)$ باشد ، در این صورت سوپریمم $S$ را قطر $E$ نامیم .

**تعریف ۸.۱.۱** فرض کنیم $X$ یک فضای برداری حقیقی و $\| \ \|$ از $X$ به $R$ یک تابع باشد ، به طوریکه :

الف ) برای هر $x$ در $X$ داریم $\| x \| \geq \circ$ و $\| x \| = \circ$ است اگر و تنها اگر $x = \circ$ باشد.

ب ) برای هر $x$ در $X$ و هر اسکالر $\alpha$ در $R$ ، داشته باشیم $\| \alpha . x \| = | \alpha | . \| x \|$.

پ ) برای هر $x$ و $y$ در $X$ داشته باشیم $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

آنگاه این تابع را یک نرم روی $X$ و $X$ را فضای نرم دار گویند .

**مثال ۹.۱.۱** فرض کنیم برای هر $x$ در $R$ ، $\| x \| = | x |$ در این صورت این تابع یک نرم است زیرا با توجه به تعریف قدر مطلق ، شرایط تعریف نرم بر قرار است .

**تعریف ۱۰.۱.۱** دنباله $\{P_n\}$ را در فضای متری $X$ همگرا گوییم هر گاه ، نقطه‌ای مثل $p$ در $X$ وجود داشته باشد که به ازای هر $\epsilon > 0$ ، عدد صحیح مثبت $M$ موجود باشد طوری که برای هر $n \geq M$ نامساوی $d(P_n, p) < \epsilon$ بر قرار شود.

**تعریف ۱۱.۱.۱** دنباله $\{a_i\}$ را در فضای متری $X$ کشی گوییم اگر برای هر $\epsilon > 0$ عددی مثل $k$ در مجموعه اعداد طبیعی موجود باشد که برای هر $n > k$ و هر $m > k$ داشته باشیم ، $d(a_m, a_n) < \epsilon$

**تعریف ۱۲.۱.۱** فضای متریک $(X, d)$ را کامل گویند هر گاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

**تعریف ۱۳.۱.۱** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک و $C$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی از مجموعه $X$ باشد. نگاشت $T$ از مجموعه $C$ به مجموعه $C$ را یک نگاشت انقباضی با ضریب $\theta$ می‌گویند هرگاه عدد ثابت $\theta$ متعلق به بازه‌ی $(0, 1)$ چنان موجود باشد که برای هر $x$ و $y$ در مجموعه $C$ داشته باشیم :

$$d(T(x), T(y)) \leq \theta d(x, y)$$

**مثال ۱۴.۱.۱** فرض کنیم تابع $T$ از مجموعه $[1, \infty)$ به مجموعه $[1, \infty)$ با ضابطه $T(x) = \frac{1}{x}$ تعریف شود ، با تعریف متر به صورت $d(x, y) = \mid x - y \mid$ داریم ، $\mid \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid \leq \mid \frac{1}{xy} \mid . \mid x - y \mid$ ، پس کافی است قراردهیم ، $\frac{1}{xy} < \theta < 1$ تا داشته باشیم :

$$d(T(x), T(y)) \leq \theta d(x, y)$$

**تعریف ۱۵.۱.۱** فرض کنیم $f$ نگاشتی ، از مجموعه $X$ به مجموعه $X$ باشد ، نقطه $x$ در $X$ را یک نقطه ثابت برای نگاشت $f$ گوییم اگر $f(x) = x$ باشد.

**مثال ۱۶.۱.۱** فرض کنیم $f$ از مجموعه $R$ به مجموعه $R$ با ضابطه $f(x) = x^2$ تعریف شود در این صورت داریم ، $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ یعنی اعداد حقیقی ۰ و ۱ دو نقطه

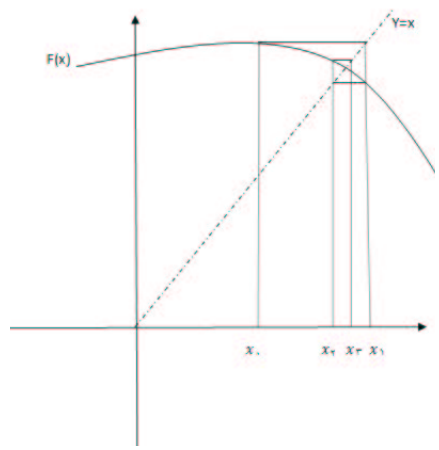
ثابت تابع $f$ هستند .

**قضیه نقطه ثابت باناخ ۱۷.۱.۱** فرض کنیم $(X,d)$ فضای متریک کامل ناتهی و نگاشت $f$ از مجموعه $X$ به مجموعه $X$ یک نگاشت انقباضی روی $X$ باشد. در این صورت نگاشت $f$ یک و تنها یک نقطه ثابت در $X$ دارد .

**توجه ۱۸.۱.۱** نقطه ثابت را این چنین می توان یافت ، اگر با شروع از نقطه دلخواه $x_{۰}$ در $X$ دنباله تکراری زیر را تعریف کنیم

$$x_n = f(x_{n-۱}) \qquad , \qquad n = ۱, ۲, ۳, ...$$

در این صورت دنباله تولید شده همگراست و حد آن نقطه ثابت $f$ است . به شکل زیر توجه کنید (نقطه ثابت تابع محل برخورد با خط $y = x$ است .)




**تعریف ۱۹.۱.۱** فرض کنیم $(X,d)$ فضای متریک باشد ، نگاشت $T$ از مجموعه $X$ به مجموعه $X$ را انقباض میر کیلر گویند اگر برای هر $\epsilon$ مثبت وجود داشته باشد یک $\delta$ مثبت که از نامساوی $\epsilon \leq d(x,y) \leq \epsilon + \delta$ نامساوی $d(T(x),T(y)) < \epsilon$ نتیجه شود .

**مثال ۲۰.۱.۱** فرض می کنیم نگاشت $T$ از مجموعه $R$ به مجموعه $R$ با ضابطه $T(x) = c$ که $c$ یک عدد حقیقی است تعریف شود و $d$ متر معمولی باشد. اگر برای هر $\epsilon$ مثبت ، وجود داشته باشد یک $\delta$ مثبت که $\epsilon \leq d(x,y) \leq \epsilon + \delta$ برقرارباشد ،

خواهیم داشت $\epsilon \leq |x-y| \leq \epsilon+\delta$ و اما داریم $|T(x)-T(y)| = |c-c| = ۰$ پس $|T(x)-T(y)| < \epsilon$ و بنابراین کافی است $\delta$ را برابر $\epsilon$ انتخاب کنیم .

**قضیه ۲۱.۱.۱** فرض کنیم $(X,d)$ یک فضای متریک کامل و $T$ نگاشتی از مجموعه $X$ به مجموعه $X$ باشد و برای هر $\epsilon$ مثبت وجود داشته باشد ، $\delta$ مثبت که برای هر $x$ و $y$ در $X$ از $\epsilon \leq d(x,y) < \epsilon+\delta$ نتیجه بگیریم ، $d(T(x),T(y)) < \epsilon$ در این صورت ، $T$ نقطه ثابت یکتا دارد.

**مثال ۲۲.۱.۱** در قضیه بالا فرض کنیم $X = [۱,\infty)$ باشد و $T(x) = ۲+\sqrt{x}$ ، با توجه به این که داریم :

$$d(۲+\sqrt{x}, ۲+\sqrt{y}) = \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

پس خواهیم داشت ، $d(T(x),T(y)) < \epsilon$ بنابراین ، $T$ دارای نقطه ثابت یکتاست .

## ۲.۱ تعاریف اساسی در نقاط ثابت

**تعریف ۱.۲.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد ، نگاشت $F$ از مجموعه $X \times X$ به مجموعه $X$ را یکنوای مرکب نامند هرگاه ، غیر نزولی نسبت به مولفه اول و غیرصعودی نسبت به مولفه دوم باشد. به عبارت دیگر برای هر $x$ و $y$ و $x_۱$ و $x_۲$ و $y_۱$ و $y_۲$ در $X$ داشته باشیم :

(الف ) اگر $x_۱ \leq x_۲$ باشد ، آنگاه نامساوی $F(x_۱, y) \leq F(x_۲, y)$ برقرار باشد.

(ب ) اگر $y_۱ \leq y_۲$ باشد ، آنگاه نامساوی $F(x, y_۱) \geq F(x, y_۲)$ برقرار باشد.

**مثال ۲.۲.۱** فرض کنیم $X = R$ و تعریف کنیم تابع $F$ را از $R \times R$ به $R$ با ضابطه $F(x, y) = ۲x - ۳y$ ، در این صورت برای هر $x$ و $y$ و $x_۱$ و $x_۲$ و $y_۱$ و $y_۲$ در $R$ داریم :

( الف ) اگر $x_۱ \leq x_۲$ باشد ، آنگاه $۲x_۱ \leq ۲x_۲$ است و بنابراین $۲x_۱ - ۳y \leq ۲x_۲ - ۳y$ است و در نتیجه نامساوی $F(x_۱, y) \leq F(x_۲, y)$ برقرار است .

( ب ) اگر $y_۱ \leq y_۲$ باشد ، آنگاه $-۳y_۱ \geq -۳y_۲$ است و بنابراین $۲x - ۳y_۱ \geq ۲x - ۳y_۲$ است و در نتیجه نامساوی $F(x, y_۱) \geq F(x, y_۲)$ برقرار است .

( الف ) و ( ب ) نشان می دهند که $F$ یکنوای مرکب است .

**تعریف ۳.۲.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد ، نگاشت $F$ از مجموعه $X \times X$ به مجموعه $X$ را یکنوای مرکب اکید نامند هرگاه ، غیر نزولی اکید نسبت به مولفه اول و غیرصعودی اکید نسبت به مولفه دوم باشد. به عبارت دیگر برای هر $x$ و $y$ و $x_۱$ و $x_۲$ و $y_۱$ و $y_۲$ در $X$ داشته باشیم :

(الف ) اگر $x_۱ < x_۲$ باشد ، آنگاه نامساوی $F(x_۱, y) < F(x_۲, y)$ برقرار باشد .

(ب ) اگر $y_۱ < y_۲$ باشد ، آنگاه نامساوی $F(x, y_۱) > F(x, y_۲)$ برقرار باشد.

**تعریف ۴.۲.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد ، عنصر $(x, y)$ در

مجموعه $X \times X$ را برای نگاشت $F$ ، از مجموعه $X \times X$ به مجموعه $X$ ، یک زوج ثابت نامند اگر ، $F(x,y) = x$ و $F(y,x) = y$ .

**مثال ۵.۲.۱** فرض کنیم $X = R$ و نگاشت $F$ را از $R \times R$ به $R$ با ضابطه $F(x,y) = ۵x - y^۲$ تعریف کنیم در این صورت از دو معادله $F(x,y) = ۵x - y^۲ = x$ و $F(y,x) = ۵y - x^۲ = y$ دو معادله $y = -x - ۴$ یا $x = y$ را خواهیم داشت و این یعنی $(x+۲)^۲ = -۱۲$ یا $۵x - x^۲ = x$ که معادله اول جواب ندارد و از معادله دوم داریم $x = ۰$ و $x = ۴$ و در نتیجه زوج های $(۰,۰)$ و $(۴,۴)$ برای تابع $F$ ثابت هستند.

**تعریف ۶.۲.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد و نگاشت $g$ از مجموعه $X$ به مجموعه $X$ تعریف شود ، نگاشت $F$ از مجموعه $X \times X$ به مجموعه $X$ را $g-$ یکنوای مرکب گوییم هرگاه $F$ ، $g$ – غیرنزولی نسبت به مولفه اول و $g$ – غیرصعودی نسبت به مولفه دوم باشد.به عبارت دیگر برای هر $x$ و $y$ و $x_۱$ و $x_۲$ و $y_۱$ و $y_۲$ در $X$ داشته باشیم :

( الف ) اگر نامساوی $g(x_۱) \leq g(x_۲)$ برقرار باشد آنگاه ، $F(x_۱,y) \leq F(x_۲,y)$ باشد .

( ب ) اگر نامساوی $g(y_۱) \leq g(y_۲)$ برقرار باشد آنگاه ، $F(x,y_۱) \geq F(x,y_۲)$ باشد.

توجه: اگر $g$ نگاشت همانی باشد این تعریف و تعریف یکنوائی مرکب یکی می باشند.

**مثال ۷.۲.۱** فرض کنیم $X = R$ و نگاشت $F$ را از $R \times R$ به $R$ با ضابطه $F(x,y) = ۵x - y^۳$ و نگاشت $g$ را از مجموعه $R$ به مجموعه $R$ با ضابطه $g(x) = x^۳$ تعریف کنیم ، در این صورت برای هر $x$ و $y$ و $x_۱$ و $x_۲$ و $y_۱$ و $y_۲$ در $X$ خواهیم داشت :

( الف ) اگر نامساوی $g(x_۱) \leq g(x_۲)$ برقرار باشد آنگاه ، داریم $(x_۱)^۳ \leq (x_۲)^۳$ و این یعنی $x_۱ \leq x_۲$ و در نتیجه $۵x_۱ - y^۳ \leq ۵x_۲ - y^۳$ پس $f(x_۱,y) \leq f(x_۲,y)$.

( ب ) اگر نامساوی $g(y_۱) \leq g(y_۲)$ برقرار باشد آنگاه ، داریم $(y_۱)^۳ \leq (y_۲)^۳$ و این یعنی

$-(y_۱)^۳ \geq -(y_۲)^۳$ و در نتیجه $۵x-(y_۱)^۳ \geq ۵x-(y_۲)^۳$ پس $f(x,y_۱) \geq f(x,y_۲)$ .

بنابراین از (الف ) و ( ب ) نتیجه می شود $F$ یک نگاشت $g-$ یکنوا است .

**تعریف ۸.۲.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد و نگاشت $g$ از مجموعه $X$ به مجموعه $X$ تعریف شود ، یک عنصر $(x,y)$ در مجموعه $X \times X$ را $g-$ نقطه انطباقی برای نگاشت $F$ ، از مجموعه $X \times X$ به مجموعه $X$ ، گوییم هر گاه داشته باشیم :

$$F(x,y)=g(x) \text{ و } F(y,x)=g(y)$$

توجه: این تعریف تعمیم تعریف زوج ثابت است . در واقع اگر $g$ نگاشت همانی باشد این تعریف و تعریف زوج ثابت یکی هستند .

**مثال ۹.۲.۱** فرض کنیم $X=R$ و نگاشت $F$ را از $R \times R$ به $R$ با ضابطه $F(x,y)=x^۳-۲y$ و نگاشت $g$ را از مجموعه $X$ به مجموعه $X$ با ضابطه $g(x)=x^۳-۴$ تعریف کنیم دراین صورت از تساوی های $F(y,x)=g(y)$ و $F(x,y)=g(x)$ داریم $x^۳-۲y=x^۳-۴$ و $y^۳-۲x=y^۳-۴$ و در نتیجه خواهیم داشت $x=۲$ و $y=۲$ ، پس زوج $(۲,۲)$ یک $g-$ نقطه انطباقی است.

**تعریف ۱۰.۲.۱** فرض کنیم $X$ مجموعه ای غیر تهی و مرتب جزیی و نگاشت $F$ از مجموعه $X \times X$ به مجموعه $X$ ، و نگاشت $g$ از مجموعه $X$ به مجموعه $X$ ، تعریف شوند ، گوییم $F$ و $g$ تعویض پذیرند اگر برای هر $x$ و $y$ در $X$ داشته باشیم :

$$g(F(x,y))=F(g(x),g(y))$$

**مثال ۱۱.۲.۱** فرض کنیم $X=R$ و نگاشت $F$ را از $R \times R$ به $R$ با ضابطه $F(x,y)=۵x-۲y$ و نگاشت $g$ را از مجموعه $R$ به مجموعه $R$ با ضابطه $g(x)=۳x$ تعریف کنیم ، آنگاه خواهیم داشت :

$$g(F(x,y))=g(۵x-۲y)=۳(۵x-۲y)=۱۵x-۶y$$

و همچنین داریم:

$$F(g(x), g(y)) = ۵g(x) - ۲g(y) = ۵(۳x) - ۲(۳y) = ۱۵x - ۶y$$

بنابراین $F(g(x), g(y)) = g(F(x, y))$ لذا $g$ و $F$ تعویض پذیرند .

**تعریف ۱۲.۲.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه مرتب جزیی و $(X, d)$ یک فضای متریک مرتب و نگاشت $F$ از مجموعه $X \times X$ به مجموعه $X$ تعریف شده است ، گوییم $F$ یک نگاشت میرکیلر [۱] است هرگاه ، برای هر $x$ و $y$ و $u$ و $v$ در مجموعه $X$ که $v \leq y$ و $u \geq x$ و هر $\epsilon$ مثبت ، یک $\delta(\epsilon)$ مثبت وجود داشته باشد که از نامساوی $\epsilon \leq \frac{1}{2}[d(x,u) + d(y,v)] < \epsilon + \delta(\epsilon)$ نتیجه بگیریم نامساوی $d(F(x,y), F(u,v)) < \epsilon$ برقرار است .

**مثال ۱۳.۲.۱** فرض کنیم نگاشت $F$ از مجموعه $X \times X$ به مجموعه $X$ با ضابطه $F(x, y) = c$ (تابع ثابت ) تعریف شود . در این صورت برای هر $\epsilon$ مثبت وجود دارد $\delta(\epsilon)$ مثبت که از $\epsilon \leq \frac{1}{2}[d(x,u) + d(y,v)] < \epsilon + \delta(\epsilon)$ داشته باشیم $d(F(x,y), F(u,v)) < \epsilon$ زیرا داریم $d(c,c) < \epsilon$ ، پس کافی است $\delta(\epsilon) > 0$ انتخاب شود .

**تعریف ۱۴.۲.۱** فرض کنیم $X$ یک مجموعه مرتب جزیی و $(X, d)$ یک فضای متریک باشد رابطه ترتیب را روی $X \times X$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

برای هر $(x, y)$ و $(u, v)$ در مجموعه $X \times X$ ، $(u, v) \leq (x, y)$ است اگر و فقط اگر $u \geq x$ و $v \leq y$ باشد.

توجه می کنیم که رابطه فوق یک ترتیب جزیی است زیرا ، $(x, y) \leq (x, y)$ است اگر و فقط اگر $x \geq x$ و $y \leq y$ باشد .

$(u, v) \leq (x, y)$ است اگر و فقط اگر $u \geq x$ و $v \leq y$ و $(x, y) \leq (z, t)$ است اگر و فقط

[۱] Meir-keeler

اگر $y \geq t$ و $x \leq z$ باشد. بنابراین داریم ، $v \geq t$ و $u \leq z$ و این یعنی ، $(u,v) \leq (z,t)$ .

همچنین $(u,v) \leq (x,y)$ است اگر و فقط اگر $x \geq u$ و $y \leq v$ و $(u,v) \geq (x,y)$ است اگر و فقط اگر $x \leq u$ و $y \geq v$ بنابراین داریم $x = u$ و $v = y$ ، در نتیجه $(x,y) = (u,v)$ ، یعنی ترتیب مذکور جزیی است .

**تعریف ۱۵.۲.۱** فرض کنیم $(x,y)$ و $(u,v)$ دو عنصر در $R^2$ باشند عنصر $(z,t)$ را که در آن $z = Min\{x,u\}$ و $t = Min\{v,y\}$ است کران پایین و عنصر $(z,t)$ را که در آن $z = Max\{x,u\}$ و $t = Max\{v,y\}$ است کران بالای عناصر $(x,y)$ و $(u,v)$ گویند.

**تعریف ۱۶.۲.۱** فضای متریک $(X,d)$ را در نظر می گیریم برای هر $(x,y)$ و $(u,v)$ در $X \times X$ متر $d_\circ$ را به صورت $d_\circ((x,y),(u,v)) = d(x,u) + d(y,v)$ تعریف می‌کنیم .

**مثال ۱۷.۲.۱** اگر $d(x,y) = |x-y|$ یک متر روی $R$ باشد در این صورت ، $d_\circ((x,y),(u,v)) = |x-u| + |y-v|$ ، یک متر روی $R^2$ است . زیرا:

الف ) برای هر $(x,y)$ و $(u,v)$ در $R^2$ با توجه به تعریف قدر مطلق $d_\circ((x,y),(u,v))$ بزرگتر یا مساوی صفر است .

ب ) برای هر $(x,y)$ و $(u,v)$ در $R^2$ داریم ، $d_\circ((x,y),(u,v)) = d_\circ((u,v),(x,y))$ .

ج ) برای هر $(x,y)$ و $(u,v)$ در $R^2$ ، $(x,y) = (u,v)$ است اگر و فقط اگر $d_\circ((x,y),(u,v)) = \circ$ باشد.

د ) برای هر $(x,y)$ و $(u,v)$ و $(z,t)$ در $R^2$ داریم :

$$d_\circ((x,y),(u,v)) = |x-u| + |y-v| \leq |x-z| + |z-u| + |y-t| + |t-v| =$$

$$|x-z| + |y-t| + |z-u| + |t-v| = d_\circ((x,y),(z,t)) + d_\circ((z,t),(u,v))$$

پس ویژگی های متر بر قرار است و $d_\circ$ با تعریف فوق یک متر است .

فصل ۲

# قضایای وجود نقاط ثابت انقباض های غیر خطی در فضاهای متریک غیر خطی و نتایج آنها

## ۱.۲ قضایای وجود نقاط ثابت برای انقباض های غیر خطی

**قضیه ۱.۱.۲** فرض کنیم $X$ مجموعه مرتب جزیی و $(X,d)$ یک فضای متریک کامل باشد و نگاشت $F$ از مجموعه $X\times X$ به مجموعه $X$ نگاشتی پیوسته و روی $X$ یکنوای مرکب باشد و $k$ در$[\circ,۱)$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $x\geq u$ و هر $y\leq v$ درمجموعه $X$ داشته باشیم :

$$d(F(x,y),F(u,v))\leq \frac{k}{۲}\,[d(x,u)+d(y,v)]$$

حال اگر $x_\circ$ و $y_\circ$ در $X$ وجود داشته باشد که نامساوی های $y_\circ\geq F(y_\circ,x_\circ)$ و $x_\circ\leq F(x_\circ,y_\circ)$ برقرار باشد ، آنگاه $x$ و $y$ در $X$ وجود دارند که :

$$x=F(x,y) \;\; \text{و} \;\; y=F(y,x)$$

**اثبات** فرض کنیم ، $F(x_\circ,y_\circ)=x_۱$ و $F(y_\circ,x_\circ)=y_۱$ ، از فرض قضیه داریم $y_\circ\geq y_۱$ و $x_\circ\leq x_۱$ و قرار می دهیم ، $y_۲=F(y_۱,x_۱)$ و $x_۲=F(x_۱,y_۱)$ و تعریف می کنیم :

$$F^۲(x_\circ,y_\circ)=F(F(x_\circ,y_\circ),F(y_\circ,x_\circ))=F(x_۱,y_۱)=x_۲$$

$$F^۲(y_\circ,x_\circ)=F(F(y_\circ,x_\circ),F(x_\circ,y_\circ))=F(y_۱,x_۱)=y_۲$$

با توجه به تعریف بالا و خاصیت یکنوایی مرکب $F$ داریم:

$$x_۲=F^۲(x_\circ,y_\circ)=F(x_۱,y_۱)\geq F(x_\circ,y_\circ)=x_۱$$

$$y_۲=F^۲(y_\circ,x_\circ)=F(y_۱,x_۱)\leq F(y_\circ,x_\circ)=y_۱$$

و برای $n=۱,۲,۳,\ldots$ قرار می دهیم :

$$x_{n+۱}=F^{n+۱}(x_\circ,y_\circ)=F(F^n(x_\circ,y_\circ),F^n(y_\circ,x_\circ))$$

$$y_{n+۱}=F^{n+۱}(y_\circ,x_\circ)=F(F^n(y_\circ,x_\circ),F^n(x_\circ,y_\circ))$$

داریم: