دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

**وزارت علوم، تحقیقات و فناوری**
**دانشگاه شهید مدنی آذربایجان**
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

**پایان نامه**
**جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد**
رشته ریاضی کاربردی

# همگرایی چندجمله‌ای الگوریتم‌های پیشگو-تصحیح نوع میرترا مرتبه دوم روی مخروط‌های متقارن

پژوهشگر
**هانیه مرغدار سردرودی**

استاد راهنما
**دکتر بهروز خیرفام**

مهر ۱۳۹۲
تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

چشمه‌های جوشان محبت
جلوه‌های مهر و عطوفت الهی
لبخندهای پر مهر زندگیم

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که در تمام مراحل زندگی، به من راه و رسم درست زیستن را آموختند.

# ای خدا

ای خدا ای فضل تو حاجت روا
با تو یاد هیچ کس نبود روا

این همه ارشاد تو بخشیده‌ای
تا بدین بس عیب ما پوشیده‌ای

قطره علمی که بخشیدی ز پیش
متصل گردان به دریاهای خویش

قطره علم است اندر جان من
وارهانش از هوا وز خاک تن

یاد ده ما را سخن‌های دقیق
که تو را رحم آورد آن ای رفیق

این دعا از تو اجابت هم ز توست
ایمنی از تو مهابت هم ز توست

گر خطا گفتیم اصلاحش تو کن
مصلحی تو ای خداوند سخن

کیمیا داری که تبدیلش کنی
گرچه جوی خون بود نیلش کنی

ای که خاک شوره را تو نان کنی
وی که نان مرده را تو جان کنی

ای که جان خیره را رهبر کنی
وی که بی ره را تو پیغمبر کنی

می کنی جزو زمین را آسمان
می فزایی در زمین از اختران

ای مبدل کرده خاکی را به زر
خاک دیگر را بکرده بوالبشر

کار تو تبدیل اعیان و عطا
کار من سهوست و نسیان و خطا

سهو و نسیان را مبدل کن به علم
من همه خلمم مرا کن صبر و حلم

// سپاس گزاری...

راز و رمز پویای علم و کشف معانی بدیع و تجلی جلوه‌های شهودی معرفت، کیمیایی است که آسمان علم به برکت سیما و سیره‌ی نبی مکرم اسلام، انسان در بند خاک را به معراج حضور می‌خواند. و چه خرم علمی که از چشمه‌ی معارف سیراب شود و چه زیبا دانشی که قبای پرنیانش به عطر و بوی گلستان محمدی معطر شود و چه معماری باشکوهی، بنایی که سنگ هویت و فرهنگ آن ریشه در مدینة النبی بیابد. و امروز کاخ آباد علم به سروش معنوی و مفهوم پیام او بیش از پیش محتاج راهنمایانی است که علاوه بر حفظ آبادانی آن در راه اعتلای آن به فرزندان خویش محبت نمایند.

در ابتدا صمیمانه‌ترین تقدیرها تقدیم به خانواده عزیز و مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده‌اند و پیمودن روزهای سخت و آسان زندگی‌ام بدون دعای خیر و برکت وجودشان غیرممکن بود.

همچنین وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌شائبه‌ی استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر بهروز خیرفام، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر جعفر پورمحمود و جناب آقای دکتر بهروز علیزاده که زحمت داوری این رساله را تقبل فرمودند بسیار سپاس‌گزارم. از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پژوهش از راهنمایی و یاری‌شان بهره‌مند گشته‌ام، تشکر و قدردانی می‌کنم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی می‌نمایم.

هانیه مرغدار سردرودی

مهر ماه ۱۳۹۲

# فهرست مطالب

# چکیده

در این پایان‌نامه نوعی الگوریتم پیشگو-تصحیح مهروترا که توسط صلاحی و مهدوی امیری [۱۶] برای برنامه‌ریزی خطی ارائه شده است، به مخروط‌های متقارن تعمیم داده می‌شود. این الگوریتم شامل یک حفاظ در الگوریتم اصلی مهروترا است که تکرارها را در همسایگی تعیین‌شده نگه می‌دارد و اجازه می‌دهد اندازه گام به قدر کافی بزرگ انتخاب شود. در این الگوریتم زمانی که گام مقیاسی آفین به طور ضعیف رفتار می‌کند، استفاده از شیوه حفاظ ضروری نیست و این با الگوریتم صلاحی و مهدوی امیری متفاوت است. در این پایان‌نامه اندازه گام بیشینه در گام مقیاسی آفین اندکی بهبود یافته و با استفاده از جبرهای جردن اقلیدسی به مخروط‌های متقارن تعمیم داده می‌شود. براساس جهت نسترو-تاد، نشان داده می‌شود که پیچیدگی تکرار الگوریتم پیشنهاد شده $\mathcal{O}(r \log \varepsilon^{-1})$ است که $r$ رتبه جبر جردن اقلیدسی متناظر و $\varepsilon > 0$ دقت مورد نیاز است.

**کلید واژه‌ها:** مخروط متقارن، جبر جردن اقلیدسی، روش‌های نقطه درونی، روش‌های مرتبه دوم، الگوریتم مهروترا، پیچیدگی چندجمله‌ای

# پیشگفتار

مسأله برنامه‌ریزی خطی روی مخروط $\mathcal{K}$ یا به طور ساده مسأله $\mathcal{K} - LP$، مینیمم کردن تابع خطی روی اشتراک فضای آفین و مخروط $\mathcal{K}$ است. در اینجا $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ یک مخروط محدب، رأس‌دار، بسته، درون ناتهی با رأس در مبدأ است. در این پایان‌نامه روش‌های نقطه درونی اولیه-دوگان، در حالت خاصی که $\mathcal{K}$ مخروط متقارن (خود دوگان و در درونش همگن ) است، بررسی می‌شود. مخروط‌های متقارن رابطه نزدیکی با جبرهای جردن اقلیدسی دارند و این جبرها ابزار اساسی برای تجزیه و تحلیل الگوریتم فراهم می‌کنند.

مطالعات وسیعی در مورد تحلیل IPMs برای مسائل $\mathcal{K} - LP$ وجود دارد. مبنای حل این مسائل با استفاده از IPMs توسط نسترو[۱] و نمیروسکی[۲] مطرح شد [۱۱]. این روش‌ها در ابتدا تنها بر اساس مسائل اولیه یا دوگان بودند. بعدها نسترو و تاد[۳] الگوریتم‌های نقطه درونی اولیه-دوگان متقارن را روی رده خاصی از مخروط‌ها معرفی کردند که مخروط‌های خودمقیاس نامیده می‌شدند [۱۳، ۱۲]. گولر[۴] مشاهده کرد که مخروط‌های خودمقیاس دقیقاً همان مخروط‌های متقارن‌اند [۶]. بنابراین الگوریتم نسترو-تاد (NT) اولین روش نقطه درونی اولیه-دوگان برای بهینه‌سازی روی مخروط‌های متقارن بود. پس از آن فیبوسویچ[۵] چندین IPMs را روی مخروط‌های متقارن توصیف شده توسط جبرهای جردن اقلیدسی، تجزیه و تحلیل کرد [۳، ۲]. مخروط $\mathbb{R}^n_+$، مخروط ماتریس‌های نیمه معین‌مثبت و مخروط‌های

[۱] Nesterov

[۲] Nemirovski

[۳] Todd

[۴] Güler

[۵] Faybusovich

مرتبه دوم موارد مهمی از مخروط‌های متقارن هستند. بنابراین مسائل برنامه‌ریزی خطی(LP)، برنامه‌ریزی نیمه معین(SDP) و برنامه‌ریزی مخروط مرتبه دوم(SOCP) حالت‌های خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی روی مخروط متقارن (LP– مخروط متقارن ) هستند. مانتیرو[۶] و ژانگ[۷] تحلیل یکپارچه‌ای از الگوریتم‌های تعقیب مسیر اولیه-دوگان برای SDP مبنی بر رده جابجایی‌پذیر از جهت‌های جستجو، ارائه کردند [۱۰]. تسوچیا[۸] [۲۰، ۱۹] شیوه جبری جردن را برای بسط روش‌های مانتیرو و ژانگ در مسائل SOCP به کار برد. اسکمیتا[۹] و علیزاده تحلیل مانتیرو و ژانگ را به مسائل LP – مخروط متقارن، توسعه دادند [۱۸]. آنها نتایج پیچیدگی تکرار چندجمله‌ای را برای نوع دیگری از الگوریتم‌های تعقیب مسیر گام کوتاه، نیمه بلند و بلند، مبنی بر رده جابجایی‌پذیر از جهت‌های جستجو، نتیجه گرفتند.

دسته‌ای از روش‌های تعقیب مسیر، الگوریتم‌های پیشگو-تصحیح هستند که از میان آن‌ها الگوریتم پیشگو-تصحیح مهروترا [۱۰] [۹] به دلیل کارایی عملی بالا، اساس بسته‌های نرم‌افزاری IPMs است. ابتدا ژانگ و ژانگ[۱۱] اصل همگرایی و کران‌های پیچیدگی را برای دو الگوریتم مرتبه دوم مهروترا بدون استفاده از بهنگام‌سازی پارامتر مرکزی (که برای کارایی عملی مورد نیاز بود) ثابت کردند [۲۳]. بعدها صلاحی و مهدوی امیری نوع جدیدی از الگوریتم پیشگو-تصحیح مهروترا مرتبه‌ی دوم را پیشنهاد کردند [۱۶]. این الگوریتم شامل یک حفاظ است که تکرارها را در همسایگی تعیین شده نگه می‌دارد و اجازه می‌دهد اندازه‌گام به قدر کافی بزرگ گرفته شود. این شیوه حفاظ همچنین زمانی که گام مقیاسی آفین به طور ضعیف رفتار می‌کند، برای تضمین پیچیدگی تکرار چندجمله‌ای، استفاده می‌شود. در سال‌های اخیر لیو[۱۲]و همکارانش الگوریتم پیشگو-تصحیح مهروترا مرتبه دوم ارائه شده توسط صلاحی و مهدوی امیری را به مسائل $\mathcal{K} - LP$ تعمیم دادند و اندازه گام بیشینه در

---

[۶] Monteiro

[۷] Y. Zhang

[۸] Tsuchiya

[۹] Schmieta

[۱۰] Mehrotra

[۱۱] D. Zhang

[۱۲] C. Liu, H. Liu, X. Liu

گام پیشگو را اندکی اصلاح کردند [۷]. در الگوریتم جدید استفاده از شیوه حفاظ زمانی که گام مقیاسی آفین به طور ضعیف رفتار می‌کند، ضروری نیست و این با الگوریتم‌های [۱۶، ۱۷] متفاوت است. آن‌ها همچنین همگرایی چندجمله‌ای الگوریتم پیشگو-تصحیح مهروترا مرتبه دوم را با بهنگام‌سازی انطباقی پارامتر مرکزی روی مخروط‌های متقارن، بررسی کردند. برای حالت شدنی، ثابت شده که الگوریتم جدید بعد از حداکثر $\mathcal{O}(r \log \varepsilon^{-1})$ تکرار بر اساس جهت NT متوقف می‌شود که $r$ رتبه جبر جردن است.

این پایان‌نامه در سه فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

در فصل اول نظریه جبرهای جردن اقلیدسی و مخروط‌های متقارن بیان شده است. در فصل دوم پایه‌ای از روش‌های نقطه درونی برای الگوریتم مهروترا مرتبه دوم خلاصه می‌شود. در فصل سوم با استفاده از نظریه جبرهای جردن اقلیدسی، ابتدا چند لم تکنیکی اثبات و سپس همگرایی چندجمله‌ای الگوریتم بر اساس جهت NT نتیجه می‌شود.

# فصل ۱

# جبرهای جردن اقلیدسی و مخروط‌های متقارن

در این فصل جبرهای جردن اقلیدسی و مخروط‌های متقارن با ویژگی‌های اساسی‌شان معرفی می‌شوند. این فصل در شش بخش جبرهای جردن و چندجمله‌ای مشخصه آن‌ها، جبرهای جردن اقلیدسی، نمایش مرتبه دوم، مخروط متقارن و لم‌ها و گزاره‌هایی که در تحلیل الگوریتم‌های مهروترا به کار خواهند رفت، تنظیم شده است. در هر بخش مثال‌هایی از [۱۸] نیز ارائه شده است.

## ۱.۱ جبرهای جردن

**تعریف ۱.۱.** فرض کنید $\mathcal{J}$ یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. نگاشت $h : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ نگاشت دوخطی نامیده می‌شود اگر

i) $h(\alpha u + \beta v, w) = \alpha h(u, w) + \beta h(v, w), \qquad \forall u, v, w \in \mathcal{J}, \quad \forall \alpha, \beta \in F$

ii) $h(w, \alpha u + \beta v) = \alpha h(w, u) + \beta h(w, v)$

**تعریف ۲.۱.** فرض کنیم $h$ فرم دوخطی روی فضای برداری $\mathcal{J}$ باشد. گوییم $h$ متقارن است

هرگاه برای هر $x, y \in \mathcal{J}$

$$h(x,y) = h(y,x)$$

اگر $h$ فرم دوخطی متقارنی باشد، فرم درجه دوم وابسته به $h$ عبارت است از

$$q(x) = h(x,x)$$

یک ضرب داخلی روی $\mathcal{J}$ فرم دوخطی متقارنی چون $h$ روی $\mathcal{J}$ است که در شرط

$$h(x,x) > 0, \qquad x \neq 0$$

صدق می‌کند. هر فرم دوخطی که در این رابطه صدق کند، معین مثبت نامیده می‌شود. پس هر ضرب داخلی روی یک فضای برداری حقیقی، یک فرم دوخطی متقارن معین مثبت روی آن فضاست.

**تعریف ۳.۱.** اگر نگاشت دوخطی $(x,y) \mapsto x \circ y$ از $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ به توی $\mathcal{J}$ وجود داشته باشد، آنگاه $(\mathcal{J}, \circ)$ یک جبر($\mathbb{R}$ ـ جبر) است و عملگر«$\circ$» ضرب این $\mathbb{R}$ ـ جبر می‌باشد.
اگر ضرب«$\circ$» شرکت پذیر باشد، یعنی برای هر $x, y, z \in \mathcal{J}$ ، $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$، آنگاه $(\mathcal{J}, \circ)$ یک جبر شرکت پذیر نامیده می‌شود.
یک جبر شرکت‌پذیر توانی گفته می‌شود اگر زیر جبر تولید شده توسط هر عنصر آن شرکت‌پذیر باشد. هر جبر شرکت‌پذیر به طور واضح شرکت‌پذیر توانی است.
جبر $(\mathcal{J}, \circ)$ دارای ویژگی جابجایی است اگر برای هر $x, y \in \mathcal{J}$ داشته باشیم $x \circ y = y \circ x$.
اگر عنصر $e \in \mathcal{J}$ (منحصر به فرد) وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathcal{J}$

$$x \circ e = e \circ x = x$$

آنگاه $e$ عنصر همانی $\mathcal{J}$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۴.۱.** جبر$(\mathcal{J}, \circ)$ یک جبر جردن نامیده می‌شود اگر

i) $x \circ y = y \circ x$

ii) $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{J}$

که در آن $x^2 = x \circ x$.

در حالت کلی جبرجردن شرکت‌پذیر نیست اما همواره جابجایی‌پذیر است.
چون ضرب «$\circ$» دوخطی است، برای هر $x \in \mathcal{J}$ عملگر خطی $L(x)$ روی $\mathcal{J}$ وجود دارد به طوری که برای هر $y \in \mathcal{J}$، $x \circ y = L(x)y$. بویژه، $L(x)e = x$ و $L(x)x = x^2$.
شرط (ii) در تعریف بالا معادل است با:

$$L(x)L(x^2) = L(x^2)L(x)$$

یعنی برای هر $x$، درون‌ریختی‌های $L(x)$ و $L(x^2)$ جابجایی‌اند. همچنین واضح است اگر $\mathcal{J}$ شرکت‌پذیر باشد، آنگاه $L(x^2) = L^2(x)$ است.
با استفاده از نمادگذاری $[S, T] = ST - TS$ که $S$ و $T$ دو درون‌ریختی فضای برداری $\mathcal{J}$ هستند، ویژگی (ii) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$[L(x), L(x^2)] = 0 \qquad (۱.۱)$$

**گزاره ۵.۱.** *(گزاره ۲.۳ .II در [۱]) اگر $L(x)$ وارون‌پذیر باشد، آنگاه $x$ وارون‌پذیر است و* $x^{-1} = L(x)^{-1}e$.

از گزاره زیر در اثبات شرکت‌پذیر توانی بودن یک جبر جردن، استفاده می‌کنیم.

**گزاره ۶.۱.** *(گزاره ۱.۱ .II در [۱]) فرض کنید $\mathcal{J}$ یک جبر جردن باشد. آنگاه*

$$L(x^2 \circ y) - L(x^2)L(y) = 2\big(L(x \circ y) - L(x)L(y)\big)L(x)$$

***برهان.*** با مشتق‌گیری از رابطه (۱.۱) در جهت $z$ داریم:

$$D_z[L(x), L(x^2)] = 0$$

بنابراین

$$[L(z), L(x^2)] + 2[L(x), L(z \circ x)] = 0$$

با اعمال یک عنصر $y$ به هر دو طرف این رابطه، نتیجه زیر برای هر $x$، $y$ و $z$ حاصل می‌شود

$$L(z)(x^2 \circ y) - L(x^2)(z \circ y) = 2L(z \circ x)(x \circ y) - 2L(x)\big((z \circ x) \circ y\big)$$

با استفاده از خاصیت جابجایی نتیجه می‌شود

$$L(x^2 \circ y)z - L(x^2)L(y)z = 2L(x \circ y)L(x)z - 2L(x)L(y)L(x)z$$

این رابطه را با حذف $z$ می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$L(x^2 \circ y) - L(x^2)L(y) = 2\big(L(x \circ y) - L(x)L(y)\big)L(x)$$

□

**گزاره ۷.۱.** *(گزاره ۲. ۱. II در [۱]) هر جبر جردن $\mathcal{J}$ شرکت‌پذیر توانی است، یعنی برای هر $x$ از $\mathcal{J}$ و اعداد صحیح مثبت $p$ و $q$*

$$[L(x^p), L(x^q)] = 0 \tag{۲.۱}$$

***برهان.*** الف. ابتدا با استقرا روی $p$ اثبات می‌کنیم $x^2 \circ x^p = x^{p+2}$. فرض کنید $x^{p+1} = x^2 \circ x^{p-1}$، در این صورت

$$x^{p+2} = x \circ x^{p+1} = x \circ (x^2 \circ x^{p-1}).$$

با استفاده از ویژگی (ii) جبر جردن به دست می‌آید

$$x^{p+2} = x^2 \circ (x \circ x^{p-1}) = x^2 \circ x^p$$

ب. اگر گزاره ۶.۱ را با $y = x^{n-1}$ بنویسیم، آنگاه داریم

$$L(x^{n+1}) = L(x^2)L(x^{n-1}) + 2L(x^n)L(x) - L(x)L(x^{n-1})L(x)$$

این رابطه ثابت می‌کند که برای هر $n$، $L(x^n)$ متعلق به زیر جبر تولید شده توسط $L(x)$ و $L(x^2)$ است که بنا به ویژگی (ii) جابجایی‌پذیراند، بنابراین $L(x^n)$ نیز با $L(x)$ جابجایی‌پذیر است.

ج. نهایتاً با استقرا روی $q$ ثابت می‌کنیم $x^p \circ x^q = x^{p+q}$ است. فرض کنید $x^p \circ x^q = x^{p+q}$، در این صورت

$$x^{p+q+1} = x^{p+q} \circ x = (x^p \circ x^q) \circ x = L(x)L(x^p)x^q$$

بنابراین از قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم

$$x^{p+q+1} = L(x^p)L(x)x^q = x^p \circ x^{q+1}.$$

□

## ۲.۱ جبر جردن اقلیدسی

**تعریف ۸.۱.** جبر جردن $(\mathcal{J}, \circ)$ را اقلیدسی گویند اگر فرم درجه دوم متقارن معین مثبت $Q$ روی $\mathcal{J}$ وجود داشته باشد که

$$Q(x \circ y, z) = Q(x, y \circ z)$$

**مثال ۱.۱.** (جبرهای جردن $(S_n, \circ), (M_n, \circ)$) *مجموعه $M_n$ از ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ با ضرب $X \circ Y := (XY + YX)/2$، یک جبر جردن می‌سازد. اما این جبر جردن، اقلیدسی نیست. زیرفضای $S_n$ از ماتریس‌های متقارن حقیقی تحت عملگر «$\circ$» یک زیر جبر جردن $(M_n, \circ)$ است. $(S_n, \circ)$ با تعریف عملگر اثر به صورت $Q(x, y) = tr(x \circ y) = tr(xy)$*

*اقلیدسی است، زیرا عملگر اثر شرکت‌پذیر بوده و $tr(x \circ y) = tr(y \circ x)$ و نیز برای هر $x \neq 0$، $tr(x \circ x) > 0$، یعنی عملگر اثر معین مثبت است.*

**مثال ۲.۱.** (جبر فرم‌های درجه دوم $(\varepsilon_{n+1}, \circ)$) *فرض کنید $\varepsilon_{n+1}$ فضای برداری حقیقی $(n+1)$-بعدی باشد که مؤلفه‌های $x$ از صفر اندیس‌گذاری شده‌اند. با تعریف ضرب*

$$x \circ y := \begin{pmatrix} x^T y \\ x_0 y_1 + y_0 x_1 \\ \vdots \\ x_0 y_n + y_0 x_n \end{pmatrix}$$

*به آسانی می‌توان بررسی کرد که $(\varepsilon_{n+1}, \circ)$ یک جبر جردن است. به علاوه فرم $Q(x, y) := 2x^T y$ شرکت‌پذیر و معین مثبت می‌باشد. در نتیجه $(\varepsilon_{n+1}, \circ)$ اقلیدسی است.*

# ۳.۱ چندجمله‌ای مشخصه یک جبر جردن

چون جبرهای جردن شرکت‌پذیر توانی‌اند می‌توان مفاهیم رتبه، چندجمله‌ای‌های مینیمم و مشخصه، مقادیر ویژه، اثر و دترمینان را برای آن‌ها به صورت زیر تعریف کرد.
برای هر $x \in \mathcal{J}$ درجه $x$، کوچکترین عدد صحیح مثبت $k$ است که بردارهای $e, x, \ldots, x^k$ وابسته خطی‌اند و با $m(x)$ نشان می‌دهند که با $\dim \mathcal{J} = n$ کراندار شده است. رتبه $\mathcal{J}$ را به صورت $r = \operatorname{rank}(\mathcal{J}) = \max\{m(x) : x \in \mathcal{J}\}$ تعریف می‌کنند.
یک عنصر $x$ را منظم گویند اگر $r = m(x)$ باشد.

با استفاده از گزاره زیر می‌توان چندجمله‌ای مشخصه را برای هر $x \in \mathcal{J}$ تعیین کرد.

**گزاره ۹.۱.** (گزاره ۱ .II.۲ در[ ۱]) *مجموعه عناصر منظم در $\mathcal{J}$ باز و چگال است. همچنین چندجمله‌ای‌های $p_1, p_2, \ldots, p_r$ در $\mathcal{J}$ وجود دارند به طوری که چندجمله‌ای مینیمال هر عنصر منظم $x$ به صورت زیر مشخص می‌شود*

$$p(\lambda) = \lambda^r - p_1(x)\lambda^{r-1} + p_2(x)\lambda^{r-2} + \ldots + (-1)^r p_r(x)$$

*که $p_i$ها چندجمله‌ای‌های همگن منحصر به فرد از درجه $i$ ($p_i(\lambda x) = \lambda^i p_i(x),\ \lambda > 0$) و از $\mathcal{J}$ به $\mathbb{R}$ هستند.*

برای عنصر $x$ از درجه $k$ در جبر جردن $\mathcal{J}$ با رتبه $r$، چون مجموعه $\{e, x, x^2, \ldots, x^k\}$ وابسته خطی است، بنابراین

$$x^k - p_1(x)x^{k-1} + \ldots + (-1)^k p_k(x)e = 0$$

اگر $x$ عنصر منظم جبر باشد، آنگاه چندجمله‌ای مشخصه آن را برابر با چندجمله‌ای مینیمم آن تعریف می‌کنند. همچنین چون مجموعه عناصر منظم در $\mathcal{J}$ چگال است، چندجمله‌ای‌های مشخصه را می‌توان به طور پیوسته به همه اعضای $x$ از $\mathcal{J}$ تعمیم داد. بنابراین چندجمله‌ای مشخصه، چندجمله‌ای از درجه $r$ در $\lambda$ است.
ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $x$، مقادیر ویژه $x$ هستند.

**تعریف ۱۰.۱.** فرض کنید $x \in \mathcal{J}$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $p(\lambda)$ باشند

$$p(\lambda) = \lambda^r - p_1(x)\lambda^{r-1} + \ldots + (-1)^r p_r(x)$$

۱. $tr(x) := \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = p_1(x)$، اثر $x$ در $\mathcal{J}$ است که تابعی خطی است.

۲. $\det(x) := \lambda_1 \ldots \lambda_r = p_r(x)$، دترمینان $x$ در $\mathcal{J}$ است.

**مثال ۳.۱.** (*چندجمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه، اثر و دترمینان در* $(S_n, \circ)$) *این مفاهیم در فضای ماتریس‌های متقارن، مفاهیم آشنایی هستند.* $m(x)$ *تعداد مقادیر ویژه متمایز* $x$

*است و بنابراین برای یک ماتریس متقارن $n \times n$ حداکثر می‌تواند $n$ باشد، به عبارت دیگر $\operatorname{rank}(S_n) = n$ است.*

**مثال ۴.۱.** (*چندجمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه، اثر و دترمینان در $(\varepsilon_{n+1}, \circ)$*) *هر بردار $x \in (\varepsilon_{n+1}, \circ)$ در معادله درجه دوم زیر صدق می‌کند*

$$x^2 - 2x_0x + (x_0^2 - \parallel \overline{x} \parallel^2)e = 0$$

*بنابراین $\operatorname{rank}(\varepsilon_{n+1}, \circ) = 2$ مستقل از فضای برداری است که در آن قرار دارد و هر عنصر $x$ دو مقدار ویژه $x_0 \pm \parallel \overline{x} \parallel$ دارد، بنابراین*

$$tr(x) = 2x_0 \quad \text{و} \quad \det(x) = x_0^2 - \parallel \overline{x} \parallel^2$$

*به جز مضارب عنصر همانی (که از درجه یک‌اند)، هر عنصر این جبر درجه ۲ دارد.*

## ۴.۱ مخروط متقارن

در این بخش با یادآوری چند تعریف، زمینه‌ای برای مشخصه جبری جردن مخروط‌های متقارن فراهم می‌کنیم.

**تعریف ۱۱.۱.** مجموعه $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ را یک مخروط نامند اگر برای هر $x \in \mathcal{K}$ و هر $\lambda > 0$، $\lambda x \in \mathcal{K}$ باشد. اگر علاوه بر این، به ازای هر $x, y \in \mathcal{J}$ و $\lambda, \mu > 0$ داشته باشیم $\lambda x + \mu y \in \mathcal{K}$، آنگاه $\mathcal{K}$ را مخروط محدب گویند.
یک مخروط محدب، رأس‌دار است اگر شامل بردار صفر باشد.

**تعریف ۱۲.۱.** مخروط دوگان مجموعه $\mathcal{K}$ در فضای برداری $\mathcal{J}$ مجهز به ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$، مجموعه $\mathcal{K}^* = \{y \in \mathcal{K} \,|\, \langle y, x \rangle \geq 0 \, \forall x \in \mathcal{K}\}$ است. $\mathcal{K}^*$ همواره یک مخروط محدب است حتی اگر مجموعه $\mathcal{K}$ نه مخروط و نه محدب باشد.

مخروط محدب $\mathcal{K}$ را خوددوگان گویند اگر $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}$.

**تعریف ۱.۱۳.** مجموعه $\mathcal{K}(\mathcal{J}) := \{x^2 : x \in \mathcal{J}\}$ را مخروط مجذورات جبر جردن اقلیدسی $\mathcal{J}$ می‌نامند.
اگر مجموعه عناصر وارون‌پذیر در $\mathcal{J}$ را با Inv نشان دهیم، مجموعه $\mathrm{int}(\mathcal{K}) = \{x^2 : x \in \mathrm{Inv}\}$ یک مخروط محدب باز است [۲].

**مثال ۱.۵.** *(مخروط مجذورات $(S_n, \circ)$) یک ماتریس متقارن، مجذور ماتریس متقارن دیگر است اگر و تنها اگر نیمه معین مثبت باشد. بنابراین مخروط مجذورات $(S_n, \circ)$، مخروط ماتریس‌های نیمه معین مثبت ($x \succeq 0$) است.*

**مثال ۱.۶.** *(مخروط مجذورات $(\varepsilon + 1, \circ)$) $\mathcal{K} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 \geq \| \overline{x} \|\}$ مخروط مجذورات $(\varepsilon_{n+1}, \circ)$ است که در آن $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ و $\| \cdot \|$ نرم اقلیدسی را نشان می‌دهد. $\mathcal{K}$ را مخروط لورنتز یا مخروط مرتبه دوم گویند.*

**تعریف ۱.۱۴.** نگاشت خطی وارون‌پذیر روی یک فضای برداری $\mathcal{J}$ را خودریختی گویند.

**تعریف ۱.۱۵.** یک گروه G، مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی با یک عمل دوتایی است که دو عضو گروه را با هم ترکیب می‌کند تا عضو سوم بدست آید. همچنین این مجموعه باید در چهار اصل گروه صدق کند:
۱) نسبت به عمل گروه بسته باشد.
۲) شرکت‌پذیر باشد.
۳) دارای عضو همانی e (منحصر به فرد) باشد.
۴) هر عضو گروه دارای عضو وارون (منحصر به فرد) در مجموعه باشد.