دانشگاه شاهد

گروه ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

ماتریس‌های J - تمیز قوی روی حلقه‌های موضعی

نگارش:

صدیقه جمشیدوند

استاد راهنما:

دکتر حمید حاج سید جوادی

استاد مشاور:

دکتر بهزاد نجفی

آذر ماه ۹۲

تقدیم به خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را و عشق را

و همه کسانی که

زیبا کردند جهان را،
به کمال رساندند انسانیت را،
برافروختند چراغ عقل را،
به اعتلا رساندند علم را،
پیمودند مسیر معرفت را،
و جلوه گر نمودند عشق را،

و تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که این عشق را در وجودم دمیدند، آنان که وجودم برایشان همه رنج بود، وجودشان برایم همه بهره... آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه های جاودانی من است... در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع، بر دستانشان بوسه میزنم....

تشکر و قدردانی

اللّهُم إنّی أَعوذُ بِکَ مِن قَلبٍ لا یَخشَعُ و مِن عِلمٍ لا یَنفَعُ. اللّهُمَ ما بِنا مِن نِعمةٍ فَمِنکَ، اَلحَمدُلله رَبِّ العالَمین

پروردگارا، پناه می‌برم به تو از قلبی که فروتن نمی‌گردد و از علمی که سودی ندارد. پروردگارا، هر نعمتی که داریم از آن توست. حمد و سپاس مخصوص خداوند جهانیان است.

سپاسگذارم از تمامی دل‌های مهربانی که صمیمانه همدل و همراه من بودند و نگاه‌های پرمحبتی که فروغشان گرمابخش راهم بود تا بتوانم از دریای بی‌انتهای دانش الهی چند قطره‌ای در توشه خویش برگیرم. قدردانی تنها بجا آوردن رسم ادب است در برابر این همه احساس بی‌پایان...

از پدر و مادر گرانقدرم سپاسگذارم... آنان که در کوره راه‌های سخت عبورم از زندگی چون سایه‌ای آرام و صبور همواره در جانم زمزمه استقامت نجوا می‌کنند...

کمال تشکر و سپاسگذاری را از استاد راهنمای دلسوز و صبورم جناب آقای **دکتر حمید حاج سید جوادی** می‌نمایم که به حق، همراهی مهربانانه، صبرِ دانسته و دانش نیکوی ایشان پشتوانه‌ی هر گام من در این راه بود.

از جناب آقای دکتر **بهزاد نجفی** استاد مشاور دلسوزم که در انجام مراحل مختلف این پایان نامه از راهنمایی‌های بی دریغ ایشان بهره بردم، سپاسگذارم.

از اساتید بزرگوارم، جناب آقای دکتر **قلندرزاده** و جناب آقای دکتر **نصر** که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند نیز بسیار تشکر می‌نمایم.

از تمامی دوستان، هم کلاسی‌ها و هم اتاقی‌های عزیز و مهربانم که همواره مهر و محبتشان را نثار من کرده‌اند، تشکر می‌کنم.

و در نهایت سپاسگذارم از خواهران خوبم و برادر عزیزم که وجودشان مایه دل گرمی من بوده است.

دستم از به جا آوردن حق سپاس تمامی این عزیزان خالی‌ست و تنها برای ایشان چشم انتظار الطاف و برکات خداوندی‌ام. باشد که خداوند عزت و سر افرازیشان بیفزاید.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا ساختار حلقه‌های تمیــز قوی و J- تمیــز قوی را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که ماتریس‌های ۲ × ۲ روی حلقه‌های موضعی جابه‌جــایی، J-تمیــز قوی نمی‌باشند. این انگیزه‌ای شد که به مطالعه و بررسی ماتریس‌های J-تمیــز قوی روی حلقه‌های موضعی ناجابه‌جــایی بپردازیم. معیار J-تمیــز قوی بودن ماتریس‌های ۲ × ۲ به صورت حل معادله درجه دوم داده خواهد شد. در ادامه به عنوان توسیع، J -تمیــز قوی بودن حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲ را روی حلقه سری توانی از یک حلقه موضعی، بررسی می‌کنیم. هم‌چنین با مطالعه حلقه‌های $g(x)$-تمیــز قوی، مفهوم حلقه‌های J-تمیــز قوی وابسته به چندجمله‌ای $g(x) = ۰$ را ارائه خواهیم کرد و آن را به صورت حلقه‌های J-$g(x)$-تمیــز قوی نمایش می‌دهیم و به اثبات قضایای مربوط به آن‌ها خواهیم پرداخت.

کلید واژه: ماتریس ۲ × ۲، حلقه موضعی، حلقه J-تمیــز قوی، حلقه J-$g(x)$-تمیــز قوی.


بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

مقدمه

مفهوم حلقه‌های تمیز را نیکلسون [1] در سال ۱۹۷۷ بیان کرد [۱۸]. وی در سال ۱۹۹۹ مفهوم حلقه‌های تمیز قوی را تعریف نمود [۱۹]. یکی از سوال‌های عمده در آن زمان این بود که آیا حلقه ماتریسی یک حلقه تمیز قوی، تمیز قوی است؟

در سال ۲۰۰۴ وانگ [2]، و چن [3]، به این سوال پاسخ دادند[۲۲]. آن‌ها حلقه موضعی

$$R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid ۲ \nmid n\}$$

را در نظر گرفتند و نشان دادند $M_۲(R)$ تمیز قوی نیست. چون R یک حلقه موضعی می‌باشد واضح است که تمیز قوی است، به این ترتیب جواب سوال منفی بود. دانشمندانی همچون باروآه [4]، دیزل [5]، چن، دورسی [6]، یانگ [7]، فان[8] ، لی [9]، به مطالعه و بررسی تمیز قوی بودن ماتریس‌های ۲×۲ روی حلقه‌های موضعی جابه‌جایی پرداختند. ([۲]، [۳]، [۵]، [۷]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۷] را ببینید.)

اخیراً لی، یانگ و ژو[10] این مطالعات را روی حلقه‌های موضعی ناجابه‌جایی توسعه دادند و تمیز قوی بودن حلقه ماتریس‌های ۲×۲ را روی چنین حلقه‌هایی بررسی کردند. ([۱۶]، [۲۳] را ببینید.)

چن در سال ۲۰۱۰، مفهوم حلقه‌های J-تمیز قوی را بیان نمود و قضایا و مفاهیم مهمی را اثبات نمود[۶]. مشاهده می‌شود که هر حلقه J-تمیز قوی، تمیز قوی می‌باشد اما عکس آن، با ذکر یک مثال لزوماً برقرار نمی‌باشد. در[۶]، اثبات می‌شود که حلقه ماتریس‌های ۲×۲ روی حلقه‌های موضعی جابه‌جایی J-تمیز قوی نمی‌باشد. این انگیزه‌ای شد که در این پایان‌نامه به بررسی J-تمیز قوی بودن حلقه ماتریس‌های ۲×۲ روی حلقه‌های موضعی ناجابه‌جایی بپردازیم. معیار J-تمیز قوی بودن چنین

[1] $Nicholson$
[2] $Wang, Z.$
[3] $Chen, J.$
[4] $Barooah, G.$
[5] $Diesl, A.J.$
[6] $Dorsey, A, J.$
[7] $Yang, X.$
[8] $Fan, L.$
[9] $Li, Y.$
[10] $Zhou$

حلقه‌هایی داده خواهد شد. این پایان‌نامه شامل ۴ فصل همراه بخش‌هایی به شرح زیر است:
فصل اول به مفاهیم و قضایای مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازد.
فصل دوم شامل ۳ بخش می‌باشد. در بخش اول و دوم حلقه های تمیـــز قوی و J-تمیــز قوی معرفی می‌شوند و ویژگی‌ها و قضایای مرتبط به این حلقه‌ها بیان می‌شوند.
در بخش سوم، ابتدا شرایط معادل برای J-تمیــز قوی بودن حلقه درون ریختی‌های یک مدول بررسی می‌شود. اثبات می‌شود حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲ روی حلقه‌های موضعی جابه‌جـایی J-تمیــز قوی نمی‌باشد. سپس معیار تمیــز قوی و J-تمیـــز قوی بودن حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲ به صورت تشابه با ماتریس‌ها و توسط ریشه‌های یک معادله درجه دوم بیان می‌شود و همچنین ثابت می‌شود که مفهوم تمیــز قوی و J-تمیـــز قوی بودن حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲، روی حلقه‌های موضعی به جز در موارد بدیهی با یکدیگر منطبق هستند. در ادامه به اثبات قضایا مرتبط به آن‌ها می‌پردازیم .
در فصل سوم، J-تمیـــز قوی بودن حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲ روی حلقه سری توانی از یک حلقه موضعی توسیع داده می‌شود. حلقه‌های بلیچد و بلیچد ضعیف را معرفی و قضایای مربوط به آن‌ها اثبات می‌شود.
در ادامه، با در نظر گرفتن حلقه‌های موضعی A، B و ${}_AV_B$ به عنوان $A-B$ دو مدول J-تمیــز قوی بودن ماتریس‌هایی به فرم $\begin{bmatrix} A & V \\ \circ & B \end{bmatrix}$ مورد بررسی قرار می‌گیرد و همچنین شرایط معادل تمیـــز قوی و J-تمیـــز قوی بودن این فرم ماتریس‌ها بیان و اثبات می‌شود.
در فصل چهارم حلقه‌های J-تمیـــز قوی وابسته به چندجمله ای $g(x) = \circ$ به عنوان تعمیمی از حلقه‌های J-تمیـــز قوی ارائه می‌دهیم و آن را به صورت حلقه‌های $g(x)$-J-تمیـــز قوی نشان می‌دهیم و سپس قضایای مربوط به آن را اثبات می‌کنیم.
اساس مطالب این پایان نامه از مقالات [۶]، [۸] و [۱۹] برگرفته شده است. لازم به ذکر است در راستای مطالعات خویش در دوره پژوهشی کارشناسی ارشد دستاوردهایی حاصل شده است که یک نسخه از مقاله در مجله $(Journal\ of\ Linear\ and\ Topological\ Algebra)$ مورد پذیرش و چاپ واقع گردید و همچنین چکیده مبسوطی از پژوهشی دیگر تحت عنوان $(Generalized\ f-clean\ rings)$ به بیست و سومین سمینار جبر ایران ارسال و مورد پذیرش واقع شد و به صورت سخنرانی ارائه گردید.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به ذکر تعاریف، لم‌ها و قضایای مورد نیاز پایان‌نامه می‌پردازیم. در این پایان‌نامه همه حلقه‌ها شرکت پذیر و یکدار در نظر گرفته می‌شوند که لزوما جابه‌جـــایی نیستند مگر آن که قید شود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم M یک گروه آبـــلی باشد. $end(M)$ یا $[hom(M,M)]$ مجموعه تمام درون ریختی‌های گروه آبـــلی نامیده می‌شود که به ازای $f,g \in end(M)$ و $x \in M$ عمل جمع و ضرب را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fg)(x) = f(g(x))$$

مجوعه $end(M)$ با این دو عمل جمع و ضرب تشکیل یک حلقه می‌دهد که حلقه درون ریختی گروه آبلی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. یک R-مدول راست یک گروه آبلی جمعی M همراه نگاشت $M \times R \to M$ است، به طوری که برای هر $r,s \in R$ و $m_1, m_2 \in M$،

(۱) $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$

(۲) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$

(۳) $(ms)r = m(sr)$.

اگر R یک حلقه یکدار باشد برای هر $m \in M$ $1_R m = m$. آنگاه R-مدول M را یکانی می‌نامیم. R-مدول چپ به طور مشابه تعریف می‌شود.
اگر M یک R-مدول راست و چپ باشد، آنگاه M را یک (R,R)-مدول(دو-مدول) می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم R و S حلقه باشند. گروه آبلی A یک $R-S$ مدول است مشروط بر این که A هم R-مدول چپ و هم S-مدول راست باشد و به ازای $s \in S$، $r \in R$ و $a \in A$، $r(as) = (ra)s$.
به عنوان مثال، می‌توان هر حلقه R را به عنوان یک R-مدول چپ به حساب آورد. در این صورت

قوانین توزیع پذیری و قانون شرکت پذیری ضرب در حلقه R نشان می‌دهد که R یک R-مدول چپ است. به طور مشابه، R یک R-مدول راست نیز می‌باشد. در نتیجه R یک (R,R)-مدول است.

قضیه ۴.۱.۱. *برای R-مدول یکانی M شرایط زیر معادلند:*

(۱) *M دارای پایه ناتهی است.*

(۲) *M مجموع مستقیم داخلی خانواده ای از R-مدول‌های دوری است که هر یک به عنوان R-مدول چپ با R یکریخت است.*

(۳) *M با مجموع مستقیم کپی‌هایی از R-مدول چپ R یکریخت است.*

(۴) *مجموعه ناتهی X و تابع $i : X \to M$ با خاصیت زیر وجود دارد: به ازای هر R-مدول یکانی A و تابع $f : X \to A$، همریختی منحصر به فردی از R-مدول‌ها مانند $f' : M \to A$ وجود دارد به طوری که $f'i = f$.*

اثبات. رجوع شود به ([۲۵]، قضیه ۱۰۲). □

تعریف ۵.۱.۱. R-مدول یکانی M آزاد نامیده می‌شود هرگاه در یکی از شرایط قضیه ۴.۱.۱ صدق کند.

مثال ۶.۱.۱. ۱. اگر A و B، R-مدول باشند آن‌گاه مجموعه $Hom_R(A,B)$ مرکب از تمام همریختی‌های R-مدولی از A به B، یک گروه آبلی است که اثر $f+g$ بر $a \in A$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

عنصر همانی نگاشت صفر است.

۲. $Hom_R(A,A) = End_R(A)$ یک حلقه یکدار است که در آن ضرب ترکیب توابع است. $Hom_R(A,A)$ حلقه درون ریختی A نام دارد.

- توجه شود که حلقه درون ریختی R-مدولی زیر حلقه‌ای از حلقه درون ریختی گروه آبلی می‌باشد.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند در این صورت نگاشت $\alpha : R \to S$ را همریختی از R به S نامیم اگر به ازای هر $a, b \in R$:

$$\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$$
$$\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b).$$

تعریف ۸.۱.۱. یک تکریختی (بروریختی) از حلقه‌ها یک همریختی از حلقه‌هاست که نگاشتی انژکتیو (سورژکتیو) باشد.

- چنانچه همریختی α، تکریختی و بروریختی باشد، آن را یکریختی می‌نامیم و می‌نویسیم $R \cong S$ و گوییم R با S یکریخت است.

تعریف ۹.۱.۱. مرکز حلقه R عبارت است از:

$$C(R) = \{a \in R \mid \forall\ b \in R, ab = ba\}.$$

به راحتی مشاهده می‌شود مرکز هر حلقه، خود یک زیر حلقه است.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. آن‌گاه R یک حلقه تقسیم نامیده می‌شود هرگاه هر عضو ناصفر آن در R معکوس‌پذیر باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر R یک حلقه و M یک R- مدول باشد.

(۱) M را یک R- مدول ساده یا تحویل‌ناپذیر می‌نامیم، اگر $M \neq 0$ و هیچ زیر مدولی به غیر از (0) و M نداشته باشد.

(۲) M را یک R-مدول نیم‌ساده می‌نامیم اگر و فقط اگر هر R-زیر مدول M جمعوند مستقیم از خود M باشد.

مثال ۱۲.۱.۱. واضح است که هر مدول ساده‌ای، نیم‌ساده است اما توجه شود که مدول صفر یک مدول نیم‌ساده است که ساده نمی‌باشد. مثال بدیهی از مدول ساده، یک میدان یا یک حلقه تقسیم R است وقتی آن را به عنوان مدولی روی خودش در نظر بگیریم.

تعریف ۱۳.۱.۱. عنصر e از حلقه R را خودتوان می‌نامیم هـرگاه $e^۲ = e$.

برای مثال، در حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲، ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ یک عضو خودتوان است. عناصر ۰، ۱ خودتوان‌های بدیهی هستند. هرگاه $e \neq ۰,۱$، یک خودتوان غیر بدیهی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱. خودتوان e از حلقه R را مرکزی گوییم، هرگاه $e \in C(R)$. یعنی برای هر $r \in R$، $er = re$.

تعریف ۱۵.۱.۱. دو خودتوان e, f در یک حلقه R متعامد نامیده می‌شوند، هرگاه $ef = fe = ۰$.

تعریف ۱۶.۱.۱. برای هر خودتوان e از R، ۳ تجزیه پیِرس زیر تعریف می‌گردد:

$$R = R.e \oplus R.f \quad (۱)$$

$$R = e.R \oplus f.R \quad (۲)$$

$$R = eRe \oplus eRf \oplus fRe \oplus fRf \quad (۳)$$

که $f = ۱ - e$ خودتوان متمم e نامیده می‌شود. (۳) تجزیه به زیرگروه‌های جمعی است. در میان این زیرگروه‌ها eRe، fRf حلقه‌اند با عنصر همانی e، f. این دو حلقه با مجموعه‌های زیر مشخص می‌شوند:

$$eRe = \{r \in R, er = r = re\} \text{ و } fRf = \{r \in R, fr = r = rf\}$$

قضیه ۱۷.۱.۱. *اگر e, e' دو خودتوان باشند و M یک R-مدول راست باشد. یک یکریختی گروه جمعی $\lambda : Hom_R(eR, M) \to Me$ وجود دارد. به ویژه یک یکریختی گروهی طبیعی*

$$Hom_R(eR, e'R) \cong e'Re$$

موجود است.

اثبات. رجوع شود به ([۱۵]، قضیه ۲۱۰۶). □

نتیجه ۱۸.۱.۱. برای هر خودتوان $e \in R$ یکریختی حلقه‌ای طبیعی

$$End_R(eR) \cong eRe$$

وجود دارد . در نتیجه برای $e = 1$ خواهیم داشت، $End_R(R) \cong R$.

اثبات. رجوع شود به ([۱۵]، ۷.۲۱). □

تعریف ۱.۱.۱۹. ایده‌آل چپ (راست) M در حلقه R را ماکزیـــمال گوییم اگر $M \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل چپ (راست) N که $M \subseteq N \subseteq R$، نتیجه شود $N = M$ یا $N = R$.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم R حلقه باشد. پوچ‌ســاز راست یک زیر مجموعه مانند M از R عبارت است از:

$$r_R(M) = \{r \in R | Mr = 0\}$$

به طور مشابه پوچ‌ســاز چپ M عبارت است از:

$$l_R(M) = \{r \in R | rM = 0\}$$

- $r_R(M)$ ایده‌آل راست حلقه R و $l_R(M)$ ایده‌آل چپ حلقه R است.
- هرگاه M ایده‌آل راست (چپ) باشد آن‌گاه $r_R(M)$ ($l_R(M)$) ایده‌آل دو طرفه حلقه R است و آن را به ترتیب به صورت $ann_r(M)$ ($ann_l(M)$) نیز نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱.۱.۲۱. *اگر R یک حلقه یکدار باشد آن‌گاه $radR$ اشتراک تمـــام ایده‌آل‌های چپ (راست) خواهد بود. با توجه به این‌که برای هر حلقه $R \neq 0$ ایده‌آل‌های چپ (راست) ماکزیـــمال همواره وجود دارند (لم زورن)، نتیجه می‌شود $radR \neq R$. اگر $R = 0$ آن‌گاه قرار می‌دهیم $radR = 0$.*

نتیجه ۱.۱.۲۲. برای هر R- مدول چپ M،

$$radR = \cap\, annM$$

به ویژه، $radR$ یک ایده‌آل از R است.

تعریف ۱.۱.۲۳. $radR$ رادیکال جیکوبسن حلقه R نام دارد و با $J(R)$ نیز نمایش داده می‌شود. به راحتی مشاهده می‌شود $J(R)$ تنها خودتوان صفر دارد.

لم ۲۴.۱.۱. *به ازای $y \in R$ شرایط زیر معادلند:*

(۱) $y \in radR$.

(۲) *به ازای $x \in R$، $1 - xy$ معکوس چپ دارد.*

(۲) $yM = 0$، *برای هر R-مدول چپ ساده‌ی M.*

اثبات. رجوع شود به ([۱۵]، لم ۱۰۴). □

گزاره ۲۵.۱.۱. *فرض کنیم R و S دو حلقه باشند و $\varphi : R \longrightarrow S$ همریختی پوشا باشند. در این صورت $\varphi(J(R)) \subseteq J(S)$.*

اثبات. فرض می‌کنیم $x \in \varphi(J(R))$، نشان می‌دهیم $x \in J(S)$. برای این منظور، با توجه به لم قبل کافی است نشان دهیم به ازای هر $s \in S$، $1_S - sx$ معکوس‌پذیر است. چون $x \in \varphi(J(R))$ بنابراین $t \in J(R)$ وجود دارد به طوری که

$$x = \varphi(t)$$

فرض کنیم s عضو دلخواه S باشد، بنابراین $r' \in R$ وجود دارد به طوری که

$$\varphi(r') = s$$

چون φ همریختی حلقه‌ای است، لذا

$$\begin{aligned} 1_S - sx = 1_S - \varphi(r')\varphi(t) &= 1_S - \varphi(r't) \\ &= \varphi(1_R - r't) \end{aligned}$$

چون $t \in J(R)$ و $r' \in R$، لذا $1_R - r't$ معکوس‌پذیر است. بنابراین $u \in U(R)$ وجود دارد به طوری که

$$u(1_R - r't) = (1_R - r't)u = 1_R$$

نشان می‌دهیم $\varphi(u)$ معکوس $1_S - sx$ است.

$$\varphi(u)(1_S - sx) = \varphi(u)\varphi(1_R - r't) = \varphi(u(1_R - r't)) = \varphi(1_R)$$
$$= 1_S$$

بدین ترتیب ثابت می‌شود $(1_S - sx)\varphi(u) = 1_S$. در نتیجه حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۲۶.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت $J(\frac{R}{I}) \subseteq \frac{I + J(R)}{I}$.

اثبات. همریختی حلقه‌ای پوشا

$$\varphi : R \to \frac{R}{I}$$
$$r \mapsto r + I$$

در نظر می‌گیریم. با توجه به گزاره ۲۵.۱.۱، $\varphi(J(R)) \subseteq J(\frac{R}{I})$. اما می‌دانیم

$$\varphi(J(R)) = \frac{I + J(R)}{I}.$$

بنابراین، $J(\frac{R}{I}) \subseteq \frac{I + J(R)}{I}$. □

قضیه ۲۷.۱.۱. *اگر e یک خودتوان در R و $J = radR$. آن‌گاه $rad(eRe) = J \cap (eRe) = eJe$؛ علاوه براین، $eRe/rad(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$، که $\bar{e}$ تصویر e در $\bar{R} = R/J$ است.*

اثبات. رجوع شود به ([۱۵]، ۲۱۰۱۰). □

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $M_n(R)$ مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times n$ روی R. در این صورت $M_n(R)$ با جمع و ضرب معمولی ماتریس‌ها، حلقه ماتریس‌های $n \times n$ روی R نامیده می‌شود.

قضیه ۲۹.۱.۱. *فرض کنیم K یک حلقه و $R = M_n(K)$. آن‌گاه*

$$rad(M_n(K)) = M_n(radK)$$

اثبات. رجوع شود به ([۱۵]، ۲۱۰۱۴). □

گزاره ۳۰.۱.۱. *فرض کنیم $\{R_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از حلقه‌ها باشد. در این صورت*

$$J(\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i\in I} J(R_i).$$

اثبات. رجوع شود به([۱۵]، مثال B۱۲۰۴). □

تعریف ۳۱.۱.۱. زیر حلقه $S \subseteq R$ را یک حلقه گوشه‌ای R می‌نامیم اگر زیر گروه جمعی مانند $C \subseteq R$ چنان موجود باشد که $R = S \oplus C$ و داشته باشیم $S.C \subseteq C$ و $C.S \subseteq C$. زیر گروه C را یک مکمل حلقه گوشه‌ای S در R می‌نامیم.

برای مثال اگر e یک خودتوان مرکزی از R باشد، eRe حلقه گوشه‌ای از R است.

تعریف ۳۲.۱.۱. اگر I حلقه یک ایده آل از R باشد. گوییم خودتوان $x \in \frac{R}{I}$ به R ارتقا می‌یابد، اگر خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد به طوری که تصویر آن تحت نگاشت طبیعی $R \to \frac{R}{I}$، خودتوان x باشد.

تعریف ۳۳.۱.۱. گوییم عنصر $\bar{e} \in R/J(R)$ به طور قوی به پیمانه $J(R)$ ارتقا می‌یابد، اگر یک خودتوان $f \in R$ موجود باشد به طوری که $e - f \in J(R)$ و $ef = fe$.

تعریف ۳۴.۱.۱. ایده‌آل P در حلقه R ایده‌آل اول نامیده می‌شود، هرگاه $P \neq R$ و برای ایده‌آل‌های $U, B \subseteq R$ اگر $UB \subseteq P$، آن‌گاه $U \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

قضیه ۳۵.۱.۱. *اگر R یک حلقه جابه‌جایی باشد، آن‌گاه ایده‌آل P از R اول است اگر و تنها اگر $ab \in P$، که $a, b \in R$ ایجاب کند $a \in P$ یا $b \in P$.*

اثبات. با توجه به تعریف ایده‌آل اول اثبات می‌شود. رجوع شود به ([۲۴]، قضیه ۶۰۴). □

گزاره ۳۶.۱.۱. *اگر R حلقه یک جابه‌جایی و یکدار باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل ماکزیمال آن اول است.*

اثبات. رجوع شود به ([۲۵]، قضیه ۶۰۴) □

تعریف ۳۷.۱.۱. حلقه R را یک حلقه بولی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in R$، $x = x^2$.

تعریف ۳۸.۱.۱. یک چندجمله‌ای با ضرایب در حلقه R به صورت زیر است:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$$

که در آن a_iها در حلقه R هستند.

دو چندجمله‌ای $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ و $b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$ را برابر نامند هرگاه $m = n$ و به ازای هر i، $a_i = b_i$. هم چنین برای دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ که

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$$

عمل جمع و ضرب را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ...$$
$$f(x).g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{m+n}x^{m+n}$$

که در آن $0 \leq i \leq m + n$ و $c_i = \Sigma_{j+k=i}a_jb_k$.

مجموعه چندجمله‌ای‌ها با دو عمل جمع و ضرب تعریف شده به صورت فوق تشکیل حلقه‌ای می‌دهند که آن‌ها را حلقه چندجمله‌ای می‌نامیم.

و همچنین هر عضو $R[[x]]$ را نیز به فرم

$$a_0 + a_1x + ...$$

تعریف می‌کنیم که با جمع و ضرب تعریف شده در حلقه چندجمله‌ای‌ها، $(R[[x]], +, .)$ تشکیل یک حلقه می‌دهد که حلقه سری توانی روی R نامیده می‌شود.

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و σ یک درون ریختی از حلقه R باشد. سری توانی اریب $R[[x;\sigma]]$ متشکل از تمام چندجمله‌ای‌های چپ به فرم $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ می‌باشد که جابه‌جایی دو متغیر x و b از R به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$xb = \sigma(b)x$$

سری توانی اریب$R[[x;\sigma]]$ با عمل جمع معمولی چندجمله‌ای‌ها و عمل ضرب به فرم

$$(\sum a_i x^i)(\sum b_j x^j) = \sum a_i \sigma^i(b_j) x^{i+j}$$

تشکیل یک حلقه می‌دهد که حلقه سری توانی اریب نامیده می‌شود.

تعریف ۴۰.۱.۱. حلقه R یک حلقه موضعی نامیده می‌شود، اگر $R/radR$ یک حلقه تقسیم باشد. بنابراین، تمام حلقه‌های تقسیم موضعی هستند.

قضیه ۴۱.۱.۱. *برای هر حلقه غیر صفر R عبارات زیر معادلند:*

(۱) R *یک حلقه موضعی است.*

(۲) R *تنها یک ایده‌آل چپ ماکزیمال دارد.*

(۳) R *تنها یک ایده‌آل راست ماکزیمال دارد.*

(۴) $R/radR$ *یک حلقه تقسیم است.*

(۵) $R\setminus U(R)$ *ایده‌آلی از R است که $U(R)$ مجموعه تمام عناصر معکوس‌پذیر(یکه) حلقه R است.*

(۶) $R \setminus U(R)$ *یک گروه جمعی است.*

(۷) *به ازای هر n، اگر $a_1 + ... + a_n \in U(R)$، آن‌گاه به ازای $a_i \in U(R)$.*

(۸) *اگر $a + b \in U(R)$ آنگاه $a \in U(R)$ یا $b \in U(R)$.*

(۹) $J(R) = \{x \in R | x \notin U(R)\}$.

اثبات. رجوع شود به ([۱۵]، قضیه ۱۹۰۱) و ([۱]، قضیه ۱۵ ۰ ۱۵). □

در این پایان نامه حلقه موضعی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

نتیجه ۴۲.۱.۱. حلقه R موضعی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر $R = U(R) \cup J(R)$.

اثبات. می‌دانیم به ازای هر $x \in R$، $x \in U(R)$ یا $x \notin U(R)$. بنابراین،

$$R = \{x \in R | x \in U(R)\} \cup \{x \in R | x \notin U(R)\}$$