وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه دوسطحی نامتمرکز

توسط:

علی میرزایی

استاد راهنما:

دکتر علی عباسی ملایی

استاد مشاور:

دکتر رضا پورقلی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه دوسطحی نامتمرکز

توسط:

علی میرزایی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی (گرایش تحقیق در عملیات)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر علی عباسی ملایی استادیار گروه ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر رضا پورقلی استادیار گروه ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر حنیف حیدری استادیار گروه ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر علی طهماسبی استادیار گروه ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر محمد ابری استادیار گروه ریاضی محض گرایش توپولوژی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند...

سپاسگزاری

زبان قاصر است از بیان لطافت جاری در روح کسانی که عشق و حکمت و علم و وظیفه و اخلاص را به هم آمیخته اند تا عسل واره ای چنان روح انگیز گردد که هوش از سر کودک عقل می پراند و بهار بارقه ای است از نفس گرمشان. خدای را شاکرم، نازنینانی در مسیر زندگیم قرار داد که همچو نفس ممد حیاتند و مفرح ذات. کسانی که بارها بر خواسته های خود چشم پوشیدند تا خواسته هایم محقق شود، از داشته هایشان گذشتند تا داشته باشم و چنان بی چشم داشت دوستم داشتند که حتی چشم هایم این چنین نبوده اند.

پدرم، می ستایمت که سپیدی موهایت را با سیاهی قلمم عوض کردی و خواستی بدانم و بدانم. تویی که داشتنت تداعی البرز است برای آرامش خزر. مادرم، یگانه روزگارم، تو خمخانه ی عشقی، وعده ی دولت بیدار حافظی و طربناکی ترنم باران. چقدر واژه ها شرمسارند که نمی توانند تو را وصف کنند و من شرمسارتر از همه واژه ها.

پاس خواهم داشت زحمات استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای دکتر علی عباسی ملایی، که کمترین آموخته ام از او علم بوده است.

همچنین قدردان استاد مشاور ارجمندم، جناب آقای رضا پور قلی، هستم، به خاطر تقبل زحمت هایم.

برادران و خواهرانم، که اختران نورانی زندگی ام بوده اند و در راه پیشرفتم از هیچ تلاشی فروگذار نکرده اند.

و در پایان از تمامی دوستان خوبم که نشان دادند جغرافیای دوستی، مرزی برای خود نمی شناسد.

بارالها، آنان که بیشتر میدانند، نزد تو عزیزترند و هر که عزیزتر است، مسئول تر است. در مسیر دانایانم بدار که عزت جهان به عزیزی نزد توست و قدرتم ده که آن باشم که تو خواهی.

علی میرزایی

شهریور ۹۲

چکیده

مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه دوسطحی نامتمرکز

به وسیله‌ی:
علی میرزایی

در این پایان‌نامه الگوریتم برنامه‌ریزی آرمانی فازی (FGP) را برای حل مسایل برنامه‌ریزی چندهدفه نامتمرکز ($DBL-MOP$) با یک تصمیم‌گیرنده در سطح بالا و چندین تصمیم‌گیرنده در سطح پایین معرفی می‌کنیم. الگوریتم FGP برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه دوسطحی نامتمرکز ($DBL-MOLP$) ارایه می‌شود. این الگوریتم برای حل مسایل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه دوسطحی ($DBL-MOLFP$) گسترش داده می‌شود. در این الگوریتم توابع عضویت آرمان‌های فازی همه توابع هدف در دو سطح تعریف می‌شود و توابع عضویت برای بردار آرمان‌های فازی متغیرهای تصمیم کنترل‌شده به وسیله تصمیم‌گیرنده سطح بالا ($ULDM$) در فرمولبندی مدل مساله توسعه می‌یابد. روش FGP برای رسیدن به بالاترین درجه از آرمان‌های عضویت استفاده می‌شود. برای انجام اینکار متغیرهای انحرافی آنها مینیمم می‌شود و در نتیجه رضایتبخش‌ترین جواب برای همه تصمیم‌گیرندگان بدست می‌آید. چند مثال عددی برای توضیح موارد فوق ارایه می‌شود.

واژه های کلیدی: برنامه‌ریزی دوسطحی نامتمرکز، برنامه‌ریزی چندهدفه، برنامه‌ریزی کسری خطی، برنامه‌ریزی آرمانی، برنامه‌ریزی ریاضی فازی، برنامه‌ریزی آرمانی فازی.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست نشانه‌های اختصاری

$SUMT$: تکنیک مینیمم‌سازی بدون محدودیت متوالی

KKT : کروش-کان-تاکر

BLP : برنامه‌ریزی دوسطحی

LBP : برنامه‌ریزی خطی دوسطحی

$BLDDM$: تصمیم‌گیری نامتمرکز دوسطحی

$ULDM$: تصمیم‌گیرنده در سطح بالاتر

$LLDM$: تصمیم‌گیرنده در سطح پایین‌تر

$MLPP$: مسایل برنامه‌ریزی چندسطحی

FP : برنامه‌ریزی فازی

FGP : برنامه‌ریزی آرمانی فازی

$BLPP$: مساله برنامه‌ریزی دو سطحی

$BLDPP$: مساله برنامه‌ریزی دوسطحی نامتمرکز

$TLPP$: مساله برنامه‌ریزی سه‌سطحی

$MLDPP$: مساله برنامه‌ریزی چندسطحی نامتمرکز

$TLDPP$: مساله برنامه‌ریزی سه‌سطحی نامتمرکز

$TLN - MODM$: تصمیم‌گیری چند هدفه غیرخطی سه‌سطحی

$FLDM$: تصمیم‌گیرنده سطح اول

$SLDM$: تصمیم‌گیرنده سطح دوم

$TLDM$: تصمیم‌گیرنده سطح سوم

$MODM$: تصمیم‌گیری چندهدفه

GP : برنامه‌ریزی آرمانی

$DBL - MOP$: برنامه‌ریزی چندهدفه دوسطحی نامتمرکز

$DBL - MOLP$: برنامه‌ریزی خطی چندهدفه دوسطحی نامتمرکز

$DBL - MOLFP$: برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه دوسطحی

$LFGP$: برنامه‌ریزی آرمانی فازی خطی

MOP : برنامه‌ریزی چندهدفه

پیشگفتار

مسایل بهینه‌سازی سلسله‌مراتبی در سازمان‌هایی که در اجرای تصمیم‌های مستقل و دایمی درگیر هستند، عادی می‌باشد. هر تصمیم‌گیرنده به‌طور مستقل توابع هدف خود را بهینه می‌سازد در حالی که در همان زمان توسط اقدامات دیگر تصمیم‌گیرنده‌ها تحت تاثیر قرار می‌گیرد [۱۹]. برنامه‌ریزی نامتمرکز دوسطحی متعارف از تکنیک برنامه‌ریزی ریاضی برای مدل‌سازی سیستم‌های نامتمرکز با تنها یک تصمیم‌گیرنده در سطح بالا و بیش از یک تصمیم‌گیرنده در سطح پایین‌تر استفاده می‌کند. براساس نظریه بازی استاکلبرگ [۱] با ویژگی‌های غیرتعاونی، آناندلینگام [۲] [۷] فرض کرد که همه تصمیم‌گیرندگان سطح پایین تر مجموعه‌ای از واکنش‌های منطقی تصمیم کنترل شده و تعیین شده به وسیله تصمیم‌گیرنده سطح بالاتر دارند، که تصمیم‌گیرنده سطح بالاتر یکی از این‌ها را برای بهینه‌سازی تابع هدف خود انتخاب می‌کند. مجموعه تصمیم نهایی به عنوان جواب تعادل فرستاده می‌شود. در این روش جواب، به منظور جستجوی جواب، مجموعه واکنش منطقی تصمیم‌گیرندگان سطح پایین تر با شرایط بهینگی با استفاده از روش کان-تاکر جایگزین می‌شود، و به عنوان محدودیت‌های گنجانیده شده برای مساله بهینه‌سازی تصمیم‌گیرنده سطح بالاتر درنظر گرفته می‌شوند. لای [۳] [۳۷] برای اولین بار نظریه فازی را برای مسایل برنامه‌ریزی دوسطحی و چندسطحی بکار برد و ایده آن بر این اساس است که تصمیم‌گیرندگان انگیزه‌ای برای همکاری متقابل به منظور پیدا کردن جواب بهینه پارتو دارند و این کار توسط شیه، لای و لی [۴] [۵۷] توسعه یافت. علاوه بر این، لای مفهوم قدرت تصمیم‌گیری را باتوجه به هر تصمیم‌گیرنده بر روی تصمیم‌گیری کنترل شده پیشنهاد داد که می‌تواند در مقدار رضایت‌بخش

---

[۱] stackelberg

[۲] Anandalingam

[۳] Lai

[۴] Shih, Lai and Lee

از آرمان فازی برای هر تابع هدف تصمیم‌گیرنده، براساس مقدار (ارزش) آرمان مبهمش منعکس شود. پس از آن، تعدادی روش برنامه‌ریزی فازی تعاملی که این مفهوم قدرت را ترکیب می‌کنند، برای حل مسایل برنامه‌ریزی نامتمرکز دوسطحی متعارف پیشنهاد شدند [۵، ۵۳، ۵۴].

فصل ۱

مجموعه های فازی و توابع جریمه

۱-۱ مقدمه

این فصل به دو قسمت عمده تقسیم می‌شود. در قسمت اول به توضیح مفاهیم و تعاریف مربوط به مجموعه‌های فازی می‌پردازیم و در قسمت دوم به معرفی مفاهیم مرتبط با توابع جریمه خواهیم پرداخت. کلیه مطالب این فصل برگرفته از [۱] و [۱۵] می‌باشند.

۱-۲ مجموعه های فازی

مجموعه‌های کلاسیک(قطعی)، مجموعه‌هایی هستند که اعضای خود را به طور کامل در اختیار دارند مثلا «مجموعه اعداد زوج » یک مجموعه قطعی است که هر عدد حقیقی، یا متعلق به آن مجموعه هست یا نیست (صد درصد یا صفر درصد). یعنی برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد زوج هست یا خیر و بنابراین عضو مجموعه متناظر هست یا خیر. حال فرض کنید بخواهیم درباره آن دسته از مجموعه اعداد حقیقی صحبت کنیم که« بزرگ » باشند. در اینجا با یک ویژگی مهم یعنی« بزرگ » سر و کار داریم. این که چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف، فرق می‌کند. به عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردایه‌ای با ویژگی « بزرگ بودن » قطعی نیست. مثلا آیا ۱۰۰ عددی بزرگ است و عضو گردایه اعداد حقیقی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰۰۰۰۰ چطور؟ می‌بینیم که ویژگی « بزرگ بودن »بر اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق، معین و ترد نیست و بنابراین، جامه نظریه معمولی بر تن اینگونه مفاهیم راست نمی‌آید و این نظریه از صورتبندی مفاهیم و ویژگی‌ها ناتوان است.

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه کالیفرنیا در برکلی با انتشار مقاله‌ای در مجله « اطلاعات و کنترل » مطرح گردید. این نظریه از زمان ارایه آن تاکنون، گسترش و تعمیم زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، صورتبندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل وتصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. بیشتر مفاهیم و ویژگی‌هایی که در زندگی روزمره و واقعی و نیز در شاخه‌های مختلف علوم به ویژه علوم انسانی و اجتماعی با آن سروکار داریم، این گونه هستند. در قلمرو ریاضیات و نظریه مجموعه‌های کلاسیک جایی برای این مفاهیم نیست و قالبی برای صورتبندی این مفاهیم و ابزاری برای تجزیه و تحلیل آنها وجود ندارد. نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورتبندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه، یک تعمیم و گسترش طبیعی مجموعه‌های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌ها نیز می باشد.

قبل از معرفی ساختار ریاضی این نظریه، اساس کار پروفسور عسگرزاده، مبدع ایرانی تبار این نظریه را، شرح می‌دهیم. این کار را با پیگیری مثال فوق درباره‌ی اعداد حقیقی بزرگ انجام می‌دهیم. همان طور که در بالا بیان شد، آنچه در مجموعه بودن « اعدادبزرگ » اشکال ایجاد می‌کند، معلوم نبودن عضویت و یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردایه" اعداد بزرگ " است. مثلا اینکه آیا ۱۰۰ عددی بزرگ است؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰۰۰۰۰چطور؟ و همین طور برای سایر اعداد. بنا به پیشنهاد زاده، مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی از بازه ی [۰،۱] به عنوان درجه بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هرچه یک عدد، بزرگتر بود عدد متناظر برای عضویت آن در A: " مجموعه اعداد بزرگ " به یک نزدیکتر باشد و بالعکس هر چه عدد مورد نظر کوچک بود، عدد مربوطه به عضویت آن در A، به صفر نزدیکتر باشد. به این ترتیب به جای آن که گوییم عدد ۱۰۰ بزرگ هست یا بزرگ نیست، و یا آنکه در این باره ساکت باشیم، می گوییم درجه بزرگی آن، مثلا ۰/۷ است. به عبارت دیگر بجای آن که بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو A هست یا عضو A نیست، می‌گوییم: با درجه ۰/۷ عضو A است. مسلما در این مورد باید برای هر عدد از R، عددی از $I = [\circ, 1]$ را به عنوان درجه، میزان عضویت و تعلق از A نسبت دهیم. یعنی یک تابع در نظر بگیریم که قلمرو آن R و برد آن I باشد. مشاهده می‌کنید که توانستیم به یک قالب ریاضی برسیم یعنی یک تابع از R به I برای توصیف و تجزیه و تحلیل اعداد حقیقی بزرگ.

۱-۳ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

اکنون در این بخش به معرفی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. [۱] فرض کنیم X، یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر هر زیر مجموعه معمولی A از X، یک تابع از X به $\{۰, ۱\}$ است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A = \begin{cases} ۱ & if\ x \in A, \\ ۰ & if\ x \notin A, \end{cases}$$

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی به بازه $[۰, ۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X، عددی از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۱. [۱] مجموعه فازی A، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن می‌تواند به طور پیوسته از $[۰, ۱]$ اختیار شود. این مجموعه به طور کامل توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_A(x)$ نمایش می‌دهیم مشخص می‌شود نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و بالعکس، نزدیکی آن به صفر نشان دهنده تعلق کمتر x به A است. چنانچه x کاملا در A باشد داریم $\mu_A(x) = ۱$ و چنانچه اصلا در A نباشد داریم $\mu_A(x) = ۰$.

تعریف ۳.۳.۱. [۱] هسته مجموعه فازی A، مجموعه‌ای است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_۱ = \{x \in A \mid \mu_A(x) = ۱\}$$

تعریف ۴.۳.۱. [۱] مجموعه فازی A را محدب گویند هرگاه

$$\mu_A(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲) \geq \min(\mu_A(x_۱), \mu_A(x_۲)), \quad x_۱, x_۲, \lambda \in [۰, ۱].$$

تعریف ۵.۳.۱. [۱] فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از $x \in X$ که برای آن نقاط $\mu_A(x) > ۰$، تکیه گاه A نامیده و با $\sup A$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۶.۳.۱. [۱] ارتفاع یک مجموعه فازی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_A = \sup_x \mu_A(x)$$

۱-۳-۱ نمادگذاری

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلف زیر رایج است:

۱- به کار بردن مستقیم تابع عضویت فازی.

۲- یک مجموعه فازی بصورت زوج‌های مرتب بصورت زیر نمایش می‌دهند:

$$M = \{(x, \mu_A(x)) \quad ; \ x \in A\}$$

هنگامی که X یک مجموعه متناهی (ویا نامتناهی شمارا) بصورت $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ باشد، یک زیر مجموعه فازی A از X به صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$A = \{\frac{\mu_A(x_۱)}{x_۱}, \ldots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\}.$$

$$A = \frac{\mu_A(x_۱)}{x_۱} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{k=۱}^{n} \frac{\mu_A(x_k)}{x_k}$$

که در عبارت دوم، منظور از $+$، اجتماع است نه جمع حسابی.

۴- اگر X یک مجموعه پیوسته باشد نماد زیر به کار برده می‌شود:

$$A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x}$$

۱-۴ اصل گسترش

[۱] زمانی که رابطه‌ای مانند $y = ۳x + ۲$ بین دو متغیر وجود دارد، اگر ورودی x یک عدد حقیقی باشد، هیچ ابهامی در خروجی y وجود نخواهد داشت، اما اگر ورودی x یک عدد مبهم باشد، در اینصورت خروجی y نیز به تبع آن مقداری مبهم خواهد بود، سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که وابستگی مقدار ابهام خروجی به ورودی چگونه است؟ برای این منظور به معرفی یکی از مفاهیم اساسی از مجموعه‌های فازی به‌نام اصل گسترش می‌پردازیم، برای معرفی این اصل به دو تعریف زیر نیاز داریم:

فرض کنید $T : X \to Y$، همچنین $A \subseteq X$ باشد، در اینصورت تصویر مجموعه A تحت تابع f بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(A) = \{y \in Y \mid \quad y = f(x)\ ,\ x \in A\} \subseteq Y$$

به‌طور مشابه، اگر $B \subseteq Y$، در اینصورت تصویر وارون مجموعه B تحت تابع f به‌فرم زیر می‌باشد:

$$f^{-۱}(B) = \{x \in X \mid \quad f(x) = y\ ,\ y \in B\} \subseteq X$$

حال نگاشت $f : X \to Y$ را برای ایجاد رابطه بین مجموعه‌های فازی A بر روی X و B بر روی Y بصورت زیر توسعه می‌دهیم:

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & if\ f^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

قبل از تعریف کلی اصل گسترش به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف ۱.۴.۱. [۱] اگر $A_1, \dots, A_n$ به ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از $X_1, \dots, X_n$ باشند، حاصلضرب دکارتی $A_1, \dots, A_n$ که بصورت $A_1 \times A_2 \dots \times A_n$ نشان داده می‌شود یک زیر مجموعه فازی از فضای حاصلضرب $X_1 \times X_2 \dots \times X_n$ با تابع عضویت زیر است:

$$\mu_{A_1 \times A_2 \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = \min_{i=1,\dots,n} \mu_{A_i}(x_i).$$

حال اگر $f : A_1 \times A_2 \dots \times A_n \to B \subseteq Y$، با استفاده از اصل گسترش برای حاصلضرب دکارتی داریم:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1,\dots,x_n) \in f^{-1}(y)} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) & if\ f^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0 & otherwise, \end{cases}$$

اکنون به معرفی اعداد فازی و انواع آن می‌پردازیم.

۱-۵ اعداد فازی و انواع آن

تعریف ۱.۵.۱. [۱] فرض کنید A یک مجموعه فازی از اعداد حقیقی (R) باشد، A را یک عدد فازی گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱- A نرمال باشد (یعنی ارتفاع مجموعه A برابر یک باشد). به‌عبارت معادل

$$\exists\, x_0 \in R\,,\ \mu_A(x_0) = 1.$$

۲- μ_A، قطعه قطعه پیوسته باشد.

۳- A یک مجموعه فازی محدب باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی را با $F(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۵.۲. [۱] یک عدد فازی A مثبت (منفی) نامیده می‌شود و بصورت $A > \circ$ ($A < \circ$) نوشته می‌شود هرگاه تابع عضویت آن در شرط زیر صدق کند:

$$\mu_A(x) = \circ \quad \forall x < \circ \ (x > \circ)$$

با توجه به تعریف عدد فازی و شرایط اضافی که بر آنها تحمیل می‌شود، اعداد فازی انواع مختلفی پیدا می‌کنند که در زیر به آنها اشاره می‌کنیم.
اغلب دو دسته خاصی از اعداد فازی در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرند، که عبارتند از اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه ای می‌باشند.
یک عدد فازی مثلثی A یک مجموعه فازی در R با تابع عضویت مثلثی بصورت زیر می‌باشد:

$$\mu_A(x) = \mu_A(x; a, b, c) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x < b, \\ \dfrac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c, \\ \circ & x > c \text{ یا } x < a, \end{cases}$$

به‌طور مشابه اگر یک مجموعه فازی A در R دارای یک تابع عضویت ذوزنقه‌ای بصورت زیر باشد،

$$\mu_A(x) = \mu_A(x; a, b, c, d) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x < b, \\ ۱ & b \leq x \leq c, \\ \dfrac{d-x}{d-c} & c < x \leq d, \\ \circ & x > d \text{ یا } x < a, \end{cases}$$

آن گاه این عدد، به عنوان عدد فازی ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود.

۱-۵-۱ تعمیم چهار عمل اصلی برای اعداد فازی

با توجه به تعریف زیر چهار عمل اصلی برای اعداد فازی را بدست می‌آوریم.

تعریف ۱.۵.۳. [۱] فرض کنید $M، N \in F(R)$ با توابع عضویت پیوسته باشند $R \times R \to R : \divideontimes$، یک عملگر دوتایی برای اعداد حقیقی باشد $\divideontimes$ را برای اعداد فازی با $\circledast$ نشان دهیم، با استفاده از اصل گسترش حاصل $M \circledast N$ بصورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(M \circledast N) = \sup_{z = x \divideontimes y} \min[M(x), N(y)]$$