بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده: **ریاضی**

گروه: **ریاضی کاربردی**

عنوان پایان نامه

حل معادلات دیفرانسیل فرکتالی با روش آشفتگی هوموتوپی

دانشجو: **هادی سالاری نژاد**

اساتید راهنما :

دکتر صادق رحیمی

دکتر حسین امینی خواه

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به پدرم و مادرم

تشکر و قدردانی

خداوند یکتا و متعال را شاکرم که توفیق یافتم تا این پایان نامه را با راهنمایی و یاری اساتید و دیگر بزرگواران، تدوین نمایم و به زعم خود از همه این عزیزان تشکر و قدردانی می کنم و برای ایشان از درگاه ایزد مهربان آرزوی سعادت و عاقبت به خیری دارم.

در ابتدا صمیمانه ترین تشکر ها تقدیم به پدر و مادر عزیزم که همواره راهنما و مشوقم بوده اند و گذر از مشکلات زندگی ام به حول و قوه الهی و بدون دعای خیر و برکت وجودشان، غیر ممکن بود.

از اساتید راهنمای ارجمندم، **جناب آقای دکتر رحیمی وجناب آقای دکتر امینی خواه** که سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشتند کمال تشکر و قدردانی می نمایم.

از اساتید محترم، **جناب آقای دکتر گرشاسبی** و **جناب آقای دکتر ناظمی** که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

برخود لازم می دانم تا از کلیه اساتید گرانقدر دانشکده ریاضی که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، تشکر نمایم.

در نهایت از تمامی دوستان و هم اتاقی های عزیزم و همکلاسی ها و هم دانشکده ای های گرامی ام که در طول این مدت افتخار مصاحبت و همفکری با آنها را داشتم، صمیمانه سپاسگزاری نمایم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پــایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

مهرماه ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه ابتدا در فصل یک به معرفی مفاهیم اساسی مورد نیاز می پردازیم. در فصل دوّم مشتق و انتگرال کسری را بیان می کنیم. در این فصل پس از معرفی مشتق کسری ریمان- لیوویل، گرونوالد- لتنیکوف به بیان خواص و ارتباط این مشتقات می پردازیم. در فصل سه ساختار روش آشفتگی هوموتوپی را بیان می کنیم، در ادامه با بیان چند قضیه، همگرایی این روش را بررسی می کنیم و کاربرد های این روش برای حل معادلات تابعی را با بیان چند مثال نشان خواهیم داد. در فصل چهارم چند صورت از معادلات دیفرانسیل کسری خاص را معرفی کرده و سپس حل آنها را با روش آشفتگی هوموتوپی بیان می کنیم.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

[۱] H. salarinezhad, H. Aminikhah, S. Rahimi , (۲۰۱۰), “An analytical approximation to the solution of fractional Zakharov-Kuznetsov equation”, **Appl. Mat. Con, Zahedan.**

[۲] H. Salarinejad, H. Aminikhah, S. Rahimi, "Analytical approximation to the solution of fractional Zakharov-Kuznetsov equations by HPM" [In Press].

فهرست مطالب

فصل سوّم **معرفی روش آشفتگی هوموتوپی**

فصل چهارم **حل معادلات دیفرانسیل کسری به روش آشفتگی هوموتوپی**

مقدمه

حساب کسری از قرن ۱۷ آغاز شد و بحثهای اوّلیه در این مورد شامل کارهای لایب نیتز[۱]، اویلر[۲]، لاگرانژ[۳]، لاپلاس[۴]، آبل[۵]، لیوویل[۶]، ریمان[۷] و بسیاری دیگر بوده است. اوّلین گزارش مربوط به تعمیم مشتقات معمولی به مشتقات کسری منصوب به لایب نیتز و هوپیتال است که در آن هوپیتال از لایب نیتز می پرسد که اگر در نماد $\frac{d^n}{dt^n}$، به جای n عدد $\frac{۱}{۲}$ قرار دهیم چه اتفاقی می افتد. لاپلاس (۱۸۱۲) مشتقات کسری را به صورت یک انتگرال تعریف کرد و در سال ۱۸۱۹ لاکرویکس[۸] مشتقات کسری با مرتبه دلخواه را با تعمیم فرمول مشتق معمولی زیر مورد توجه قرار داد

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n \ , \qquad m,n \in N,$$

که تعمیم او برای هر m و υ به صورت زیر بود

$$\frac{d^\upsilon x^m}{dx^\upsilon} = \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma(m-\upsilon+۱)} x^{m-\upsilon}.$$

[۱] Leibnitz
[۲] Euler
[۳] Lagrange
[۴] Laplace
[۵] Abel
[۶] Liouville
[۷] Riemann
[۸] lacroix

فوریه[۱] (۱۸۲۲) عملگرهای کسری را با نمایش انتگرالی تابع $f(x)$ به صورت زیر معرفی کرد

$$f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} cos\big(t(x-u)\big)dt,$$

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} t^n cos\left(t(x-u)+\frac{۱}{۲}n\pi\right)dt.$$

او به صورت نمادی n را با عدد دلخواه α عوض کرد.

آبل اولین کسی است که عملگرهای کسری را مستقیماً برای حل یک معادله انتگرال مورد استفاده قرار داد. معادله انتگرالی که آبل در آن از عملگر کسری استفاده کرد، هنگام حل مساله همزمان رخ داده بود که امروزه به مساله همزمان آبل معروف است و این مساله عبارت است از یافتن شکلی از یک منحنی به طوری که زمان پائین آمدن یک جرم نقطه ای بدون اصطکاک و تحت تأثیر یک میدان گرانشی روی این شکل مستقل از نقطه آغازین باشد. اگر زمان حرکت یک ثابت معروف باشد، معادله انتگرال آبل به صورت زیر خواهد بود

$$k(x) = \int_{۰}^{x} (x-t)^{\alpha} f(t)dt,$$

که البته معادله فوق با $\alpha = -\frac{۱}{۲}$ امروزه به معادله انتگرال آبل معروف است. انتگرال معادله فوق صرف نظر از ضریب $\frac{۱}{\Gamma(۱/۲)}$ یک حالت خاص از انتگرال کسری معروف ریمان- لیوویل است. در معادلات انتگرالی نظیر آبل تابع $f(t)$ باید محاسبه شود. آبل با اثر دادن عملگر کسری $\frac{d^{۱/۲}}{dx^{۱/۲}}$ بر دو طرف معادله، آن را حل کرد.

فرمول انتگرال فوریه و جواب آبل مورد توجه لیوویل قرار گرفت. لیوویل نظریه حساب کسری را توسعه داد و آنها را در مسائل تئوری پتانسیل به کار برد.

---

[۱] Fourier

امروزه اصطلاح حساب کسری عبارت است از حساب مربوط به انتگرال و مشتق گیری از مرتبه دلخواه به طوری که مرتبه مشتق بتواند گویا، گنگ و حتی مختلط باشد. در مورد مرتبه گویا کارهای مختلفی صورت گرفته است ولی تحلیل مختلط مشتقات و انتگرالهای کسری توسط *سریواستاوا* و *اُوا* بحث شده است.

مشتقات و انتگرال های کسری بحث های صرفاً ریاضی نیستند بلکه کاربردهای فراوانی در مدارهای الکتریکی، شیمی تجزیه، چند قطبی های کسری، فرموله کردن مسائل فیزیک، شیمی و علوم بیولوژیکی دارد.

اخیراً کاربردهای معادلات دیفرانسیل کسری شامل عملگر دیفرانسیلی ریمان- لیوویل در زمینه های مختلفی نظیر دینامیک سیالات محاسباتی، پردازش سیگنال، بیولوژیک، پلیمر و مکانیک آماری دیده شده است. حساب کسری به فرم فرکتالی[1] از توابعی نظیر توابع وایراشتراس[2] و همچنین توابع پله ای لبگ نیز مطرح شده است.

تمام بحث ها و مطالعات انجام شده در این شاخه بر پایه تعاریف موجود از مشتق و انتگرال کسری بنا شده است. تعاریف مختلفی از مشتق و انتگرال کسری وجود دارد که منشأ متفاوتی دارند و لزوماً هم معادل یکدیگر نیستند. بعد از معرفی مفاهیم اوّلیه مورد نیاز در فصل یک، معروف ترین تعاریف موجود مشتق های کسری یعنی تعریف *ریمان- لیوویل*[3] *و گراونوالد- لتنیکوف*[4] را در فصل دو مطرح می کنیم و خواص آنها را قبیل منشأ و پیدایش تعریف کرده، ترکیب آنها با مشتقات معمولی، مشتقات کسری و انتگرال کسری را مورد بحث قرار خواهیم داد.

[1] Fractional
[2] Weierstrass
[3] Riemann-Liouville
[4] Grünwald-Letnikov

فصل سوّم را با معرفی روش آشفتگی هوموتوپی[1] برای حل معادلات دیفرانسیل آغاز می کنیم و شرط کافی همگرایی را در قالب قضیه ای بیان و اثبات می کنیم. در ادامه این فصل به حل چند دسته از معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با روش آشفتگی هوموتوپی می پردازیم.

در نهایت در فصل چهارم ابتدا به معرفی تعدادی معادلات دیفرانسیل معروف کسری خطی وغیر خطی می پردازیم و در ادامه حل این معادلات را با روش آشفتگی هوموتوپی بررسی خواهیم کرد.

[1] Homotopy perturbation method

فصل اوّل

مفاهیم اوّلیه و معرفی توابع خاص

۱-۱ مقدمه

توابع متعالی یکی از ابزارهای مهم و پایه ای در حساب کسری می باشند که خواننده علاقمند به این شاخه از ریاضیات لازم است تا با این توابع و برخی از خواص آنها آشنا باشد. در این فصل پس از معرفی تعدادی از این توابع نظیر تابع گاما[۱]، تابع بتا[۲]، و تابع میتاژ- لفلر[۳] و ... که در حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل کسری مورد استفاده قرار می گیرند، به بیان خواص مهم و مورد نیاز در این پایان نامه می پردازیم. توابع متعالی دارای خواص بسیاری هستند، بدیهی است که اثبات و بیان تمام این خواص و قضایای مربوطه از حوصله این رساله خارج است و بحثهای تکمیلی این قسمت را می توان در منابع معرفی شده یافت.

[۱] Gamma
[۲] Beta
[۳] Mittag-Leffler Functiorl

۱-۲ توابع پایه حساب کسری

۱-۲-۱ تابع لگاریتم طبیعی و تابع نمائی

می توان گفت که در تمام بحثهای معادلات دیفرانسیل، توابعی که بیش از همه مورد توجه است تابع لگاریتم طبیعی و معکوس آن تابع نمائی است.

تابع لگاریتم طبیعی که به صورت زیر تعریف می شود

$$ln\, x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt \qquad x > 0, \tag{۱ – ۱}$$

تابعی با دامنه اعداد مثبت است که در سراسر دامنه اش پیوسته و مشتق پذیر می باشد. چون تابع لگاریتم طبیعی در دامنه اش پیوسته و صعودی است لذا دارای معکوس می باشد، معکوس تابع لگاریتم طبیعی **تابع نمائی** نامیده می شود که به صورت زیر تعریف می شود:

اگر $x = \ln y$ در این صورت $y = exp(x)$ تابع نمائی از x نامیده می شود که غالباً با e^x نمایش داده می شود.یکی از کاربردی های تابع نمائی این است که مشتق آن برابر خودش (در حالت کلی تر از جنس خودش) می باشد. این خاصیت پایه و اساس روشهای حل معادلات معمولی با ضرائب ثابت است.

۱-۲-۲ تابع گاما[1]

یکی از توابع اساسی حساب کسری تابع گامای اویلر است که تعمیمی از تابع $n!$ است و این امکان را فراهم می کند که n مقادیر غیر صحیح و حتی مختلط را بپذیرد.

تعریف: تابع گاما $\Gamma(z)$ با انتگرال زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{۲ – ۱}$$

[1] Gamma

که در نیمه سمت راست صفحه مختلط یعنی $Re(z) > ۰$ همگرا می شود. تابع گاما یک تعریف با نمایش حدی نیز دارد که به صورت زیر است

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+۱)(z+۲)\dots(z+n)}, \qquad (۳-۱)$$

که در آن فرض اولیه ما این است که $Re(z) > ۰$.

شاید یکی از مهمترین خواص تابع گاما رابطه بازگشتی زیر باشد

$$\Gamma(z+۱) = z\Gamma(z), \qquad (۴-۱)$$

این رابطه با استفاده از انتگرالگیری به روش جزء به جزء به سادگی قابل اثبات است

$$\Gamma(z+۱) = \int_۰^\infty e^{-t}t^z dt = [-e^{-t}t^z]_{t=۰}^{t=\infty} + z\int_۰^\infty e^{-t}t^{z-۱}dt = z\Gamma(z).$$

به وضوح $\Gamma(۱) = ۱$ و برای $z = ۱,۲,۳,\ldots$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\Gamma(۲) = ۱ \times \Gamma(۱) = ۱,\\
&\Gamma(۳) = ۲ \times \Gamma(۲) = ۲ \times ۱! = ۲!,\\
&\Gamma(۴) = ۳ \times \Gamma(۳) = ۳ \times ۲! = ۳!,\\
&\vdots\\
&\Gamma(n+۱) = n\Gamma(n) = n(n-۱)! = n!.
\end{aligned}$$

خاصیت مهم دیگر تابع گاما به صورت زیر است

$$\Gamma(z+n)\Gamma(-z-n+۱) = (-۱)^n\Gamma(z)\Gamma(۱-z). \qquad (۵-۱)$$

نماد فاکتوریل را حتی اگر α عدد صحیح مثبت نباشد، به صورت $\alpha\,! = \Gamma(\alpha+1)$ تعریف می کنیم. به عنوان مثال، ضرائب بسط دو جمله ای نیوتن را بر حسب تابع گاما به صورت زیر است:

$$\binom{-z}{\xi} = \frac{\Gamma(۱-z)}{\Gamma(\xi+۱)\Gamma(۱-z-\xi)},$$

در حالت خاص اگر ξ یک عدد صحیح نامنفی مانند n باشد، آنگاه

$$\binom{-z}{n} = \frac{\Gamma(۱-z)}{n!\,\Gamma(۱-z-n)} = (-۱)^n\frac{\Gamma(z+n)}{n!\,\Gamma(z)} = (-۱)^n\binom{z+n-۱}{n}.$$

۱-۲-۳ تابع پی سی اویلر

مشتق لگاریتم تابع گاما تابع psi اویلر نامیده می شود که به صورت زیر معرفی می شود

$$\psi(z) = D\, ln\, \Gamma(z) = \frac{D\Gamma(z)}{\Gamma(z)} \qquad (۶-۱)$$

تابع $\psi(z)$ تابع دی گاما نیز نامیده می شود. در حالت خاص

$$\psi(۱) = -\gamma \text{ و } \psi\left(\frac{۱}{۲}\right) = -\gamma - ln\, ۴$$

که $\gamma = ۰/۵۵...$ **ثابت اویلر**[۱] است و اگر z یک عدد صحیح نامنفی باشد، $\psi(z+۱)$ برابر $-\gamma + \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{z}{k(k+z)}$ خواهد بود. قابل دکر است که تابع پی سی در رابطه بازگشتی زیر صدق می کند

$$\psi(z+۱) = \psi(z) + \frac{۱}{z}.$$

در حالت خاص اگر z عدد صحیح مثبت بوده و آن را n بنامیم، آنگاه

$$\psi(n+۱) = -\gamma + \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k}.$$

۱-۲-۴ تابع بتا[۲]

در بسیاری از حالات بهتر است به جای ترکیبی از مقادیر معین تابع گاما از تابعی موسوم به تابع بتا استفاده کنیم. تابع بتا غالباً به صورت زیر تعریف می شود

$$B(z,w) = \int_{۰}^{۱} t^{z-۱}\,(۱-t)^{w-۱} dt\,, \qquad Re(z) > ۰\,, \qquad Re(w) > ۰ \qquad (۷-۱)$$

---

[۱] اگر قرار دهیم $s_N = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{N}$ در این صورت $lim_N(s_N - ln\,N)$ موجود بوده که ثابت اویلر نامیده می شود. ثابت اویلر از تمرینهای مهم مبحث حد دنباله و سری است که نمونه های آن را در اغلب کتاب های آنالیز ریاضی می توان یافت. تمرین ۹ فصل هشت اصول آنالیز ریاضی والتر رودین و یا تمرین ۳۶ فصل شش اصول آنالیز حقیقی رابرت جی بارتل مثال هائی از این دست هستند.

[۲] Beta

برای به بدست آوردن رابطه بین تابع بتا و گاما از تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم که به صورت زیر تعریف می شود

$$h_{z,w}(t) = \int_{۰}^{t} \tau^{z-۱}(۱-\tau)^{w-۱} d\tau.$$

واضح است که $h_{z,w}(t)$ یک کانولوشن از توابع $t^{z-۱}$ و $t^{w-۱}$ می باشد و $h_{z,w}(۱) = B(z,w)$.

با توجه به اینکه لاپلاس کانولوشن دو تابع برابر حاصل ضرب تبدیل لاپلاس آن دو تابع است، داریم

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z}\frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}},$$

که در آن $H_{z,w}(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $h_{z,w}(t)$ است. به عبارت دیگر چون $\Gamma(z)\Gamma(w)$ یک ثابت است می توان $h_{z,w}(t)$ را با گرفتن معکوس تبدیل لاپلاس از طریق رابطه فوق دوباره به دست آورد، بنابراین خواهیم داشت

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w+۱}.$$

با قرار دادن $t = ۱$ داریم

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

به کمک تابع بتا می توان خواص دیگری از تابع گاما را به دست آورد[۱]. یکی از این خواص به صورت زیر است

$$\Gamma(z)\Gamma(۱-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (z \neq ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots). \qquad (۸-۱)$$

در حالت خاص اگر $z = \frac{۱}{۲}$ رابطه معروف $\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\pi}$ حاصل می شود که برای محاسبه مقدار تابع گاما در بسیاری نقاط مورد استفاده قرار می گیرد. خاصیت دیگری از تابع گاما که به سادگی از تابع بتا نتیجه می شود، *فرمول لژاندر* است

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\pi}۲^{۲z-۱}\Gamma(۲z) \ , \qquad ۲z \neq ۰, -۱, -۲, \ldots. \qquad (۹-۱)$$

که با قرار دادن $z = n + \frac{۱}{۲}$ در آن مجموعه ای از مقادیر خاص تابع گاما به صورت زیر بدست می آید: