بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين
اياك نعبد واياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم
صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی دکتری رشته ی ریاضی گرایش آنالیز

میانگین پذیری و منظم پذیری جبرهای وزنی نیم گروهی و دوگان دوم آنها

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

استادان مشاور:

دکتر حمید رضا ابراهیمی ویشکی

دکتر محمود لشکریزاده بمی

پژوهشگر:

محمدابوالقاسمی

اسفند ماه ۱۳۸۶

باسمه تعالی

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی گرایش آنالیز هارمونیک آقای محمد ابوالقاسمی

تحت عنوان:

منظم پذیری و میانگین پذیری جبرهای وزنی نیم گروهی و دوگان دوم آنها

در تاریخ ۸۶/۱۲/۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱ - استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی رجالی	با مرتبه ی علمی استاد	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر حمید رضا ابراهیمی ویشکی	با مرتبه ی علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد مشاور پایان نامه	دکتر محمود لشکری زاده بمی	با مرتبه ی علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور خارج از گروه	دکتر عبدالحمید ریاضی	با مرتبه ی علمی استاد	امضاء
۵- استاد داور خارج از گروه	دکتر رسول نصر اصفهانی	با مرتبه ی علمی دانشیار	امضاء
۶- استاد داور داخل از گروه	دکتر محمدرضا پوریای ولی	با مرتبه ی علمی دانشیار	امضاء
۷- استاد داور داخل از گروه	دکتر مجید فخار	با مرتبه ی علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

دانشگاه اصفهان

..و با سپاس فراوان از دکتر علی رجالی که صمیمانه بر زحمات ایشان ارج می نهم همچنین از اساتید گرامی جناب آقایان دکتر عبدالحمید ریاضی، دکتر عبدالرسول نصر اصفهانی، دکتر حمید رضا ابراهیمی ویشکی، دکتر لشکریزاده بمی، دکترمحمد رضا پوریای ولی و دکترمجید فخارکه در نگارش این پایان نامه اینجانب را یاری کرده اند کمال تشکر را دارم..

چکیده

در این پایان نامه به مطالعه فضاهای توابع روی نیمگروهها، میانگین پذیری کونز، میانگین پذیری کونز بنیادی و میانگین پذیری تقریبی ضعیف میپردازیم.

در فصل یکم برخی تعاریف و پیش زمینه ها را معرفی می کنیم.

در فصل دوم با قرار دادن شرط تقریبا پایایی چپ روی وزن ، یک قطر واقعی نرمال برای جبر اندازه وزنی روی گروههای فشرده موضعی پیدا می کنیم. درواقع با این عمل نشان میدهیم چه موقع جبر اندازه وزنی روی گروههای فشرده میانگین پذیر کونزمی باشد.

در فصل سوم ابتدا مفاهیم تازه ای از میانگین پذیری به نامهای میانگین پذیری کونز بنیادی و میانگین پذیری کونز تقریبی میپردازیم و سپس ارتباط این میانگین پذیری ها را با هم وخواص موروثی انها را بررسی مینماییم.

سرانجام در فصل چهارم فضاهای توابع را روی فضاهای انتقالی نیمگروهی تعریف می کنیم و با تعمیم مفهوم فشرده سازی روی این فضاهای انتقالی به مقایسه انها می پذیریم.

کلید واژه : میانگین پذیری، میانگین پذیری کونز، فضاهای توابع.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات و پیش زمینه اساسی

در این فصل تعاریف، گزاره‌ها و قضایایی که در این پایان نامه استفاده می‌شود را بیان می‌کنیم.

سازماندهی این فصل به صورت زیر می‌باشد:

در بخش ۱—۱ مفاهیم گروه‌های میانگین پذیر و جبر اندازه وزن‌دار روی گروه‌های موضعاً فشرده بیان می‌شود.

در بخش ۲—۱ مطالبی از میانگین پذیری، میانگین پذیری تقریبی، و میانگین پذیری ضعیف از جبرهای باناخ معرفی می‌کنیم. بعلاوه، مفهوم میانگین پذیری کونز از جبرهای باناخ دوگان و مجموع مستقیم از جبرهای باناخ بیان می‌شود.

در بخش ۳—۱ جبرهای باناخ منظم و دوگان‌های دوم آن، در حالت خاص، جبرهای گروه وزن‌دار منظم و جبرهای اندازه وزن‌دار را بیان می‌کنیم.

در نهایت، در بخش ۴—۱ تعاریفی از مفاهیم نیم گروه‌ها را توضیح می‌دهیم، در حالت خاص جبر نیم گروه وزن‌دار ، دوگان آن و جبر نیم گروه اندازه را معرفی می‌کنیم.

۱ــ۱ جبر اندازه وزنی روی گروهها

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. تابع $\omega : G \longrightarrow R^+$ یک وزن روی G نامیده می‌شود، اگر برای هر $x,y \in G$ و $\omega(e_G) = 1$، $\omega(xy) \leq \omega(x)\omega(y)$ باشد، که در آن e_G همانی G است.

اگر ω پیوسته باشد، آن‌گاه ω یک تابع وزن روی G نامیده می‌شود. اگر ω یک وزن باشد، آن‌گاه می‌توان بررسی کرد که $\omega^*(g) = \omega(g)\omega(g^{-1})$ برای $g \in G$ یک وزن روی G است.

مثال ۱ــ۱.۱ (i) هرگاه ω_1 و ω_2 توابع وزن بر گروه G باشند، آن‌گاه به وضوح حاصلضرب $\omega = \omega_1\omega_2$ نیز یک تابع وزن بر G است.

(ii) فرض کنید μ یک تابع زیر جمعی پیوسته بر G باشد به طوری که $\mu(e_G) = 0$. آن‌گاه $\omega = e^{\mu}$ یک تابع وزن بر G است .

(iii) فرض کنید ω_1 و ω_2 توابع وزن به ترتیب روی گروه‌های موضعاً فشرده G_1 و G_2 باشند. در این صورت تابع $\omega_1 \times \omega_2$ روی $G_1 \times G_2$ با تعریف $\omega_1 \times \omega_2(x,y) = \omega_1(x).\omega_2(y)$ برای هر $y \in G_2$ و $x \in G_1$ یک تابع وزن بر $G_1 \times G_2$ است.

فرض کنید $L^1(G,\omega)$ جبر گروه وزن‌دار بر تمام توابع بورل اندازه پذیر f باشد، به طوری که $f\omega \in L^1(G)$. نرم $L^1(G,\omega)$ را تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_{1,\omega} = \int_G |f|\omega d\lambda, \quad f \in L^1(G,\omega).$$

حاصلضرب f و g (پیچش نام دارد) در را قرار می‌دهیم:

$$f * g(t) = \int f(s)g(s^{-1}t)ds, \quad t \in G.$$

دوگان $L^1(G,\omega)$، $L^\infty(G,\omega)$ است و نرم روی را تعریف می‌کنیم:

$$\|g\|_{\infty,\omega} = ess \sup_{t\in G} |\frac{g(t)}{\omega(t)}|, \quad g \in L^\infty(G,\omega).$$

برای $f \in L^1(G,\omega)$ و $g \in L^\infty(G,\omega)$ قرار می‌دهیم:

$$< f, g >= \int_G f(s)g(s)ds$$

این دوگانگی توپولوژی ضعیف ستاره روی $L^\infty(G,\omega)$ را مشخص می‌کند.

فرض کنید

$$P(G,\omega) = \{f : f \in L^1(G,\omega), f \geq 0 \ \ and \ \ \|f\|_\omega = 1\}.$$

در این صورت $P(G,\omega)$ یک زیر نیم‌گروه $L^1(G,\omega)$ است.

بعلاوه در نظر می‌گیریم:

$$C_0(G,\omega) = \{f : f \in L^\infty(G,\omega) \ \ and \ \ \frac{f}{\omega} \in C_0(G)\}$$

آن‌گاه $C_0(G,\omega)$ یک زیر فضای بسته از $L^\infty(G,\omega)$ است.

اگر برای $\omega \geq 1$ تعریف کنیم

$$M_b(G,\omega) = \{\mu \in M(G) : \|\mu\|_\omega < \infty\}.$$

و با تعریف نرم روی $M_b(G,\omega)$

$$\|\mu\|_\omega = \int_G \omega(s)d|\mu|(s) \quad \mu \in M_b(G,\omega)$$

$M_b(G,\omega)$ دوگان $C_0(G,\omega)$ با دوگانگی زیر است.

$$< f, \mu >= \int_G f(s)d\mu(s) \quad f \in C_0(G,\omega), \quad \mu \in M_b(G,\omega).$$

برای $F \in L^{\infty}(G,\omega)$ و $\mu_b(G,\omega)$ ، $F.\mu$ و $\mu.F$ می‌توانند با توابع زیر روی G یکی شوند.

$$F.\mu(g) = \int_G F(gh)d\mu(h) \quad , \quad \mu.F(g) = \int_G F(hg)d\mu(h).$$

فرض کنید $M_a(G,\omega)$ و $M_s(G,\omega)$ نشان دهنده زیر فضای خطی بسته $M_b(G,\omega)$ باشند، در جایی که

$$M_a(G,\omega) = L^{1}(G,\omega)$$

و

$$M_s(G,\omega) = \{\mu : \mu \in M_b(G,\omega) \ \ s.t \ \ \mu.\omega \in M_s(G)\}.$$

بعلاوه

$$M_b(G,\omega) = M_a(G,\omega) \oplus M_s(G,\omega)$$

جبر $L^{1}(G,\omega)$ گروه وزن‌دار یک زیر جبر بسته w^*—چگال در $M_b(G,\omega)$ است.
اگر f یک تابع موضعاً فشرده روی G باشد و $s,t \in G$. انتقال چپ و راست L_t و R_t را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_t f(s) = f(ts), R_t f(s) = f(st)$$

فرض کنید $\omega \geq 1$. در این صورت پیچش $*$ روی $M_b(G,\omega)$ را تعریف می‌کنیم:

$$< f, \mu * \nu >= \int_G \int_G f(st)d\mu(s)d\nu(t)$$

که در آن $f \in C_0(G,\omega)$.

فرض کنید $f \in L^{1}(G,\omega)$ ، $\lambda \in L^{\infty}(G,\omega)$ ، $\mu \in M_b(G,\omega)$ و $\varphi \in (L^{\infty}(G,\omega))^* = (L^{1}(G,\omega))^{**}$. در این صورت

$$< f, \mu.\lambda >=< f * \mu, \lambda > \quad , \quad < \varphi.\mu, \lambda >=< \varphi, \mu.\lambda > .$$

بعلاوه $\mu.\lambda$ و $\lambda.\mu$ می‌توانند با توابع زیر روی G یکی شوند.

$$\mu.\lambda(t) = \int_G \lambda(ts)d\mu(s)$$

$$\lambda.\mu(t) = \int_G \lambda(st)d\mu(s) \quad t \in G.$$

گزاره ۱—۲.۱ هرگاه $\omega \geq 1$، آن‌گاه با رابطه پیچشی $*$، $M_b(G,\omega)$ یک جبر باناخ یکدار و $L^1(G,\omega)$ یک ایده‌آل بسته $M_b(G,\omega)$ است، [۶].

۱—۲ میانگین پذیری گروه‌ها و جبرهای باناخ

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و X یک زیر فضایی از $L^\infty(G)$ شامل توابع ثابت باشد. یک تابعک $m \in X^*$ را میانگین روی X نامیم هرگاه

$$\langle 1, m\rangle = \|m\| = 1.$$

زیر فضای X از $L^\infty(G)$ را پایای چپ نامیم هرگاه $\delta_g * \varphi \in X$، که در آن δ_g اندازه دیراک می‌باشد، $g \in G$ و $\varphi \in X$. میانگین m را پایای چپ روی زیر فضای پایای چپ X از $L^\infty(G)$ نامیم هرگاه

$$\langle \delta_g * \varphi, m\rangle = \langle \varphi, m\rangle, \quad g \in G \ \ and \ \ \varphi \in X.$$

یک گروه موضعاً فشرده G میانگین نامیم هرگاه یک پایای چپ روی $L^\infty(G)$ وجود داشته باشد. خواننده برای جزئیات بیشتر میانگین پذیری گروه‌ها به [۲۹] و [۳۴] رجوع

کند.

یک جبر باناخ A، یک جبر است به طوری که یک فضای باناخ باشد و نرم آن دارای خاصیت نامساوی ضربی، بدین معنی که $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$، برای هر $x, y \in A$. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. یک فضای باناخ E را یک باناخ A—مدول چپ نامیم هرگاه نگاشت دو خطی $E \longrightarrow E : A \times E \longrightarrow a.x$ (a, x) وجود داشته باشد، به طوری که برای یک $k > 0$ در شرایط زیر صدق کند:

$$(i) a(bx) = (ab)x,$$

$$(ii) \|ax\| \leq k\|a\|\|x\|.$$

باناخ A—مدول‌های راست به طور مشابه تعریف می‌شود. E باناخ A—دو مدول نامیده می‌شود هرگاه یک باناخ A—مدول چپ و یک باناخ A—مدول راست باشد و در شرط زیر صدق کند:

$$a(xb) = (xe)b, \quad \forall x \in E \ , \ a, b \in A.$$

فرض کنید E یک باناخ A—دو مدول، در این صورت دوگان E^* از E باناخ A—دو مدول تحت اعمال دوگان زیر است.

$$< x, f.a >=< a.x, f > , < x, a.f >=< x.a, f > \ \ a \in A, \ for \ x \in E \ and \ f \in E^*$$

که دوگان باناخ A—مدول نامیده می‌شود.

فرض کنید A یک جبر باناخ و E یک باناخ A—دو مدول باشد، E را شبه یکانی نامیم هرگاه

$$E = A.E.A = \{a.x.b : a, b \in A, x \in E\}.$$

یک مشتق [1] از A به E یک نگاشت خطی کراندار $D : A \longrightarrow E$ است هرگاه برای هر

[1] derivation

$a, b \in A$ داشته باشیم:

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

یک مشتق D درونی (متناظراً درونی تقریبی) نامیده می‌شود هرگاه $x \in E$ (متناظراً یک تور $(x_\alpha) \in E$) وجود داشته باشد به طوری که $D(a) = ax - xa$ (متناظراً $D(a) = \lim_\alpha(ax_\alpha - x_\alpha a)$).

مجموعه تمام مشتقات از A به E را با $Z^1(A, E)$ و مجموعه تمام مشتقات درونی از A به E را با $B^1(A, E)$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که $B^1(A, E)$ یک زیر فضای خطی $Z^1(A, E)$ است. اولاً گروه کوهومولوژی A با عامل مشترک E را با $H^1(A, E)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$H^1(A, E) = Z^1(A, E)/B^1(A, E).$$

یک جبر باناخ A را میانگین پذیر (متناظراً میانگین پذیر تقریبی) می‌نامیم، اگر هر مشتق از A به دوگان باناخ A—دو مدول E^* درونی (متناظراً درونی تقریبی) باشد. بعلاوه، میانگین پذیری A برای هر دوگان باناخ A—دو مدول E معادل با $H^1(A, E^*) = 0$ است. یک جبر باناخ A میانگین پذیر ضعیف می‌نامیم، هرگاه هر مشتق از A به دوگان باناخ A—دو مدول A^* درونی باشد، یابه عبارت دیگر $H^1(A, A^*) = 0$.

A میانگین پذیر اساسی نامیده می‌شود، هرگاه هر مشتق $D : A \longrightarrow E$ برای هر شبه یکانی باناخ A—دو مدول E درونی باشد.

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. A جبر باناخ دوگان است اگر یک زیر مدول بسته A_* از A^* وجود داشته باشد به طوری که $A = (_*A)^*$. در واقع، A_* یک زیر فضای بسته از A^* و حاصلضرب A، $\sigma(A, _*A)$—جداگانه پیوسته است [[۳۴], ۴.۴.۱].

برای مثال، اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، آن‌گاه $A = M(G)$ یک جبر باناخ دوگان با پیش دوگان $C_{\circ}(G)$. اگر w یک وزن روی G باشد آن‌گاه $M_b(G,\omega)$ یک جبر باناخ دوگان با پیش دوگان $C_{\circ}(G,\omega)$ است.

فرض کنید A یک جبر باناخ دوگان و X یک دوگان باناخ A—دو مدول باشد. X نرمال نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in X$، نگاشت‌های

$$a \to a.x, a \to x.a : A \to X$$

$\sigma(A, {}_*A) - \sigma(X, {}_*X)$—پیوسته باشند. که در آن A_* و X_* به ترتیب پیش دوگانی از A و X هستند.

یک جبر باناخ دوگان A میانگین پذیری کونز نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دوگان باناخ A—دو مدول نرمال E، هر مشتق w^*—پیوسته $D : A$ درونی باشد. در [۳۴] ثابت می‌شود که هر میانگین پذیری کونز جبر باناخ دوگان دارای یکه است. فرض کنید A یک جبر باناخ دوگان با پیش دوگان A_* و B یک دوگان باناخ A—دو مدول نرمال با پیش دوگان B_* باشد، در این صورت مدول جبر توسعه یافته $A \oplus B$ با نرم

$$\|(a,x)\| = \max\{\|x\|, \|a\|\} \quad (a,x) \in A \oplus B$$

یک جبر باناخ دوگان با حاصلضرب تعریف شده:

$$(a,x)(b,y) = (ab, ay + xb) \qquad \forall (a,x), (b,y) \in A \oplus B.$$

بر $A_* \oplus_{\backslash} B_*$ ($l_{\backslash}$—مجموع مستقیم A_* و B_*) با نرم

$$\|(f,g)\|_{\backslash} = \|f\| + \|g\| \quad (f,g) \in A_* \oplus_{\backslash} B_*$$

یک باناخ است. بعلاوه چون A یک جبر باناخ دوگان و B یک یک دوگان باناخ A—دو مدول نرمال است، آن‌گاه حاصلضرب از $A \oplus B \times A \oplus B \longrightarrow A \oplus B$ جداگانه

w^*—پیوسته می‌باشد. زیرا

$$A \oplus B = (A_* \oplus_1 B_*)^*.$$

بنابراین $A \oplus B$ یک جبر باناخ دوگان با نسبت پیش دوگان $A_* \oplus_1 B_*$ است. به وضوح $A_* \oplus_1 B_*$ یک زیر مدول بسته $A^* \oplus_1 B^*$ است. برای اطلاعات جامع‌تر به رجوع کنید.
فرض کنید A و B دو جبر باناخ و $\theta : A \longrightarrow B$ یک نگاشت همریختی w^*—پیوسته باشد، در این صورت B یک A—دو مدول نرمال با اعمال مدول تعریف شده زیر می‌باشد:

$$a.b = \theta(a)b \quad , \quad b.a = b.\theta(a)$$

که در آن $a \in A$ و $b \in B$ و آن را با B_θ نشان می‌دهیم.
فرض کنید A و X جبرهای باناخ و A^{2n+1} (متناظراً X^{2n+1}) نشان دهنده $2n+1$ امین دوگان A (متناظراً X) باشد، که در آن $n \in Nn = 0$. در این صورت داریم:

$$(A \oplus X)^{2n+1} = A^{2n+1\, 2n+1},$$

مجموع سمت چپ، l_∞—مجموع یک است.
اگر X یک باناخ A—دو مدول باشد، آن‌گاه X^{2n+1} یک جبر باناخ A^{2n+1} دو مدول می‌باشد [۸]. معمولاً $(A)^{2n+1}$ یک جبر باناخ $(A \oplus X)$ دو مدول با عمل مدول تعریف شده:

$$(a, x)(A, u) = (aA + xu, au)$$

$$(A, u)(a, x) = (Aa + ux, ua).$$

که در آن $(a, x) \in A \oplus X$ و $(A, u) \in (A \oplus X)^{2n+1}$.

۱—۳ منظم پذیری جبرهای باناخ

فرض کنید A یک جبر باناخ و A^* و A^{**} دوگان اول و دوگان دوم A باشد. دو تعریف حاصلضرب طبیعی روی A^{**} وجود دارد، که حاصلضرب آرنز می‌نامیم و با $\Box$ و $\Diamond$ نشان می‌دهیم، به طوری که جبرهای $(A^{**},\Box)$ و $(A^{**},\Diamond)$ جبرهای باناخ باشند.
تعریف این حاصلضرب به صورت زیر تعریف می‌شود.
فرض کنید $a \in A$، $f \in A^*$ و $F,G \in A^{**}$. در این صورت $f.F$ و $G.f$ در A^* به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle a, f.F\rangle = \langle a.f, F\rangle \ \ , \ \ \langle a, G.f\rangle = \langle f.a, G\rangle.$$

آن‌گاه $F\Box G$ و $F\Diamond G$ در A^{**} توسط فرمول‌های زیر تعریف می‌شود:

$$\langle f, F\Box G\rangle = \langle G.f, F\rangle \ \ , \ \ \langle f, F\Diamond G\rangle = \langle f.F, G\rangle.$$

یادآوری می‌کنیم که A^* یک A—دو مدول و نگاشت‌های $(f,F) \longrightarrow f.F$ و $(f,F) \longrightarrow F.f$ از $A^* \times A^{**}$ دو خطی و کراندار هستند. بعلاوه $(f.F).a = f.(F.a)$ و $(a.f).F = a.(f.F)$، که در آن $a \in A$، $f \in A^*$، $F \in A^{**}$.
حاصلضرب‌های $\Box$ و $\Diamond$ به ترتیب حاصلضرب آرنز اول و دوم روی A^{**} می‌نامیم. اگر حاصلضرب‌های $\Box$ و $\Diamond$ در یک زمان رخ دهند، جبر آرنز منظم نامیده می‌شود.
بنابراین حاصلضرب‌های $\Box$ و $\Diamond$ را با عملگرهای مدولی روی A^{**} توسعه می‌دهیم، به طوری که

$$a.F = \widehat{a}\Box F = \widehat{a}\Diamond F,$$

$$F.a = F\Box\widehat{a} = F\Diamond\widehat{a},$$

که در آن $a \in A$ و $F \in A^{**}$.

در حالت خاص، A جبر باناخ جابجایی است، چون

$$(A^{**}, \Box) = ((A^{op})^{**}, \Diamond)^{op},$$

در نتیجه

$$(A^{**}, \Box) = (A^{**}, \Diamond)^{op}.$$

بنابراین، اگر $(A^{**}, \Diamond)$ جابجایی باشد، آن‌گاه A آرنز منظم است. A آرنز منظم است اگر و تنها اگر $(A^{**}, \Box)$ جابجایی باشد و اگر و تنها اگر $(A^{**}, \Diamond)$ جابجایی باشد.

تذکر ۱—۳.۱ حاصلضرب‌های آرنز با فرمول‌های زیر تعین می‌شود. فرض کنید $F, G \in A^{**}$ و (a_α) و (b_β) دو تور در A باشند به طوری که $w^* - \lim_\alpha \widehat{a}_\alpha = F$ و $w^* - \lim_\beta \widehat{b}_\beta = G$، در این صورت

$$F \Box G = \lim_\alpha \lim_\beta a_\alpha b_\beta,$$

و

$$G \Diamond F = \lim_\beta \lim_\alpha a_\alpha b_\beta,$$

که در آن حد در w^*—توپولوژی روی A^{**} قرار دارد.

گزاره ۱—۳.۲ [۸] فرض کنید A یک جبر باناخ باشد، در این صورت احکام زیر معادلند.

(i)— A آرنز منظم است.

(ii)— برای هر $F \in A^{**}$ نگاشت $G \Box G$ از A^{**} به A^{**} w^*—پیوسته روی A^{**} است.

(iii)— برای هر $f \in A^*$، نگاشت $a.a : A \to A^*$ فشرده ضعیف است.

(iv)— برای هر جفت $((a_m), (b_n))$ از دنباله کران‌دار در A و برای هر $f \in A^*$،

$$\lim_m \lim_n {}_m b_n, f\rangle = \lim_m \lim_n \langle a_n b_m, f\rangle$$

هنگامیکه هر دو حد وجود داشته باشد.

هر زیر جبر بسته از یک جبر باناخ آرنز منظم، آرنز منظم می‌باشد. فرض کنید $a \in A$. نمایش چپ و راست از یک را با L_a و R_a نشان می‌دهیم، بنابراین $L_a(b) = ab$ و $R_a(b) = ba$، برای هر $b \in A$. زیر جبر بسته A از $(A^{**}, \Box)$ یک ایده‌آل است اگر و تنها اگر هر دوی L_a و R_a فشرده ضعیف برای هر $a \in A$ باشند. برای مثال جبر گروه $L^1(G)$ (G یک گروه موضعاً فشرده) یک ایده‌آل از $L^1(G)^{**}$ است اگر و تنها اگر G فشرده باشد، [۸].

تذکر ۱—۳.۳ فرض کنید X یک A—دو مدول باشد، در این صورت X^{**} یک $(A^{**}, \Box)$—دو مدول است. عمل مدول چپ در زیر تعرف شده است.

(i)— برای هر $N \in X^{**}$ و $f \in X^*$، توسط

$$\langle a, N.f\rangle = .a, N\rangle, \ \ \forall \ \ a \in A$$

$N.f \in A^*$ تعریف می‌شود.

(ii)— برای هر $F \in A^{**}$ و $N \in X^{**}$، $F.N \in X^{**}$ توسط

$$\langle f, F.N\rangle = .f, F\rangle, \ \ \forall \ \ f \in X^*$$

تعریف می‌شود.

بنابراین اگر (a_α) و (x_β) به ترتیب تورهایی در A و X باشند، به طوری که

$$w^* - \lim_\alpha a_\alpha = F \ \ , \ w^* - \lim_\beta x_\beta = x^{**}.$$