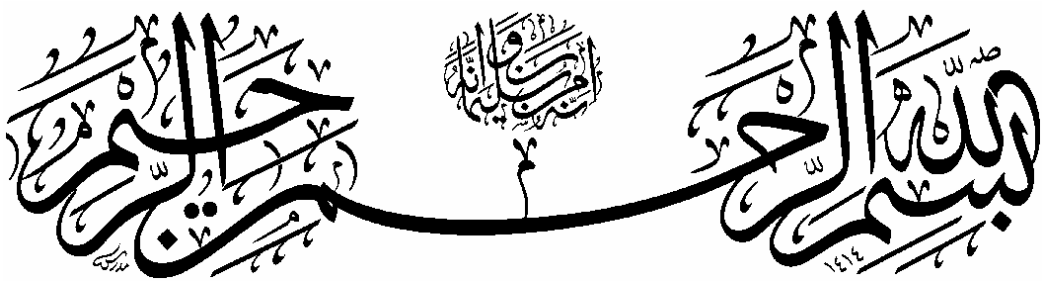

بسم الله الرحمن الرحيم
إنه من سليمان وإنه
١٤١٤

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

دانشکده علوم پایه

عنوان

معرفی یک مدل تعمیم یافته برای تحلیل پوششی داده‌ها

استاد راهنما

دکتر عقیله حیدری

استاد مشاور

دکترعلیرضا داوودی

نگارش

مهدیه بابایان

شهریور ۱۳۹۰

تشکر و قدر دانی

در اینجا لازم می‌دانم از زحمات استاد گرامی سرکار خانم دکتر حیدری که در انتخاب این موضوع و پیشرفت در آن اینجانب را راهنمایی نموده‌اند تشکر نمایم. همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر داوودی که با ارائه دانش خود در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه نقش مهمی را ایفا کردند کمال تشکر را دارم و از کمک و راهنمایی آقایان دکتر رنجبر و دکتر توحیدی سپاسگذارم.

مهدیه بابایان

شهریور ۱۳۹۰

فصل ۱

مقدمه ۲
۱-۱ تابع تولید ۲
۱-۱-۱ روش پارامتری ۲
۱-۱-۲ روش غیرپارامتری ٤
۱-۲ تحلیل پوششی داده ها(DEA) ٤
۱-۲-۱ مدل های DEA ٦
۱-۲-۲ تعریف ورودی ۷
۱-۲-۳ تعریف خروجی ۷
۱-۲-۵ وزن ها و محدودیت وزنی ۱۰
۱-۲-٦ مجموعه امکان تولید(PPS) ۱۳
۱-۲-۷ اندازه گیری ورودی محور ۱٦
۱-۲-۸ اندازه گیری خروجی محور ۱۷
۱-۲-۹ واحدهای همتا ۱۹
۱-۲-۱۰ اندازه گیری کارایی غیرشعاعی ۲۰
۱-۳ معرفی مدل های تحلیل پوششی داده ها ۲۲
۱-۳-۱ مدل بازده به مقیاس ثابت (CCR) ۲۳
۱-۳-۲ مدل بازده به مقیاس افزایشی (IRS) ۲۸
۱-۳-۳ مدل بازده به مقیاس کاهشی (DRS) ۳۲
۱-۳-٤ مدل بازده به مقیاس متغیر(VRS) ۳۵
۱-۳-۵ مدل ترکیبی ۳۸

۱-٤ روش انجام محاسبات در تحلیل پوشش داده ها ۳۹
۱-۵ مفاهیم محاسباتی در تحلیل پوششی داده ها ٤۱
۱-۵-۱ مجموعه امکان تولید ٤۱
۱-۵-۲ متغیرهای اصلی و متغیرهای کمبود و مازاد ٤۵
۱-۵-۳ تناسب بین تعداد پارامترهای مدل DEA و تعداد واحدهای تصمیم گیرنده ۵۱
۱-٦ رتبه بندی واحدها ۵۱
۱-٦-۱ رتبه بندی واحدهای ناکارا ۵۲
۱-٦-۲ رتبه بندی واحدهای کارا ۵۳

فصل ۲

مقدمه ۵۷
۲-۱ مدل DEA تعمیم یافته ۵۷
۲-۱-۱ حالت های مختلف مدل DEA تعمیم یافته ٦۰
۲-۲ روابط بین زیر بخشهای خاص مدل DEA تعمیم یافته ٦٦
۲-۳ معادل بودن کارایی DEA با وجود جواب های غیر مغلوب از مسئله های چند هدفی ٦۹

فصل ۳

مقدمه ۷۷
۳-۱ مدلDEA تعمیم یافته دو- هدفی(Bi-GDEA) ۷۹
۳-۱-۱ حالت های مختلف مدل Bi-GDEA ۸۰
۳-۲ معادل بودن بین کارایی Bi-GDEA و وجود جواب غیرمغلوب از برنامه چند هدفی ۸٤
۳-۳ بازده به مقیاس ۸٦
۳-٤ نگاشت نقطه به مجموعه و تصویر نگاشت نقطه به مجموعه ۸۹
۳-٤-۱ الگوریتم تصویر نگاشت نقطه به مجموعه ۹۰
۳-٤-۲ مثال ها ۹٤

۳-٤-۳ بررسی اشکالات الگوریتم تصویر نگاشت نقطه به مجموعه ۱۰۲
۳-۵ معرفی الگوریتم نگاشت نقطه به مجموعه اصلاح شده ۱۰۳
۳-٦ نتیجه گیری ۱۰۸
فصل ٤
مقدمه ۱۱۱
٤-۱ نگاشت نقطه به مجموعه و تصویر نگاشت نقطه به مجموعه در تعیین میزان تراکم ۱۱۱
٤-۲ الگوریتم تعیین تراکم ۱۱۳
٤-۳ مثال ها ۱۱۵
٤-٤ نتیجه گیری ۱۲۳
پیشنهادات ۱۲٤
واژه نامه ۱۲٦
فهرست منابع ۱۲۹

فصل اول

مبانی تحلیل پوششی داده‌ها

مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یکی از ابزارهای قدرتمند مدیریتی است. تحلیل پوششی داده‌ها با روش قدرتمندی که در دست دارد، قادر است مدیریت را در جهت نیل به اهداف عالی سازمان و در جهت استفاده بهینه از منابع و تخصیص آنها و در نهایت کسب سود آوری بیشتر یاری رساند. DEA ابزاری در اختیار مدیران قرار می‌دهد تا بتوانند بوسیله آن عملکرد شرکت خود رادر قبال سایر رقبا محک زنند و بر اساس نتایج آن برای آینده‌ای بهتر تصمیم گیری کنند.

تاکنون مطالعات و تحقیقات زیادی در انجمن‌های مختلف و دانشگاه‌های مختلف جهان در مورد تحلیل پوششی داده‌ها و کاربردهای آن صورت گرفته است. سادگی فهم و اجرای روش DEA و در کنار آن دقت بالا و کاربرد وسیع آن در زمینه‌های مختلف سیاسی، فرهنگی، اجتماعی و اقتصادی باعث شده است محققان زیادی از این روش برای دست یافتن به اهداف خود استفاده کنند.

در این نوشتار ابتدا به بررسی DEA، کاربردها و مدل‌ها و مفاهیم محاسباتی آن می‌پردازیم. DEA دارای چهار مدل اصلی و یک مدل کمکی است. در ادامه مفاهیم محاسباتی که در مدل‌های تحلیلی پوششی داده‌ها مطرح است و به درک و فهم بهتر DEA کمک می‌کند را بیان می‌کنیم.

۱-۱ تابع تولید

شناخت تابع تولید یکی از مهمترین موضوعات علم اقتصاد می‌باشد. تابع تولید تابعی است که بیشترین خروجی ممکن را از ترکیب ورودی‌ها فراهم می‌کند. بنابراین اگر مقدار خروجی را با Q و ورودی‌ها را با $X_1, X_2, \dots, X_n$ نشان دهیم، تابع تولید را می‌توان به صورت $Q = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ در نظر گرفت. تشخیص تابع تولید به دو صورت پارامتری و غیر پارامتری صورت می‌گیرد که در ادامه به طور خلاصه در مورد مفاهیم هر یک بحث می‌کنیم.

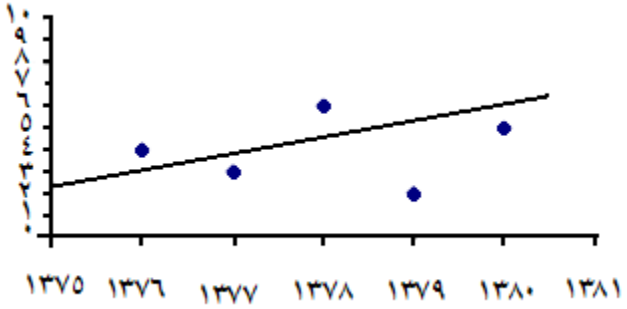
۱-۱-۱ روش پارامتری

در این روش برای تابع تولید پیش فرض اولیه‌ای در نظر گرفته شده، سپس با استفاده از اطلاعات موجود پارامترهای تابع تخمین زده می‌شود.

مثال۱.۱. فرض کنید می‌خواهیم رشد ناخالص ملی را در سال‌های آینده پیش بینی کنیم. داده‌های ۵ سال گذشته به صورت زیر می‌باشد:

(٤و ١٣٧٦) (٣و ١٣٧٧) (٦و ١٣٧٨) (٢و ١٣٧٩) (٥ و ١٣٨٠)

که در آن مولفه اول نشان دهنده سال و مولفه دوم نشان دهنده رشد ناخالص ملی در آن سال می‌باشد. نمایش نقاط فوق به شکل زیر خواهد بود.



شکل ۱- ۱

می‌خواهیم تابعی به صورت $Q = f(t)$ را که Q رشد ناخالص ملی و t زمان می‌باشد بر این داده‌ها برازش کنیم. ساده-ترین تابعی که می‌توان بر آن‌ها برازش داد، تابعی خطی است که شکل کلی آن به صورت زیر است :

$Q = at + b$ که در آن a و b پارامتر می‌باشند و با استفاده از روش‌های ریاضی معین می‌گردد.

اشکالات روش‌های پارامتری که باعث می‌شود تا این گونه روش‌ها برای ارزیابی واحدها مناسب نباشند به قرار زیر است :

۱- لزوم پیش فرض اولیه برای تابع تولید، ممکن است با ماهیت واحدهای تحت ارزیابی در تضاد باشد.

۲- در این روش ارزیابی واحدها با یک خروجی امکان پذیر است.

۳- منحنی برازش داده شده تمایل مرکزی دارد. بدین معنی که اکثریت غالب، مشخص کننده تکلیف پارامتر و در نتیجه شکل منحنی می‌باشند و داده‌های استثنایی که الگو یا شاخص مورد نظر می‌باشند، نقشی ندارند در حقیقت به صورتی نادیده گرفته می‌شوند. در نتیجه ماهیت غیر خطی بودن تابع تولید در این روش‌ها، محاسبات را پیچیده می‌کند.

۱-۱-۲ روش غیرپارامتری

این روش با استفاده از داده‌های در دسترس، تابع تولید را تخمین می‌زند و نیازی به در نظر گرفتن فرضیات محدودیت‌های تئوریک روی تابع تولید نیست. فارل در سال ۱۹۷۵ برای نخستین بار روش غیرپارامتری را مطرح کرد. او با استفاده از خروجی و ورودی‌های واحدهای تصمیم گیرنده (DMU)[۱] تابع تولید را چنان بر مجموعه خروجی و ورودی‌ها برازش داد که حاصل برازش فوق، یک تابع قطعه قطعه خطی بود. فارل با استفاده از مشاهدات و اصول انکار ناپذیر حاکم بر علم مورد نظر، مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید [۲] ساخت و مرز آن را تابع تولید نامید. هر واحد تصمیم‌گیرنده (مثلاً هر شعبه بانک، واحد آموزشی و... می‌تواند یک واحد تصمیم‌گیرنده باشد) که روی مرز این مجموعه قرار گیرد، واحد کارا بوده و در غیر این صورت ناکاراست.

مقاله فارل اساس کار مقاله چارنز[۳]، کوپر[٤] و رودز [٥] در سال ۱۹۷۸ قرار گرفت. آن‌ها تحلیل اولیه فارل را که در حالت یک خروجی و چند ورودی مطرح شد، به حالت چند ورودی و چند خروجی تعمیم دادند. ادامه دهندگان این روش ، بنکر[٦] ، چارنز و کوپر بودند که در سال ۱۹۷۸ مدل BCC یکی از مدل‌های DEA را ارائه دادند. این افراد پایه-گذاران مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها هستند که در مباحث بعدی با آن‌ها و نیز مدل‌های DEA بیشتر آشنا خواهیم شد.

۱-۲ تحلیل پوششی داده ها(DEA)[۷]

تحلیل پوششی داده‌ها یک ابزار کمی، استاندارد و با کاربرد گسترده در مطالعات اندازه‌گیری کارایی و تحلیل عملکرد می‌باشد. DEA کارایی نسبی واحدهایی که دارای ورودی و خروجی‌های مشابه هستند، اندازه گیری می‌کند. ما این گونه واحدها را واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) می‌نامیم.

---

۱ Decision Making Units
۲ Production Possibility Set
۳ Charnes
٤ Cooper
٥ Rhodes
٦ Banker
۷ Data Envelopment Analysis

DEA کارایی یک DMU را در مقایسه با سایر واحدها (DMU ها) ارزیابی می‌کند. به همین خاطر امتیاز کارایی DMU، یک امتیاز نسبی خواهد بود. ارزیابی و مقایسه عملکرد و کارایی واحدهای مشابه قسمت مهمی از مدیریت یک سازمان پیچیده می‌باشد. DEA راهکارهایی را برای مدیریت بهتر منابع جهت نیل به خروجی‌های مورد نظر ارائه می‌دهد. کارا بودن یا غیرکارا بودن یک DMU بستگی به عملکرد آن واحد در انتقال ورودی‌ها به خروجی-هایش در مقایسه با سایر واحدها در یک حوزه خاص دارد. DEA اخیراً در مجموعه علوم مدیریت قرار گرفته است. DEA برای اولین بار توسط چارنز، کوپر و رودز در سال ۱۹۷۸ ارائه شد و تاکنون تعداد زیادی مقاله، کتاب، پایان نامه و... در مورد تئوری‌ها و کاربردها ، محاسبات و مسائل مدلسازی DEA منتشر شده است.

مهمترین علت موفقیت DEA به عنوان یک ابزار کمی، غیر پارامتری بودن روش آن است. دلیل دیگر موفقیت DEA این است که مکانیسم طبقه‌بندی DMU در DEA طوریست که می‌تواند با توجه به بخشی از موضوعات مورد مطالعه قرار گیرد. هر DMU با استفاده از تعاریف تئوری استاندارد برای محاسبه کارایی، امتیازدهی می‌شود که این امتیاز بوسیله مقیاس‌های خاص که سعی در حداکثر نمودن امتیاز کارایی آن واحد دارند، محاسبه می‌شود.

از ویژگی‌های مهم DEA می‌توان موارد زیر را نام برد :

- قابلیت استفاده و فهم آسان و راحت
- ارزیابی واقع بینانه و ارزیابی توام مجموعه عوامل دخیل در مدل‌ها
- عدم نیاز به وزن‌ها و تابع تولید از پیش تعیین شده (غیرپارامتری)
- تصویر کردن بهترین وضعیت عملکردی بجای وضعیت مطلوب.
- قابلیت وارد نمودن چندین ورودی و چندین خروجی در مدل

قابلیت‌های کاربردی روش DEA عبارتند از :

- رتبه بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده
- ارائه واحدهایی جهت مقایسه کارایی و ارائه راهکارهای بهبود کارایی
- تعیین پیشرفت و پسرفت تکنیکی واحدها
- تخصیص بهینه منابع
- تحلیل حساسیت ورودی‌ها و خروجی‌ها
- تعیین پتانسیل‌های عملکردی

اما مانند سایر روش‌ها، DEA نیز دارای **معایبی** می‌باشد که می‌توان برخی از مهمترین آن‌ها را این گونه بیان کرد :

– در نظر نگرفتن اختلافات تصادفی و عوامل محیطی

(امروزه محققان زیادی سعی کرده‌اند تا با دخالت دادن اصول احتمال و مفاهیم منطق فازی این مشکل روش DEA را برطرف کنند.)

– غیرپارامتری بودن روش DEA که در برخی مواقع منجر به نتایج نه چندان مناسب می‌شود.

– حساسیت نتایج DEA نسبت به پراکندگی داده‌ها، پراکندگی داده‌ها منجر به ارائه نتایج نامطلوب می‌شود. به همین منظور فرض می‌شود که پراکندگی داده‌ها قابل چشمپوشی است.

روش DEA گاهی به عنوان روش اندازه‌گیری کارایی تکنیکی شناخته می‌شود. کارایی تکنیکی سعی دارد که حداکثر خروجی را با مصرف ورودی‌هایی که به واحد داده شده است ایجاد کند.

۱-۲-۱ مدل های DEA

DEA دارای چهار مدل اصلی می‌باشد :

۱- مدل بازده به مقیاس ثابت (CRS)[۱] یا (CCR)[۲]

این مدل که اولین مدل روش DEA است توسط چارنز، کوپر و رودز در سال ۱۹۷۸ ارائه شد. حروف CCR برگرفته از نام پدیدآورندگان مدل است.

۲- مدل بازده به مقیاس متغیر (VRS)[۳] یا (BCC)[٤]

این مدل توسط بنکر، چارنز و کوپر در سال ۱۹۸٤ ارائه شد و اغلب با حروف BCC شناخته می‌شود.

۳- مدل بازده به مقیاس افزایشی (IRS)[٥] یا (FG)[٦]

٤- مدل بازده به مقیاس کاهشی (DRS)[۷] یا (ST)[۸]

---

۱ Constant Returns to Scale
۲ Charens, Cooper and Rhodes
۳ Variable Returns to Scale
٤ Banker, Charens and Cooper
٥ Increasing Returns to Scale
٦Fare, Grosskopf
۷ Decreasing Returns to Scale
۸ Seiford, Thrall

مدل بازده به مقیاس متغیر (VRS) ترکیبی از دو مدل بازده به مقیاس افزایشی (IRS) و مدل بازده به مقیاس کاهشی (DRS) می‌باشد. فرض بازده به مقیاس به میزان افزایش یا کاهش کارایی و تغییر مرز کارایی برمی‌گردد که در مبحث شناخت مدل‌ها در مورد مفاهیم آن بحث می‌شود. هر کدام از مدل‌های فوق دارای دو جهت مطالعه (خروجی محور – ورودی محور) هستند. در مطالعاتی که باید یک DMU با یک یا چند واحد دیگر مقایسه شود از مدل‌های خروجی محور یا ورودی محور استفاده می‌شود. در برخی موارد به دنبال پیدا کردن یک DMU کارا برای انجام مقایسات هستیم، که در این صورت از مدل ترکیبی استفاده می‌شود. مدل ترکیبی یک مدل کمکی است و جزء مدل‌های اصلی DEA نمی باشد.

۵- مدل ترکیبی

این مدل توسط چارنز در سال ۱۹۸۵ ارائه شد و توسط ترال (۱۹۹۶) و کوپر (۱۹۹۸) و تن (۱۹۹۸) بسط و تعمیم یافت. این مدل دارای جهت مطالعه نمی‌باشد و برای هر یک از مدل‌های فوق (مدل اصلی DEA) یک مدل ترکیبی خواهیم داشت. کاربرد این مدل بیشتر برای کاهش حجم محاسبات می‌باشد.

اما از مفاهیم اولیه در مدل‌های DEA شناخت پارامترهای ورودی و خروجی در مدل‌ها می‌باشد که ابتدا به تعریف و شناخت آن‌ها می‌پردازیم.

۱-۲-۲ تعریف ورودی

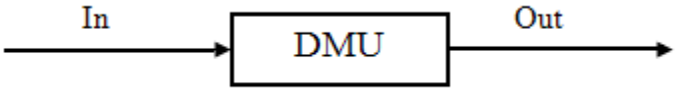
ورودی عاملی است که با افزایش آن، با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی کاهش یافته و با کاهش آن با حفظ تمام عوامل دیگر کارایی افزایش می‌یابد. در واقع رابطه معکوس بین میزان ورودی‌ها و کارایی وجود دارد. ورودی i ام واحد تصمیم گیرنده j را به صورت x_{ij} نشان می‌دهیم که در آن $i = ۱, \dots, m$ و $j = ۱, \dots, n$ می‌باشد.

۱-۲-۳ تعریف خروجی

خروجی عاملی است که با افزایش آن، با حفظ تمام عوامل دیگر کارایی افزایش یافته و با کاهش آن با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی کاهش می‌یابد. این بدین مفهوم است که رابطه یک به یک بین میزان خروجی‌ها و کارایی وجود دارد. خروجی r ام واحد تصمیم‌گیرنده j را به صورت y_{rj} نشان می‌دهیم که در آن $r = ۱, \dots, s$ می‌باشد.

۱-۲-٤ اندازه‌گیری کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها

اندازه‌گیری کارایی بر تئوری تولید استوار است. دراین تئوری یک شرکت یا یک سازمان یا یک DMU به عنوان یک سیستم تولید تلقی می‌شود که برای ایجاد محصول (خروجی)، منبع (ورودی) را مصرف می‌کند.



شکل ۱- ۲

تعریف متداول کارایی، پایه و اساس مدل‌های DEA است. این تعریف به صورت زیر است:

$$\text{کارایی واحد K} = \frac{\text{خروجی واحدK}}{\text{ورودی واحدK}} \qquad K = ۱, \dots, n$$

اما تعریف فوق تنها برای محاسبه کارایی واحدی مناسب است که دارای یک ورودی و یک خروجی باشد و همچنین در این تعریف نمی‌توان واحدهای مختلف را به طور همزمان دخالت داد. برای رفع این مشکل فارل در سال ۱۹۵۷ یک روش اندازه‌گیری جدید ارائه داد که مبنای تمام مدل‌های DEA قرار گرفت. این روش تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها را دربر می‌گیرد و عملکرد هر واحد در مقایسه با یک واحد با بهترین عملکرد، تحلیل و ارزیابی می‌شود. واحد با بهترین عملکرد از دو دیدگاه قابل بررسی است.

دیدگاه نظری : یک فرایند کامل به عنوان تابع تولید نظری مطلوب در نظر می‌گیرد و خروجی‌های ایجاد شده توسط فرایند به صورت تابعی از ورودی‌ها نمایش داده می‌شود. این تابع واحد با بهترین عملکرد را مشخص می‌کند (پارامتری).

دیدگاه تجربی : برخلاف روش نظری که دست یافتن به آن مشکل و اغلب غیرممکن است، واحد با بهترین عملکرد در مقایسه با یک مجموعه تولید نسبی که در عمل دست یافتنی است، مشخص می‌شود. مفهوم فوق، شالوده و اساس مدل‌های DEA می‌باشد.

روش فارل این را بازگو می‌کند که: یک صنعت (DMU) تا چه میزان می‌تواند خروجی‌هایش را با بهبود کاراییش، افزایش دهد بدون اینکه به منبع جدید نیاز باشد. فارل با در نظر گرفتن وزن‌هایی برای ورودی‌ها و خروجی-های یک DMU توانست مدلی با چند ورودی و یک خروجی ارائه دهد. اما هنوز مشکل دخالت چند خروجی در مدل وجود داشت که این مسئله نیز توسط چارنز و همکارانش حل شد. تعریف کارایی که از آن در مدل‌های DEA استفاده می‌شود به این صورت است :

$$\text{کارایی واحد K} = \frac{\text{مجموع وزن خروجی‌های واحد K}}{\text{مجموع وزن ورودی‌های واحد K}} \qquad K = ۱, \dots, n$$

در DEA مجموعه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A = [a_۱, \dots, a_n]$$
$$\text{s.t:} \quad a_j = \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{rj} \end{bmatrix} \neq ۰$$
$$r = ۱, \dots, s \qquad j = ۱, \dots, n \qquad i = ۱, \dots, m$$

مجموعه A ماتریسی با n ستون و $m + s$ سطر می‌باشد که m سطر آن متعلق به ورودی‌ها است به طوری که $X_j \geq ۰$ و s سطر آن متعلق به خروجی‌هاست که $Y_j \geq ۰$ می‌باشد. a_j را نقطه داده واحد j (DMU_j) می‌نامند که یک بردار ستونی با $m + s$ سطر می‌باشد. y_{rj} خروجی r ام واحد j می‌باشد و x_{ij} نشان دهنده ورودی i ام واحد j است.

هر چند اجزاء ورودی و خروجی یک نقطه داده می‌توانند مقادیر صفر داشته باشند ولی خود نقطه داده نمی‌تواند صفر باشد. یعنی باید حداقل یک ورودی یا خروجی مخالف صفر داشته باشد. این فرض از اینکه یک واحد بدون خروجی داشته باشیم و یا تصور اینکه یک واحد چیزی را به واحدهای دیگر منتقل نمی‌کند، جلوگیری می‌کند. این یک فرض استاندارد در DEA می‌باشد.

هر a_j مجموعه‌ای از مقادیر مشخص را شامل می‌شود که خلاصه‌ای از فرایند تبدیل ورودی به خروجی را جمع بندی می‌کند. در واقع هر نقطه داده، در برگیرنده خصوصیات ورودی‌ها و خروجی‌های یک DMU است. DMUهایی که در مدل‌های DEA مورد استفاده قرار می‌گیرند دارای خصوصیات ورودی و خروجی مشابه می‌باشند و

این خصوصیات منعکس کننده فعالیت‌های آن DMU است، و این تشابه خصوصیات، اندازه‌گیری با معنی از کارایی نسبی را به دست می‌دهد.

حال اگر وزن‌های متناظر با خروجی r را با $u_r \ (r = ۱, \dots, s)$ و وزن‌های متناظر با ورودی i را با v_i $(i = ۱, \dots, m)$ نمایش دهیم. در این صورت بهره وری (کارایی) واحد تصمیم‌گیرنده j به صورت زیر محاسبه می-شود:

$$E_j = \frac{\sum_r u_r \times y_{rj}}{\sum_i v_i \times x_{ij}} \qquad (۱-۱)$$

در ادامه در مورد وزن‌ها و نحوه ارائه مدل اصلی DEA بحث خواهد شد.

۱-۲-۵ وزن ها و محدودیت وزنی

وزن‌های $u_r \ (r = ۱, \dots, s)$ و وزن‌های $v_i \ (i = ۱, \dots, m)$ و کارایی E_j $(j=۱,\dots,n)$ را تعریف کردیم. امامسئله اصلی تخصیص این وزن‌هاست. به عنوان یک ایده می‌توان از یک مجموعه ثابت برای وزن‌های ورودی و خروجی‌ها استفاده کرد. اما این گونه مجموعه‌ها اختیاری است و ممکن است از نقطه نظر برخی نقاط داده‌ای (DMU) (که دراین مجموعه نمره (وزن) کمتری دریافت می‌کنند) غیرمنصفانه جلوه کند و از طرفی در صورتی که وزن‌ها یکسان باشد، ممکن است یک DMU که عملاً غیرکارا است (دارای خروجی j یا ورودی i با ارزش کم) به عنوان یک DMU با ارزش بالاتر برای آن خروجی یا ورودی طبقه بندی شود.

برای رفع این مشکل چارنز و همکارانش (۱۹۷۸) پیشنهاد دادند که هر DMU اجازه دارد وزنش را خودش انتخاب کند. اما باید قوانینی برای انتخاب وزن‌ها توسط خود DMU وجود داشته باشد. در غیر این صورت باز ایده ما غیرمنصفانه خواهد بود.

قوانین انتخاب وزن DMUها

- اولین قانون این است که بعد ازاینکه یک DMU وزن‌های خود را انتخاب کرد این وزن‌ها برای سایر DMU-ها استفاده خواهد شد. بنابراین این DMU ها میزان حداکثر امتیاز کارایی آن DMU با توجه به وزن‌هایی که برای خود انتخاب کرده است، مدیریت و کنترل خواهند کرد. وجود این DMUها نشانه آن است که واحدی که امتیازدهی می‌شود از لحاظ عملکردی کارا نیست. در این استاندارد برای اینکه مشخص شود واحد

غیرکاراست وزن‌ها باید امتیاز کارایی واحد فوق را حداکثر کنند، تا فرض غیرمنصفانه بودن وزن‌ها برطرف شود.

- قانون دیگر این است که به هر حال وزن‌ها دارای یک میزان حداکثر خواهند بود و مقدار آن ها محدود خواهد شد زیرا مجموع امتیاز کارایی هر DMU نمی‌تواند از یک مقدار مثبت و ثابت (L) تجاوز کند زیرا امتیاز کارایی هر واحد در مقایسه با سایر واحدها محاسبه می‌شود. این قانون علاوه بر نرمالیزه کردن و جلوگیری ازابتذال، شرایط آسان و شایسته‌ای را برای اینکه یک DMU کارا باشد ، فراهم می‌کند. مثلاً واحدی که امتیاز یکسانی از برخی مجموعه‌های وزنی بدست می‌آورد.
- قانون دیگر این است که وزن ها نمی توانند صفر شوند زیرا در غیر این صورت اگر دو DMU که دارای ارزش ورودی‌ها و خروجی‌های یکسان به جز در یکی از ورودی‌ها (خروجی‌ها) باشند ، با انتخاب وزن برای آن ورودی (خروجی) دارای امتیاز کارایی یکسان خواهند شد.

برای رفع این مشکل چارنز و همکارانش استفاده از مقادیر غیرارشمیدسی ε (مقدار ثابت مثبت و کوچک) پیشنهاد داده‌اند (۱۹۶۲). نحوه محاسبه ε به صورت زیر است :

$$\varepsilon \leq \min\{\frac{۱}{max\{\sum_i x_{ij}\}} , \frac{۱}{\min\{\sum_r y_{rj}\}}\}$$

باید توجه داشت که اگر رابطه زیر برقرار شود، مسئله نامحدود خواهد شد :

$$\varepsilon \geq \{\frac{۱}{\min\{\sum_i x_{ij}\}}\}$$

حال بر اساس آنچه گفته شد مدل اصلی DEA را ارائه می‌دهیم. اگر ماکزیمم عبارت زیر را بدون هیچ گونه محدودیتی بیابیم، در این صورت مسئله نامحدود خواهد شد.

$$E_j = \frac{\sum_r u_r \times y_{rj}}{\sum_i v_i \times x_{ij}}$$

به همین خاطر محدودیتی به مسئله اضافه می‌شود تا بهره‌وری حاصل از این وزن‌ها برای تمام واحدها در یک بازه معین $[۰, L]$ قرار گیرد.

$$\max \frac{\sum_r u_r \times y_{rj}}{\sum_i v_i \times x_{ij}}$$
$$s.t$$
$$\frac{\sum_r u_r \times y_{rj}}{\sum_i v_i \times x_{ij}} \leq L$$
$$v_i \geq ۰ , u_r \geq ۰$$

y_k و x_k خروجی‌ها و ورودی‌های آن DMU_k هستند که در مسئله فوق ارزش گذاری می‌شود. در اغلب موارد، L را برابر ۱ در نظر می‌گیرند تا بهره‌وری واحدها در بازه $[۰,۱]$ قرار گیرد. از طرفی غیرصفر بودن وزن‌ها را با استفاده از مقدار غیرارشمیدسی ε ارضا می‌کنیم.

به دلیل مثبت و کوچک بودن ε ، در محاسبات امتیاز کارایی نسبی خللی وارد نمی‌کند و از طرفی همان طور که گفته شد تحلیل و طبقه بندی DMU ها را واقع بینانه تر می‌سازد. بنابراین خواهیم داشت :

$$\max_k \ E_k$$
$$s.t:$$
$$E_j \leq ۱ \qquad j = ۱, \dots, n \qquad (۲-۱)$$
$$v_i \geq \varepsilon \ , \ u_r \geq \varepsilon$$

از طرفی برخی از DMU ها ممکن است با انتخاب وزن بسیار بزرگی برای یکی از ورودی‌ها یا خروجی‌های خود که دارای ارزش کمتری است، خود رابه عنوان یک واحد کارا جلوه دهند. بدین منظور برای جلوگیری از تخصیص وزن‌های زیادی به آن‌ها، روی فاکتورهای وزنی محدودیت وزنی قائل می‌شوند. ما این محدودیت را با حروف UB نمایش می‌دهیم که نشان دهنده مرز بالای فاکتورهای وزنی است. و همچنین برای مرز پایین فاکتورها از LB استفاده می‌کنیم که بیانگر مرز پایین است. بنابراین محدودیت‌های وزنی را به صورت

$$LB \leq u_r \qquad or \qquad v_i \leq UB$$

در مدل نمایش می‌دهیم. به منظور مشخص کردن مقادیر مناسب برای مرزها، یک راه، حل مدل بدون مرز و مشخص کردن ناهنجاریها در نتایج و سپس محاسبه مرزها است و درمرحله بعد مرزها به عنوان مرزهای بالا و پایین محدودیت-های مدل اصلی DEA افزوده می‌شوند تا مدل محدودیت وزنی مطلق به دست آید.