دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

موضوع

عدد جمعی یکالی حلقه های خود انژکتیو

نگارش

ندا پویان

استاد راهنما

دکتر ناهید اشرفی

استاد مشاور

دکتر رحمان بهمنی سنگسری

مهرماه ۱۳۸۸

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

پروردگارا

به من آرامشی عطا فرما

تا بپذیرم آنچه که نمی توانم تغییر دهم

دلیری ده

تا تغییر دهم آنچه که می توانم تغییر دهم

بینش ده

تا تفاوت این دو را بدانم

مرا فهم ده

تا متوقع نباشم دنیا و مردم آن

مطابق میل من رفتار کنند

آمین

تقدیر و تشکر

وظیفه‌ی خویش می دانم که تمام قدردانی خویش را نثار اساتید گرانمایه‌ام در طی مراحل تحصیلی بنمایم. از استاد ارجمندم سرکار خانم دکتر ناهید اشرفی که در طول تحصیل و تدوین این پایان نامه همواره مشوق من بوده و با دقت تمام مرا یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر نمایم.

از اساتید محترم دکتر میمنی (داور خارجی) و دکتر معدن‌شکاف (داورداخلی) که زحمت مطالعه پایان نامه اینجانب را بر عهده گرفته‌اند تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از استاد مشاور محترم آقای دکتر رحمان بهمنی سنگسری که یاریم رساندند، سپاسگذارم.

در پایان از دوستان مهربانی که مرا در این مهم، همراهی نمودند، خالصانه سپاسگذارم و امیدوارم مراحل دشوار زندگی را به یاری خداوند به سر منزل آرامش برسانند.

نداپویان

مهرماه ۱۳۸۸

تقدیم به :

فرشتگانی که با وجود آنها پرورش یافته‌ام

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به بررسی مفهوم عدد جمعی یکالی حلقه‌ها و مدول‌ها می پردازیم و سپس انواع حلقه‌های خود انژکتیو راست را معرفی می کنیم و نشان می دهیم که هر عضو از حلقه‌ی خود انژکتیو راست به‌صورت مجموعی از دو یکال می باشد اگر و تنها اگر هیچ فاکتوری از حلقه با $\mathbb{Z}_2$ یک‌ریخت نباشد. هم‌چنین عدد جمعی یکالی حلقه‌ی درون‌ریختی‌های یک مدول شبه‌پیوسته با خاصیت تبادل متناهی را مورد بررسی قرار می دهیم. سپس در این پایان نامه نشان می دهیم که هر عضو از حلقه‌ی درون‌ریختی‌های یک مدول هم‌تاب یکدست به‌صورت مجموعی از دو یکال می باشد اگر و تنها اگر هیچ فاکتوری از حلقه با $\mathbb{Z}_2$ یک‌ریخت نباشد.

در ادامه ما توانستیم عدد جمعی یکالی مدول‌های هارادا و گسسته را بدست بیاوریم و نشان دادیم که هر عضو از حلقه‌ی درون‌ریختی‌های یک مدول شبه‌گسسته با خاصیت تبادل متناهی را می توانیم به صورت مجموع دو یکال بنویسیم اگر هیچ فاکتوری از حلقه با $\mathbb{Z}_2$ یک‌ریخت نباشد.

در پایان عدد جمعی یکالی حلقه‌های خوش ترکیب با خود توانهای مرکزی را بدست می آوریم.

واژه‌های کلیدی: عدد جمعی یکالی، حلقه‌ی خود انژکتیو راست، مدول پیوسته، مدول هارادا، مدول گسسته، حلقه‌ی خوش ترکیب، خاصیت تبادل متناهی.

مقدمه

در این پایان نامه ابتدا با مفهوم عدد جمعی یکالی حلقه‌ها و مدول‌ها آشنا می شویم. این مفهوم برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط گولد اسمیت [1] [۱۳] معرفی شده است. بعد از آن در سال ۱۹۹۹، چن [2] [٦] عدد جمعی یکالی حلقه‌های تبادلی را با شرط این‌که حلقه تبادلی فاکتور یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_2$ نداشته باشد را بدست آورد. در سال ۲۰۰۵ اشرفی و ووموس [3] [۴] نیز به بررسی عدد جمعی یکالی برخی حلقه‌ها پرداختند و هم‌چنین روابط بین عدد جمعی یکالی حلقه‌ها و حلقه گروه‌ها را بدست آوردند. در سال ۲۰۰۷ اشیش [4] در [۲۰] عدد جمعی یکالی حلقه‌های خود انژکتیو راست را مورد بررسی قرار داد و نشان داد در صورتی‌که حلقه فاکتور یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_2$ نداشته باشد دارای عدد جمعی یکالی ۲ می باشد. هم‌چنین او در [۲۱] عدد جمعی یکالی حلقه‌های خود انژکتیو راست را به طور دقیق مشخص کرد و نشان داد که در چه حالت هایی عدد جمعی یکالی حلقه‌های خود انژکتیو راست ۲، ω و ∞ می باشد که بیشتر مطالب فصل‌های ۲ و ۳ این پایان نامه بر گرفته از این دو مقاله می باشند.

مطالعه روی حلقه‌هایی که به وسیله‌ی یکال‌هایشان تولید می شوند بین سال‌های ۱۹۵۴—۱۹۵۳ آغاز شد. زمانی که ولفسون [5] [۳۵] و زیلنسکی [6] [۳٦] به طور مستقل ثابت کردند که هر تبدیل خطی از یک فضای برداری V (با بعد متناهی یا نامتناهی) روی حلقه‌ی تقسیم D را می توان به صورت مجموع دو تبدیل خطی نامنفرد نوشت بجز وقتی که $dimV = 1$ و $D = \mathbb{Z}_2$ باشد.

این پایان نامه در ۴ فصل تنظیم شده است. در فصل اول با تعاریف اولیه از انواع حلقه، گروه و مدول آشنا خواهیم شد. در این میان لم‌ها، گزاره‌ها و قضایایی را بیان کرده‌ایم که در درک بهتر مطالب فصل‌های بعدی بسیار مفید خواهد بود. در فصل دوم که در سه بخش تنظیم شده است، ابتدا به بررسی مفهوم عدد جمعی یکالی حلقه‌ها و مدول‌ها می پردازیم و هم‌چنین گزاره‌ها و قضایایی را در این مورد بیان می کنیم. در بخش دوم حلقه‌های خود انژکتیو راست را معرفی می کنیم و به بررسی انواع این حلقه‌ها و روابط بین آن‌ها می پردازیم و برخی از خواص آن‌ها را بیان می کنیم. در بخش پایانی این فصل عدد جمعی یکالی حلقه‌های خود انژکتیو راست را به طور دقیق مشخص می کنیم.

---

[1] Goldsmith
[2] Chen
[3] Vamos
[4] Ashish
[5] Wolfson
[6] Zelinsky

فصل سوم را به عدد جمعی یکالی چند نوع مدول اختصاص داده‌ایم. در بخش اول این فصل مدول‌های پیوسته و شبه‌پیوسته را معرفی می کنیم و نشان می دهیم که هر عضو از حلقه‌ی درون‌ریختی‌های یک مدول شبه‌پیوسته با خاصیت تبادل متناهی را می توان به صورت مجموع دو یکال نوشت اگر حلقه‌ی درون ریختی‌های آن فاکتوری یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_2$ نداشته باشد. بخش دوم این فصل نیز به عدد جمعی یکالی مدول‌های هم‌تاب یکدست و حلقه– گروه‌ها اختصاص داده‌ایم.

با توجه به مباحث فصل‌های گذشته این انگیزه در ما ایجاد شد که به بررسی عدد جمعی یکالی مدول‌های گسسته و حلقه‌ی درون ریختی‌های یک مدول شبه‌گسسته با خاصیت تبادل متناهی بپردازیم. برای این منظور در بخش اول فصل ۴ ابتدا مدول‌های هارادا را معرفی می کنیم و عدد جمعی آن‌ها را بدست می آوریم و در ادامه نشان می دهیم که هر مدول گسسته، هارادا می‌باشد و در حقیقت به هدف خود دست می یابیم.

حلقه‌های خوش ترکیب برای اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط نیکولسن [۷] در [۲۴] معرفی شدند. پس از آن وی و همکارانش از جمله ژو[۸] و هان [۹][۲۶] به بررسی بیشتر این حلقه‌ها پرداختند و توانستند چندین نوع از حلقه‌های خوش ترکیب را معرفی کنند.

نیکولسن در [۵] نشان داد که حلقه‌های خود انژکتیو راست و مدول‌های پیوسته و گسسته خوش ترکیب می باشند این باعث شد که ما به بررسی عدد جمعی یکالی حلقه‌های خوش ترکیب بپردازیم. در حقیقت در بخش دوم فصل ۴ ماعدد جمعی یکالی حلقه‌های خوش ترکیب با خود توانهای مرکزی را بدست می آوریم. در اینجا تمامی تعاریف، مثال‌ها، لم‌ها، گزاره‌ها، قضیه‌ها و نتایج ابتدا با شماره فصل، بعد با شماره بخش و سپس با شماره‌ی مطلب مورد نظر آورده شده است.

---

[۷] Nicholson
[۸] Zhou
[۹] Han

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز آشنا خواهیم شد که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. اثبات قضایایی که کاربرد فراوان دارند ارائه می گردد. از اثبات سایر قضایا صرف نظر می شود و آن‌ها را ارجاع می دهیم.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه و M مجموعه‌ای ناتهی باشد. عمل جمع $+ : M \times M \rightarrow M$ که برای هر $x, y \in M$، به صورت $+(x, y) = x + y$ تعریف می‌شود و ضرب اسکالر $* : R \times M \rightarrow M$ که برای هر $x \in M$ و $r \in R$، به صورت $*(r, x) = r * x = rx$ تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. M همراه با عمل جمع و ضرب بالا را $R-$مدول چپ می‌نامیم، هرگاه

۱) $(M, +)$ گروهی آبلی باشد،

۲) به ازای هر دو عضو از M مثل y, x و هر عضو از R مثل r، $r(x + y) = rx + ry$،

۳) به ازای هر عضو M مثل x و هر دو عضو R مثل s و r، $(r + s)x = rx + sx$،

۴) به ازای هر عضو M مثل x و هر دو عضو R مثل s و r، $(rs)x = r(sx)$،

۵) به ازای هر عضو M مثل x، $1x = x$.

تعریف ۲.۱.۱ یک فضای برداری متشکل است از:

۱) یک میدان F از اسکالرها،

۲) یک مجموعه V از اشیایی به نام بردارها،

۳) یک قاعده (یا عمل) به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β از V، بردار $\alpha+\beta$ از V را که مجموع α و β نامیده می شود وابسته می سازد با این شرط که

الف) جمع جابجایی است، یعنی $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

ب) جمع شرکت پذیر است، یعنی به ازای هر α, β, γ از V، $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

پ) بردار یکتای 0 به نام بردار صفر در V موجود است به طوری که به ازای هر α در V، $\alpha+0=\alpha$.

ت) به ازای هر بردار α در V، بردار یکتای $-\alpha$ در V موجود است به طوری که $\alpha+(-\alpha)=0$.

۴) یک قاعده (یا عمل) به نام ضرب اسکالری که به اسکالر c از F و هر بردار α از V بردار $c\alpha$ در V را که حاصل ضرب c و α نامیده می شود، وابسته می سازد با این شرایط که

الف) به ازای هر α در V، $1\alpha=\alpha$.

ب) به ازای هر $\alpha \in V$ و هر $c_1, c_2 \in F$، $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$.

پ) به ازای هر $c \in F$ و هر $\alpha, \beta \in V$، $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$.

ت) به ازای هر $c_1, c_2 \in F$ و $\alpha \in V$، $(c_1+c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم I ایدال سره‌ای از حلقه‌ی R باشد. رابطه‌ی هم‌ارزی روی R به پیمانه‌ی I را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a \equiv b (mod\ I) \text{ اگر و تنها اگر } a-b \in I$$

به راحتی می توان دید که این رابطه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی هر عضو از R به صورت $a+I=\{a+x \mid x \in I\}$ می باشد که آن را هم‌مجموعه‌ی I نامیم. فاکتور حلقه R مجموعه‌ی

همه‌ی هم مجموعه‌های I می باشد که با اعمال جمع و ضرب زیر تشکیل یک حلقه می دهند:

$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$ و $(a+I)(b+I)=(ab)+I$

عضو همانی جمعی آن $(\circ+I)$ و عضو همانی ضربی آن $(1+I)$ می باشد. علاوه بر این نگاشت طبیعی $\varphi : R \to R/I$، یک هم‌ریختی حلقه‌ای است به طوری که برای هر $a \in R$، $a \to a/I$ و $Ker\varphi = I$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم F میدان و V مجموعه‌ای ناتهی باشد، هرگاه V همراه با عمل جمع $+ : V \times V \to V$ و ضرب اسکالر $* : F \times V \to V$، $F-$مدول چپ باشد، آن‌گاه V را فضای برداری روی میدان F نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم M و N دو $R-$مدول باشند. $Hom_R(M,N)$ مجموعه‌ی همه‌ی $R-$مدول هم‌ریختی‌ها از M به N است که تحت جمع توابع یک گروه آبلی است و با ترکیب توابع یک حلقه خواهد شد. $Hom_R(M,M)$ را حلقه‌ی $R-$درون‌ریختی‌های M نامیم و با نماد $End_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ اگر R حلقه باشد و G گروهی متناهی، RG را مجموعه‌ی تمام حاصل جمع‌های صوری $\sum_{g\in G} x_g.g$ در نظر می گیریم که در آن $x_g \in R$ و تعداد متناهی از x_g ها مخالف صفر است. اگر 1_g را همان g در نظر بگیریم و $a1$ را همان a، می توانیم فرض کنیم که RG هم گروه G و هم حلقه‌ی R را در بر دارد. تساوی دو عضو از RG را نیز به طور طبیعی، یعنی تساوی ضرایب متناظر آن دو عضو، تعریف می کنیم. اکنون جمع و ضرب را روی RG به صورت

$$\sum_{g\in G} x_g.g + \sum_{g\in G} y_g.g = \sum_{g\in G}(x_g+y_g).g$$

$$(\sum_{g\in G} x_g.g)(\sum_{k\in G} y_k.k) = \sum_{t\in G} z_t.t$$

تعریف می کنیم که در آن

$$z_t = \sum_{gk=t\in G} x_g y_k.$$

RG با این اعمال تشکیل یک حلقه می‌دهد که به آن حلقه–گروه می‌گوییم.
روشن است که $1_R.1_G$ عنصر همانی ضربی RG است که در آن 1_R همانی ضربی حلقه‌ی R و 1_G عنصر همانی گروه G است.

قرارداد ۷.۱.۱ برای سهولت در نوشتن بجای $x = \sum_{g\in G} x_g.g$ از $x = \sum x_g.g$ استفاده می کنیم.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد، عنصر e متعلق به R را خودتوان نامیم هرگاه، $e^2 = e$ و مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان‌های حلقه‌ی R را با $Id(R)$ نمایش می دهیم. عنصر خودتوان e را مرکزی نامیم هرگاه به ازای هر عنصر $r \in R$، $re = er$. خودتوان‌های مرکزی حلقه‌ی R را با نماد $B(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم e یک عنصر خود توان از حلقه‌ی R باشد، در این صورت حلقه‌ی eRe را حلقه‌ی گوشه‌ایی حلقه‌ی R می نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ گروه G را موضعاً متناهی نامیم، اگر هر زیر گروه متناهی مولد آن متناهی باشد.

مثال ۱۱.۱.۱ با توجه به تعریف یک گروه موضعاً متناهی روشن است که هر گروه متناهی، موضعاً متناهی است.

تعریف ۱۲.۱.۱ گروهی که در آن هر عنصر مرتبه‌اش توانی ($0 \geq$) از عدد اول ثابتی مانند p است، یک p–گروه نامیده می شود.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی یکدار باشد. عنصر $a \neq 0$ متعلق به R را یکال نامیم، هرگاه تحت ضرب حلقه وارون پذیر باشد. مجموعه‌ی عناصر یکال حلقه را با نماد $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ خودتوان‌های e_1 و e_2 از حلقه‌ی R را خود توان‌های متعامد گوییم هرگاه $e_1e_2 = 0_R = e_2e_1$.

تعریف ۱۵.۱.۱ خود توان e در حلقه‌ی R را خود توان آبلی گوییم، هرگاه حلقه‌ی eRe جابه جایی باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ حلقه‌ی R را اول گوییم، هرگاه برای هر جفت از ایدال های ناصفر I_1, I_2 از R، $I_1 I_2 \neq 0$.

تعریف ۱۷.۱.۱ خود توان e در حلقه‌ی R را وفادار نامیم، هرگاه صفر تنها خود توان مرکزی عمود بر آن باشد.

مثال ۱۸.۱.۱ اگر R حلقه‌ی اول باشد آن‌گاه، $B(R) = \{0, 1\}$. بنابراین هر خود توان ناصفر از R، وفادار است.

تعریف ۱۹.۱.۱ یک حلقه منظم آبلی نامیده می شود، اگر همه‌ی خود توان‌های آن مرکزی باشند.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم I یک ایدال از حلقه‌ی R باشد. گوییم خودتوان‌ها به پیمانه‌ی I انتقال می‌یابند هرگاه برای هر $x \in R$ که $x^2 - x \in I$، عنصر خودتوان $e \in R$ موجود باشد به طوری که $x - e \in I$. به عبارت دیگر اگر $\bar{x} = x + I$ عنصر خودتوانی از حلقه‌ی R/I باشد آن‌گاه عنصر خودتوان $e \in R$ یافت شود به قسمی که $\bar{x} = \bar{e}$.

تعریف ۲۱.۱.۱ حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی بولی نامیم، هرگاه هر عنصر R خود توان باشد.

مثال ۲۲.۱.۱ $\mathbb{Z}_2$ یک حلقه‌ی بولی است.

مثال ۲۳.۱.۱ هرگاه X یک مجموعه غیر تهی باشد آن‌گاه حلقه‌ی $(P(X), \triangle, \cap)$ یک حلقه‌ی بولی است.

تعریف ۲۴.۱.۱ اشتراک همه‌ی ایدال‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را رادیکال جیکوبسون حلقه‌ی R نامیم و آن را با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۱.۱ حلقه‌ی R را موضعی نامیم، هرگاه تنها یک ایدال ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۲۶.۱.۱ حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی ساده نامیم، هرگاه $R \neq \{0\}$ و هم‌چنین $\{0\}$ و R تنها ایدال‌های R باشند.

مثال ۲۷.۱.۱ هر حلقه‌ی تقسیم، یک حلقه‌ی ساده است.

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنیم M، $R-$مدولی غیر صفر باشد. M را ساده نامیم، هرگاه 0 و M تنها زیرمدول‌های M باشند.

مثال ۲۹.۱.۱ فرض کنید p عددی اول باشد. در این صورت گروه آبلی $\mathbb{Z}_p$ زیر گروه غیر بدیهی ندارد. وقتی $\mathbb{Z}_p$ را به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول در نظر می گیریم، زیر مدول‌هایش دقیقاً همان زیر گروه‌های $\mathbb{Z}_p$، به عنوان گروه هستند. پس $\mathbb{Z}_p$، به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول زیر مدول غیربدیهی ندارد و در نتیجه ساده است.

تعریف ۳۰.۱.۱ مدول M را تجزیه ناپذیر نامیم، هرگاه به غیر از 0 و M جمعوند دیگری نداشته باشد.

تعریف ۳۱.۱.۱ فرض کنیم M، یک $R-$مدول باشد. M را نیم‌ساده نامیم، هرگاه زیرمدول های ساده از M مانند $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ موجود باشند به طوری که $M = \oplus_A T_\alpha$.

مثال ۳۲.۱.۱ هر مدول ساده، نیم ساده است.

تعریف ۳۳.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد، R را یک حلقه‌ی نیم‌ساده‌ی چپ (راست) نامیم، هرگاه R به عنوان $R-$مدول چپ (راست) نیم‌ساده باشد.

تعریف ۳۴.۱.۱ زیرمدول K از $R-$مدول M را در M اساسی نامیم هرگاه برای هر زیرمدول $L \leq M$ که $K \cap L = 0$ آن‌گاه، $L = 0$ و آن را با نماد $K \subseteq_e M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۵.۱.۱ مدول M را نامنفرد گوییم، هرگاه هیچ عنصر غیر صفر آن توسط هیچ ایدال اساسی از R پوچ نشود.

مثال ۳۶.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی ساده باشد در این صورت R_R، یک مدول نامنفرد است.

تعریف ۳۷.۱.۱ زیرمدول K از $R-$مدول M را بسیار کوچک نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول L از M که $L+K=M$، داشته باشیم $L=M$ و آن را با نماد $K \ll M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۸.۱.۱ فرض کنیم M و N، $R-$مدول باشند. تک‌ریختی $f: N \longrightarrow M$ را اساسی نامیم هرگاه، $Im(f) \subseteq_e M$.

تعریف ۳۹.۱.۱ فرض کنید M و N، $R-$مدول باشند. بروریختی $g: M \longrightarrow N$ را بسیار کوچک نامیم هرگاه، $Ker(g) \ll M$.

تعریف ۴۰.۱.۱ $R-$مدول P، تصویری است هرگاه برای هر $R-$هم‌ریختی پوشا از M به N و هر هم‌ریختی از P به N، یک هم‌ریختی از P به M موجود باشد به طوری که نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & h \swarrow & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \rightarrow & ۰ \end{array}$$

تعریف ۴۱.۱.۱ فرض کنیم U و M، $R-$مدول راست باشند. آن‌گاه U را $M-$تصویری نامیم، هرگاه برای هر بروریختی $g: M \longrightarrow N$، و هر هم‌ریختی $f: U \longrightarrow N$، یک هم‌ریختی از U به M موجود باشد به طوری که نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & h \swarrow & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \rightarrow & ۰ \end{array}$$

تعریف ۴۲.۱.۱ $R-$مدول U را شبه‌تصویری نامیم، هرگاه $U-$تصویری باشد.

تعریف ۴۳.۱.۱ فرض کنیم I ایدالی از حلقه‌ی R باشد. مدول E را انژکتیو نامیم، هرگاه هر هم‌ریختی از I به E، به یک هم‌ریختی از R به E توسیع یابد یعنی نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & I & \xrightarrow{f} & R \\ & & g\downarrow & \swarrow h & \\ & & E & & \end{array}$$

تعریف ۴۴.۱.۱ فرض کنیم A یک $R-$مدول باشد. یک $R-$مدول N را $A-$انژکتیو نامیم هرگاه برای هر زیرمدول X از A، هر هم‌ریختی از X به N قابل توسیع به یک هم‌ریختی از A به N باشد به طوری که نمودار زیر جابه‌جایی باشد.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & X & \xrightarrow{f} & A \\ & & g\downarrow & \swarrow h & \\ & & N & & \end{array}$$

تعریف ۴۵.۱.۱ مدول Q را شبه انژکتیو نامیم هرگاه $Q-$انژکتیو باشد.

تعریف ۴۶.۱.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول راست (چپ) باشد. جفت (P,p) را یک پوشش تصویری مدول M_R نامیم هرگاه P یک $R-$مدول راست (چپ) تصویری و p یک بروریختی بسیار کوچک از P به M باشد.

تعریف ۴۷.۱.۱ حلقه‌ی R را نیم‌کامل نامیم هرگاه $R/J(R)$ نیم‌ساده باشد و خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ انتقال یابند.

مثال ۴۸.۱.۱ حلقه‌های موضعی نیم‌کامل هستند.

تعریف ۴۹.۱.۱ مدول P را نیم‌کامل نامیم هرگاه P یک مدول تصویری باشد و تصویر هم‌ریخت آن یک پوشش تصویری داشته باشد.

تعریف ۵۰.۱.۱ جفت (E,i) را غلاف انژکتیو از M گوییم، هر گاه E یک $R-$مدول چپ انژکتیو باشد و تک‌ریختی $0 \to M \to E$ تک‌ریختی اساسی باشد؛ به عبارت دیگر $Im\ i \trianglelefteq E$.

مثال ۵۱.۱.۱ چون حلقه‌ی $\mathbb{Q}$، به عنوان $\mathbb{Z}$–مدول، انژکتیو می باشد واضح است که نگاشت شمول $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$، تک‌ریختی اساسی است، بنابراین $(\mathbb{Q}, i)$ یک انژکتیو اینولپ از $\mathbb{Z}$ می باشد.

تعریف ۵۲.۱.۱ مدول انژکتیو E را نامنفرد گوییم اگر هر هم‌ریختی از یک زیر مدول اساسی از مدول دلخواه F به E به طور یکتا به هم‌ریختی از F به E توسیع یابد.

تعریف ۵۳.۱.۱ عنصر x از حلقه‌ی R را یک عنصرمنظم نامیم، هرگاه $y \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $xyx = x$. حلقه‌ی R را منظم (وان — نیومن[1]) نامیم، هرگاه هر عنصر آن منظم باشد.

مثال ۵۴.۱.۱ حلقه‌های تقسیم، منظم می‌باشند.

تعریف ۵۵.۱.۱ یک عنصر از حلقه‌ی R خوش ترکیب است در صورتی که آن عنصر به صورت جمع یک عنصر خودتوان و یک عنصر یکه نوشته شود. یک حلقه‌ی خوش ترکیب است اگر هر عنصر حلقه، خوش ترکیب باشد.

تعریف ۵٦.۱.۱ عنصر $r \in R$ به طور یکتا خوش ترکیب است هرگاه عناصر منحصر به فرد $e \in Id(R)$ و $u \in U(R)$ یافت شوند که $r = e + u$. یک حلقه‌ی را به طور یکتا خوش ترکیب نامیم، هرگاه هر عنصر آن به طور یکتا خوش ترکیب باشد.

لم ۵۷.۱.۱ هر خودتوان در یک حلقه‌ی به طور یکتا خوش ترکیب، مرکزی است.

برهان: فرض کنیم R یک حلقه باشد و $e^۲ = e \in R$. اگر $r \in R$، آن‌گاه $e + (er - ere)$ خودتوان است. زیرا

$$(e + (er - ere))(e + (er - ere)) = e + er - ere - erer + erere + erer - erere$$
$$= e + (er - ere).$$

هم‌چنین $(er - ere) + ۱$ یکه است و معکوس آن $(ere - er) + ۱$ می‌باشد. داریم

$$(e + (er - ere)) + ۱ = e + (۱ + (er - ere)).$$

[1] Von - neumann

چون حلقه‌ی R به طور یکتا خوش ترکیب است، داریم $e = (er - ere) + e$ و لذا $er = ere$. به طور مشابه $er = ere$. بنابراین $re = er$. پس e خودتوان مرکزی است. □

تعریف ۵۸.۱.۱ مدول A را مستقیماً متناهی گوییم، هر گاه با هیچ جمعوند مستقیم سره از خودش یک‌ریخت نباشد. به عبارت دیگر A مستقیماً متناهی است اگر و تنها اگر $B = ۰$ تنها مدولی باشد که، $A \bigoplus B \cong A$.

تعریف ۵۹.۱.۱ حلقه‌ی R مستقیماً متناهی است، اگر برای هر $x, y \in R$، $xy = ۱$ آن‌گاه $yx = ۱$.

مثال ۶۰.۱.۱ هر حلقه‌ی جابجایی، مستقیماً متناهی است.

مثال ۶۱.۱.۱ هر حلقه‌ی به طور یکتا خوش ترکیب، مستقیماً متناهی است.

برهان: فرض کنیم R یک حلقه‌ی به طور یکتا خوش ترکیب باشد و هم‌چنین $a, b \in R$ و $ab = ۱$ باشد. ba خودتوان است، زیرا $baba = b(۱)a = ba$ و چون R به طور یکتا خوش ترکیب است، طبق لم ۵۷.۱.۱، ba مرکزی است. هم‌چنین

$$ba = ba(۱) = ba(ab) = a(ba)b = (ab)(ab) = ۱.$$

بنابراین R، مستقیماً متناهی است. □

تذکر ۶۲.۱.۱ هر حلقه که مستقیماً متناهی نباشد را مستقیماً نامتناهی گوییم.

مثال ۶۳.۱.۱ هر حلقه‌ی ناجابه‌جایی مستقیماً نامتناهی است.

تعریف ۶۴.۱.۱ خود توان e را مستقیماً متناهی گوییم هرگاه، حلقه‌ی eRe حلقه‌ی مستقیماً متناهی باشد.

تعریف ۶۵.۱.۱ اگر x عضو پوچ توانی از حلقه‌ی R باشد. شاخص x، کوچکترین عدد صحیح مثبت می باشد به طوری که $x^n = ۰$. بویژه، صفر حلقه عنصر پوچ با شاخص ۱ می باشد.