دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

عنوان:
مجموعه‌های پایدار ازایده‌ال‌های اوّل وابسته به ایده‌آل پلی‌متروآیدل

پژوهشگر:
هادی معصومی

استاد راهنما:
دکتر علی سلیمان‌جهان

استاد مشاور:
دکتر محمّد زرین

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر

اسفند ماه ۱۳۹۱

*****تعهد نامه*****

اینجانب هادی معصومی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر دانشگاه کردستان، دانشکده علوم پایه گروه ریاضی تعهد می‌نمایم که محتوای این پایان نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی استاد راهنمای گرامی جناب دکتر علی سلیمان‌جهان و مشاوره اساتید بوده است.

با تقدیم احترام
هادی معصومی

۹۲/۰۷/۳۰

تقدیم به

روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم

و به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

و به همسرم، همراه زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم.

تقدیر و تشکر

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر علی سلیمان جهان که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛ از استاد گرامی جناب آقای دکتر محمّد زرین که زحمت مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند؛ و از استادان گرامی؛ جناب آقای دکتر امیر بافی و جناب آقای دکتر منصور دانا که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و در آخر سپاسگزارم از همسرم که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

چکیده

در این پایان‌نامه، ایده‌آل‌های اوّل وابسته‌ی توان‌های ایده‌آل‌های پلی‌متروآیدل مورد مطالعه قرار می‌گیرند. این رسته از ایده‌آل‌ها دارای مجموعه پایا از ایده‌آل‌های اوّل وابسته است. نشان می‌دهیم ایده‌آل‌های پلی‌متروآیدل دارای ویژگی پایایی است و شاخص پایایی پلی‌متروآیدل‌های از نوع ورونزه و پلی‌متروآیدل‌های مورب را بدست می‌آوریم. همچنین مجموعه پایای ایده‌آل‌های اوّل وابسته را بطور واضح مشخص می‌کنیم.

واژگان کلیدی: ایده‌آل‌های اوّل وابسته، ایده‌آل‌های پلی‌متروآیدل، ایده‌آل‌های تک جمله‌ای، مجتمع‌سادگی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در طول این پایان نامه فرض کنید I ایده‌آلی در حلقه نوتری R باشد. مجموعه ایده‌آل‌های اوّل وابسته از R/I را با $\operatorname{Ass}(I)$ نشان می‌دهیم. این پایان نامه شامل چهار فصل است که در فصل اوّل تعاریف و قضایای مورد نیاز در دو بخش آورده شده است. در فصل دوم جزئیات بدست آوردن عناصر $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$ با استفاده از عناصر ماتریس وابسته به مجموعه تک جمله‌ای منحصر بفرد $G(I)$ از مولدهای I توضیح داده می‌شود. در پایان این فصل نشان داده می‌شود که $\operatorname{astab}(I)$ و $\operatorname{dstab}(I)$ هر کدام می‌توانند از دیگری بزرگتر باشند. در گزاره ۴.۱.۲ نشان داده می‌شود که $\operatorname{astab}(I)$ دارای کران بالا و پایین است. از گزاره ۵.۱.۲ برای محاسبه شاخص پایایی ایده‌آل استانلی-رایزنر[۱] استفاده می‌شود. در فصل سوم استراتژی مورد بحث در فصل دوم برای مطالعه ایده‌آل‌های اوّل وابسته از توان‌های ایده‌آل پلی‌متروایدل استفاده می‌شود. گزاره ۵.۱.۳ بیان می‌کند ایده‌آل‌های پلی‌متروایدل دارای ویژگی پایایی هستند. در پایان این فصل $\operatorname{Ass}^{\infty}(I)$ برای هر ایده‌آل پلی‌متروایدل محاسبه می‌شود. در لم ۲.۱.۴ نشان داده می‌شود که نمایش ایده‌آل پلی‌متروایدل متقاطع بدست آمده از ایده‌آل‌های اوّل تک جمله‌ای منحصر بفرد است. نتیجه کلیدی فصل چهارم قضیه ۴.۱.۴ است که نشان می‌دهد ایده‌آل ماکسیمال مدرج $\mathfrak{m}$ به ایده‌آل پلی‌متروایدل متقاطع $I = P_{F_1} \cdots P_{F_r}$ وابسته است اگرو تنها

[۱] Stanley-Reisner

اگر $\cup_{i=1}^{r} F_i = [n]$ و اشتراک گراف $G(I)$ همبند باشد. از نتیجه ۷.۱.۴ نتیجه می‌گیریم که برای هر ایده‌آل پلی‌مترواید‌ل متقاطع $\operatorname{Ass}(I) = \operatorname{Ass}^{\infty}(I)$. در قضیه ۸.۱.۴، $\operatorname{Ass}(I)$ بوسیله درخت‌های گراف $G(I)$ محاسبه می‌شود. در نتیجه ۱۱.۱.۴ تجزیه اوّلیه غیر زائد همه توان‌های I^k از I بدست آورده می‌شود. قضیه ۱۳.۱.۴ با استفاده از تعداد مولفه‌های $G(I)$، $\operatorname{depth} S/I$ محاسبه می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. حلقه R را $Z-$مدرج[۱] گویند هرگاه زیر گروههای جمعی از R مانند R_i، $i \in Z$ موجود باشد بطوری که $R = \bigoplus_{i \in Z} R_i$ و برای هر $i, j \in Z$ داشته باشیم، $R_i R_j \subset R_{i+j}$.

$R-$مدول M را یک $R-$مدول مدرج می‌گویند هرگاه $M = \bigoplus_{i \in Z} M_i$ که M_i ها زیر مدولهای M و گروه آبلی هستند، بطوری که برای هر $i, j \in Z$ داشته باشیم، $R_i M_j \subset M_{i+j}$. توجه شود R_0 یک حلقه با ویژگی $1 \in R_0$ و همه جمعوندهای M_i یک R_0-مدول می‌باشند.

اگر R یک حلقه مدرج باشد و I یک ایده‌آل مدرج از R باشد، آنگاه R/I و I یک $R-$مدول مدرج هستند.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه ایده‌آل‌های اوّل شامل I را با $V(I)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | I \subset \mathfrak{p}\}$.

یادآوری:مجموعه همه ایده‌آل‌های اول از حلقه R را با $\mathrm{Spec}(R)$ نشان می‌دهند.

---
[۱] Graded ring

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیدM یک مدول روی حلقه R باشد. $x \in R$ را عنصر $M-$منظم می‌گویند، اگر برای هر $z \in M$ داشته باشیم $xz = 0$ آنگاه $z = 0$. به عبارت دیگر اگر x مقسوم علیه صفر M نباشد.

تعریف ۴.۱.۱. دنباله $x = x_1, \ldots, x_n \in R$ را $M-$دنباله می‌گوییم اگردر شرایط زیر صدق کند

(i) به ازای $i = 1, \ldots, n$، x_i عنصر $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M-$منظم باشد.

(ii) $M/xM \neq 0$

تعریف ۵.۱.۱. ($M-$دنباله ماکسیمال): $M-$دنباله $x = x_1, \ldots, x_n$ در I را ماکسیمال گویند اگر برای هر $x_{n+1} \in R$، $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ یک $M-$دنباله نباشد.

قضیه: فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول متناهی مولد و I یک ایده‌ال از R باشد، که $IM \neq M$. آنگاه همه $M-$دنباله‌های ماکسیمال در I دارای طول یکسان است.

برهان: قضیه ۵.۲.۱ از [۴].

تعریف ۶.۱.۱. (درجه I روی M): فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول متناهی مولد و I یک ایده‌ال از R باشد، که $IM \neq M$. آنگاه طول $M-$دنباله ماکسیمال در I را درجه I روی M می‌گویند و با $\operatorname{grade}(I, M)$ نشان می‌دهند. اگر$IM = M$ آنگاه $\operatorname{grade}(I, M) = \infty$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ حلقه موضعی نوتری و M یک $R-$مدول متناهی مولد باشد، آنگاه درجه $\mathfrak{m}$ روی M را عمق M می‌نامند و با $\operatorname{depth} M$ نشان می‌دهند.

تعریف ۸.۱.۱. (تک جمله‌ای): فرض کنید K میدان و $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای با n متغیر روی K باشد. هر حاصل ضرب $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ که $a_i \in \mathbb{Z}$ و $a_i \geq 0$ را تک جمله‌ای می‌گویند و آن را با x^a نشان می‌دهیم که در آن $a = (a_1, \dots, a_n)$. ایده‌ال $I \subset S = K[x_1, \dots, x_n]$ را ایده‌ال تک جمله‌ای گویند اگر به وسیله تک جمله‌ایها تولید شده باشد.

گزاره: هر ایده‌آل تک جمله‌ای دارای مجموعه تک جمله‌ای مینیمال منحصر بفرد از مولدهایش است.

برهان: گزاره ۶.۱.۱ از [۱۴].

تعریف ۹.۱.۱. تک جمله‌ای $x^a = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ را خالی از مربع[۲] گویند هرگاه به ازای هر i، $a_i \in \{0, 1\}$.

تعریف ۱۰.۱.۱. (مجتمع سادگی): فرض کنید $[n] = \{1, \cdots, n\}$ مجموعه رئوس باشد. آنگاه $\triangle$ را مجتمع سادگی روی $[n]$ می‌گویند هرگاه $\triangle$ مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های $[n]$ باشد، با این ویژگی که اگر $F \in \triangle$ و $F' \subset F$ آنگاه $F' \in \triangle$. عناصر $\triangle$ را وجه می‌نامیم و زیر مجموعه F از $[n]$ که $F \notin \triangle$، را نا وجه از $\triangle$ می‌گویند. مجموعه تمام نا وجه‌های $\triangle$ را با $\mathcal{N}(\triangle)$ نشان می‌دهیم.

یک وجه ماکسمال را نسبت به شمول وجه‌واره می‌گویند.

مثال ۱۱.۱.۱. فرض کنید $n = 3$. بنابراین $[3] = \{1, 2, 3\}$. مجتمع سادکی $\triangle$ را می توانیم به صورت زیر داشته باشیم.

$$\triangle = \{1, 2, 3, 12, 13, 23, 123\}$$

[۲] squarefree

با این توضیح که به عنوان نمونه، منظور از عبارت ۱۲۳ در بالا، همان مجموعه ی $\{۱, ۲, ۳\}$ می باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید $S = K[x_۱, \ldots, x_n]$ و $\triangle$ یک مجتمع سادگی روی $[n]$ باشد. ایده‌آل $I_\triangle$ را ایده‌آل استانلی-رایزنر می‌گویند، هرگاه به وسیله تک جمله‌ایهای $\mathtt{X}_F$ که $F \notin \triangle$ تولید شود به عبارت دیگر $I_\triangle = (\mathtt{X}_F : F \in \mathcal{N}(\triangle))$، که در آن $\mathtt{X}_F := \prod_{i \in F} x_i$.

تعریف ۱۳.۱.۱. (گراف): یک گراف G، متشکل است از مجموعه‌ای از رئوس، به همراه مجموعه‌ای از یال‌ها، بطوریکه هر دو انتهای هر یال عضوهایی از مجموعه‌ی رئوس مفروض باشند. معمولا مجموعه‌ی رئوس گراف G را با V_G و مجموعه‌ی یال‌های آن را با E_G نمایش می‌دهند و G برابر با (V_G, E_G) خواهد بود. به تعداد رئوس گراف، مرتبه و به تعداد یال‌های آن، اندازه‌ی گراف می‌گوییم. بعبارت دیگر، هر گراف، دو تایی مرتبی است که مولفه‌ی اوّل آن، مجموعه‌ی رئوس آن گراف و مولفه‌ی دوم آن، مجموعه‌ی یال‌های آن گراف می‌باشد. بطوریکه دو انتهای هر یال، عضوهایی از مجموعه‌ی رئوس آن هستند.

تعریف ۱۴.۱.۱. (پوشش رأسی): $C \subset V_G$ یک پوشش رأسی از گراف G گویند اگر برای هر $\{i, j\} \in E_G$،

$$C \cap \{i, j\} \neq \emptyset.$$

پوشش رأسی C را مینیمال می‌گویند هرگاه هیچ زیر مجموعه‌ای از C پوشش رأسی G نباشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید G یک گراف و $S = K[x_۱, \ldots, x_n]$ حلقه چند جمله‌ای روی میدان K باشد. $K-$زیر جبر از حلقه چند جمله‌ای $S[t]$ تولید شده بوسیله همه تک جمله‌ایهای $x_۱^{a(۱)} \cdots x_۱^{a(n)} t^n$ بطوریکه $a = (a(۱), \cdots, a(n))$ یک پوشش رأسی از مرتبه K از گراف G باشد را جبر پوشش رأسی از G می‌گویند.

تعریف ۱.۱.۱۶. (گراف متناهی): اگر مجموعه‌ی رأس‌ها و مجموعه‌ی یال‌های یک گراف، متناهی باشند، گراف فوق را متناهی می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱۷. (مسیر): فرض کنید $v_{۱}, v_n \in V_G$ باشند. در گراف G، یک مسیر از $v_{۱}$ به v_n، دنباله‌ای از رأس‌های متمایز گراف G به صورت $v_{۱}, \ldots, v_n$ است بطوریکه هر دو رأس متوالی این دنباله، بوسیله‌ی یک یال به هم وصل باشند. تعداد یال‌های این مسیر را طول مسیر گویند. یک مسیر به طول n، دارای $n+۱$ رأس و n یال است. در واقع هر رأس، یک مسیری به طول صفر است.

تعریف ۱.۱.۱۸. (دور): اگر ابتدا و انتهای یک مسیر یکسان باشد، آن را یک دور گویند. گرافی که دور نداشته باشد را گراف غیر دوری گویند.

تعریف ۱.۱.۱۹. ($k-$ دور): یک دور به طول k را $k-$دور می‌نامیم. یک $k-$دور، بسته به اینکه k زوج یا فرد باشد، یک دور زوج یا فرد می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۲۰. (گراف همبند): گراف G را همبند گوییم هر گاه هر دو رأس آن بوسیله‌ی حداقل یک مسیر به هم متصل باشند. گرافی که همبند نباشد ناهمبند گوییم.

تعریف ۱.۱.۲۱. (درخت): یک درخت، گراف متناهی است که هیچ دوری نداشته و همبند باشد.

تعریف ۱.۱.۲۲. (ابرگراف): زوج $\mathcal{H} = (V, E)$ را ابرگراف گویند که $V = \{v_{۱}, \cdots, v_n\}$ مجموعه رئوس و $E = \{E_{۱}, E_{۲}, \cdots, E_m\}$ مجموعه‌ای از یال‌ها که برای هر $i = ۱, \ldots, m$، $E_i \subseteq V$.

ابرگرافی که برای هر $i \neq j$، $E_i \nsubseteq E_j$ را ابرگراف ساده می‌گویند.

تعریف ۲۳.۱.۱. (دور خاص): فرض کنید $\triangle$ مجتمع سادگی روی $[n]$ باشد. یک دور از $\triangle$ را خاص می‌گویند هرگاه هیچ وجه‌واره شامل بیش از دو رأس نباشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. (موضعی سازی): فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. یعنی

$$۱ \in S, \quad \forall x, y \in S \Longrightarrow \quad xy \in S.$$

در اینصورت، رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall \quad (a,s), \quad (b,t); \qquad (a,s) \ \sim (b,t) \iff \exists s' \in S: \quad s' \, (at - bs) = ۰$$

که به وضوح، $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

برای هر $(x,s) \ \in R \times \ S$ دسته‌ی هم‌ارزی (x,s) را با $\frac{x}{s}$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$S^{-۱}R = \{\frac{x}{s} \quad : \quad x \in R, \quad ۰ \neq s \in S\}.$$

با تعریف اعمال + و . در زیر، $S^{-۱}R$ تبدیل به یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار خواهد شد که به آن حلقه‌ی خارج‌قسمتی R نسبت به S گفته می‌شود و صفر این حلقه $۰_{S^{-۱}R} = \frac{۰}{۱} = \frac{۰}{s}$ و یک آن $۱_{S^{-۱}R} = \frac{۱}{۱} = \frac{s}{s}$ می‌باشد.

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt + ys}{st} \qquad \forall \, x, y \in \ R, \ s, t \in \ S,$$

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} = \frac{xy}{st} \qquad \forall \, x, y \in \ R, \ s, t \in \ S.$$

فرض کنید M یک $R-$مدول، $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اوّلی از حلقه‌ی R باشد و $S = R \setminus \mathfrak{p}$. در اینصورت، $S^{-1}R$ را با $R_{\mathfrak{p}}$ نمایش می‌دهیم و آن را موضعی سازی R در $\mathfrak{p}$ می‌نامیم. موضعی سازی برای مدول M بصورت زیر تعریف می‌شود و با $M_{\mathfrak{p}}$ نشان داد ه می‌شود.

$$S^{-1}M = M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}R \otimes_R M = R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M.$$

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید I ایده‌آلی در حلقه R باشد. عنصر f از R را روی I صحیح می‌گویند اگر معادله‌ای به صورت زیر وجود داشته باشد

$$f^k + c_1 f^{k-1} + \cdots + c_{k-1} f + c_k = 0$$

بطوری که $c_i \in I^i$. مجموعه عناصر صحیح روی I را بستار صحیح می‌گویند و با $\bar{I}$ نشان داده می‌شود. I را بسته صحیح می‌گویند هرگاه $I = \bar{I}$ و نرمال گویند هرگاه همه توانهای I بسته صحیح باشند.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{D}$ یک گردایه که شامل دو رده، مورفیسم‌ها و عضوها است. اگر رده مورفیسم‌ها شامل مورفیسم همانی باشد و ترکیب مورفیسم‌ها خصوصیت شرکت‌پذیری را داشته باشد و ترکیب هر مورفیسم با مورفیسم همانی، همان مورفیسم شود، آنگاه به این گردایه رسته یا کاتگوری[۳] می‌گویند.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. $F : \mathcal{G} \to \mathcal{D}$ را یک فانکتور می‌گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند

(a) به ازای هر $A \in \mathcal{G}$ آنگاه $F(A) \in \mathcal{D}$.

[۳] Category

(b) اگر $f: A \to B$ مورفیسمی در $\mathcal{G}$ باشد، آنگاه $F(f): F(A) \to F(B)$ مورفیسمی در $\mathcal{D}$ است.

(c) اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ مورفیسم‌هایی در $\mathcal{G}$ باشد، آنگاه $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

(d) برای هر $A \in \mathcal{G}$، آنگاه $F(1_A) = 1_{F(A)}$ باشد.

قرارداد: تعریف بیان شده برای فانکتور همورد است. اگر شرط سوّم به‌صورت $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ تغییر کند فانکتور را پادورد می‌گویند.

تعریف ۲۸.۱.۱. C را همبافت[۴] از $R-$مدول‌ها می‌گویند هرگاه دنباله

$$C : \cdots \xrightarrow{\sigma_3} C_2 \xrightarrow{\sigma_2} C_1 \xrightarrow{\sigma_1} C_0 \xrightarrow{\sigma_0} C_{-1} \xrightarrow{\sigma_{-1}} \cdots$$

از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها موجود باشد، که به‌ازای هر $n \in Z$، $\sigma_{n-1} o \sigma_n = 0$ و C را با $((C_n), (\sigma_n))$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. دنباله دقیق $0 \to M \to I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$ را یک تحلیل انژکتیو[۵] برای M می‌گویند هرگاه I^n یک $R-$مدول انژکتیو باشد.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. دنباله دقیق $\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ را یک تحلیل آزاد[۶] برای M می‌گویند هرگاه F_n یک $R-$مدول آزاد باشد.

[۴] Complex
[۵] Injective resolution
[۶] Free resolution

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید C_R کاتگوری $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها و $T(-) : C_R \longrightarrow C_R$ یک فانکتور همورد جمعی باشد. همچنین فرض کنید

$$\ldots \to F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \ldots \to F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

یک تحلیل آزاد برای $R-$مدول M باشد. بنابراین، همبافت زیر را داریم

$$\ldots \to T(F_i) \xrightarrow{T(d_i)} T(F_{i-1}) \xrightarrow{T(d_{i-1})} \ldots \to T(F_0) \xrightarrow{T(d_0)} 0.$$

برای هر $i \geqslant 0$، $R-$مدول $\dfrac{\ker(T(d_n))}{Im(T(d_{n+1}))}$ را با نماد $L_nT(M)$ نشان می‌دهند و به آن n امین فانکتور مشتق شده چپ می‌گویند.

قرارداد: فرض کنید N یک $R-$مدول چپ باشد. n امین فانکتور مشتق شده چپ $T(-) = - \otimes_R N$ را با علامت $\mathrm{Tor}_n^R(-, N)$ نشان می‌دهند و به آن فانکتور تابی می‌گویند.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید C_R کاتگوری $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها و $T(-) : C_R \longrightarrow C_R$ یک فانکتور همورد جمعی باشد. همچنین فرض کنید

$$0 \to M \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \cdots$$

یک تحلیل انژکتیو برای $R-$مدول M باشد. بنابراین همبافت زیر را داریم

$$0 \to T(E^0) \xrightarrow{T(d^0)} T(E^1) \xrightarrow{T(d^1)} T(E^2) \to \cdots$$

برای هر $i \geqslant 0$، R−مدول $\frac{\ker(T(d^n))}{Im(T(d^{n-1}))}$ را با نماد $R^nT(M)$ نشان می‌دهند و به آن n امین فانکتور مشتق شده راست $T(-)$ می‌گویند.

قرارداد: فرض کنید N یک R−مدول چپ باشد. n امین فانکتور مشتق شده راست $T(-) = \mathrm{Hom}_R(N, -)$ را با علامت $\mathrm{Ext}^n_R(N, -)$ نشان می‌دهند و به آن فانکتور توسیع می‌گویند.

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید M یک R−مدول باشد. دنباله دقیق $\cdots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ را یک تحلیل پروژکتیو برای M می‌گویند هرگاه P_n یک R−مدول پروژکتیو باشد.

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنید M یک R−مدول باشد. اگر یک تحلیل پروژکتو مانند زیر برای M وجود داشته باشد، طول کوچکترین تحلیل پروژکتیو برای M را بعد پروژکتیو M می‌گویند و با $pd(M)$ نشان داده می‌شود.

$$0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

اگر طول تحلیل پروژکتیو نامتناهی باشد، $pd(M) = \infty$.

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ حلقه موضعی و L یک R−مدول، iامین عدد بتی[۷] از Lبرای هر عدد صحیح i، بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\beta_i^R(L) = \mathrm{len}_R(\mathrm{Tor}_i^R(k, L)).$$

[۷] Betti number

تعریف ۳۶.۱.۱. فرض کنید $S = K[x_1, \cdots, x_n]$ حلقه چند جمله‌ای روی میدان K و M یک $S-$مدول مدرج باشد. اگر تحلیل آزاد مینیمال مدرجی بصورت زیر برای M وجود داشته باشد می‌گویند M دارای $d-$تحلیل خطی است.($\beta_i := \beta_i(M)$)

$$0 \to S(-d-s)^{\beta_s} \to \cdots \to S(-d-1)^{\beta_1} \to S(-d)^{\beta_0} \to M \to 0$$

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه جابجایی و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اوّل از R باشد. ارتفاع[۸] $\mathfrak{p}$ را به‌صورت $height(\mathfrak{p}) = \sup\{s | \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_s, \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)\}$ تعریف می‌کنند. سوپریمم ارتفاع $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)$ را بعد[۹] R می‌گویند و با $\dim(R)$ نشان می‌دهند.

فرض کنید V زیر مجموعه‌ای از $\mathrm{Spec}(R)$ باشد. سوپریمم طول زنجیرهای نزولی اکید $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_s$ از ایده‌آل‌های اوّل در V، را بعد V می‌گویند و با $\dim(V)$ نشان می‌دهند. بنابراین $\dim(R) = \dim(\mathrm{Spec}(R))$ است. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد، آنگاه $\dim(\mathrm{Supp}(M))$ را بعد M می‌گویند و با $\dim(M)$ نشان می‌دهند.

یادآوری: $\mathrm{Supp}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$.

تعریف ۳۸.۱.۱. فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه نوتری R و t یک متغیر جدید باشد. جبر ریس[۱۰] ایده‌آل

[۸] Height
[۹] Dimension
[۱۰] Rees