دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

پیچش و حدس L^p روی گروه‌های موضعاً فشرده

نگارش:

صغری بهزادی

استاد راهنما:

دکتر سعید مقصودی

استاد مشاور:

دکتر حبیب امیری

آذر ۱۳۹۰

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا فضاهای L^p برای $p \geqslant 0$ روی فضاهای اندازه دلخواه را بررسی می‌کنیم. سپس به درستی حدس L^p روی گروه‌های موضعاً فشرده برای $p > 0$ می‌پردازیم. علاوه بر اثبات ساا‌کی برای حدس L^p به مهمترین نتایج موجود درباره حدس L^p اشاره می‌کنیم.

رده‌بندی موضوعی: ۴۳A۱۰، ۴۳A۱۵.

واژه‌های کلیدی: *پیچش، حدس L^p ، گروه موضعاً فشرده، فضای L^p* .

پیشگفتار

یکی از مهمترین مفاهیم آنالیز و به ویژه آنالیز هارمونیک مفهوم پیچش است که سرچشمه‌های آن را می‌توان در ابتدای قرن نوزدهم یافت. با استفاده از مفهوم پیچش جبرهای گروهی روی یک گروه موضعاً فشرده تعریف می‌شوند که از اشیای مهم آنالیز هارمونیک هستند.

در این پایان نامه به بررسی مفهوم پیچش بین رده‌های مختلفی از توابع پرداخته‌ایم. به عبارت دقیق شرایطی را بررسی کرده‌ایم که تحت آن شرایط پیچش دو تابع از فضای لبگ توابع روی یک گروه موضعاً فشرده موجود است. این مطلب در حالت خاص به حدس L^p مشهور بوده است که در سال ۱۹۶۱ ژلازکو و مستقل از او راجاگوپلان در سال ۱۹۶۳ رسماً آن را مطرح کرده‌اند. اثبات این حدس در سال ۱۹۹۱ بعد از ۳۰ سال و با کمال تعجب با اثباتی مقدماتی (ولی نه ساده) که متعلق به ریاضیدان ژاپنی سااکی است، میسر شد.

در دو فصل اول بحث نسبتاً کاملی درباره فضاهای L^p روی فضاهای اندازه دلخواه آورده‌ایم. سپس در فصل سوم چشم‌اندازی تاریخی از پیدایش مفهوم پیچش و نقش آن در آنالیز ارائه کرده‌ایم. در فصل‌های چهارم و پنجم حدس L^p را برای گروه‌های موضعاً فشرده برای $p > ۱$ و $۰ < p < ۱$ جداگانه و به تفصیل بحث کرده‌ایم. در فصل پایانی اثبات سااکی برای حدس L^p را عرضه کرده‌ایم.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل تعاریف، مفاهیم وقضیه‌های مورد نیاز برای فصل‌های بعد را می‌آوریم.

توپولوژی

تعریف ۱.۱. (یك) مجموعهٔ D را جهت‌دار می‌نامیم هرگاه رابطه‌ای مانند $>$ روی D موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in D$ داشته باشیم

(الف) اگر $\alpha > \beta$ و $\beta > \gamma$، آن‌گاه $\alpha > \gamma$.

(ب) برای هر $\alpha, \beta \in D$، $\gamma \in D$ موجود باشد به‌طوری‌که $\gamma > \alpha$ و $\gamma > \beta$.

(دو) منظور از یك تور در مجموعهٔ X، تابعی است مانند $f : D \longrightarrow X$ که در آن D مجموعهٔ جهت‌دار است. معمولاً با فرض $x_\alpha = f(\alpha)$ برای هر $\alpha \in D$، تور $f : D \longrightarrow X$ را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یا به‌طور ساده با (x_α) نمایش می‌دهیم.

(سه) یك زیرتور از تور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$، توری چون $(y_\beta)_{\beta \in D'}$ است به‌طوری‌که نگاشت $\beta \mapsto \alpha\beta$ از D' به D با خواص زیر موجود باشد

(الف) برای هر $\alpha_\circ \in D$، $\beta_\circ \in D'$ موجود است به‌طوری‌که هرگاه $\beta > \beta_\circ$ آن‌گاه $\alpha_\beta > \alpha_\circ$.

(ب) برای هر $\beta \in D'$ داریم $y_\beta = x_{\alpha_\beta}$.

(چهار) فرض کنیم X یك فضای توپولوژیك باشد. گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ در X به $x_\circ$ همگراست هرگاه برای هر همسایگی U از $x_\circ$ در X، عنصر $\alpha_\circ \in D$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\alpha > \alpha_\circ$، $x_\alpha \in U$؛ می‌نویسیم $x_\alpha \to x_\circ$ یا $\lim_\alpha x_\alpha = x_\circ$. می‌توان ثابت کرد که $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ به $x_\circ$ همگراست اگر و تنها اگر هر زیرتور $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ به $x_\circ$ همگرا باشد.

قضیه ۲.۱. *فرض کنیم X یك فضای توپولوژیك باشد و $\overline{A}$ بستار زیرمجموعهٔ A در X را نمایش دهد. در این‌صورت*

(الف) $x \in \overline{A}$ *اگر و تنها اگر تور x_α موجود باشد به‌طوری‌که $x_\alpha \longrightarrow x$.*

(ب) A *فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در A، دارای یك زیرتور همگرا در A باشد.*

برهان. به بخش ۱۰.۳ از [۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۳.۱. *فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیك و $f : X \longrightarrow Y$ یك تابع باشد. در این‌صورت f پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور x_αی همگرا به x داشته باشیم $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.*

برهان. به بخش ۱۰.۳ از [۱۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۴.۱. فرض کنید X فضای توپولوژیك باشد.

(الف) X را موضعاً فشرده می‌نامیم، هرگاه هر نقطهٔ X دارای همسایگی با بستار فشرده باشد .

(ب) $E \subseteq X$ را σ-فشرده نامیم هرگاه اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های فشرده باشد.

آنالیز تابعی

تعریف ۵.۱. فرض کنید S یك فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد و $E \subseteq S$.

مجموعه E محدب است هرگاه برای هر $t \in [۰, ۱]$ داشته باشیم $tE + (۱ - t)E \subseteq E$.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم X یك فضای برداری روی میدان F($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد، اگر τ یك توپولوژی روی X باشد که دارای دو خاصیت زیر است، آن را فضای برداری توپولوژیك گوییم.

(۱) هر مجموعهٔ تك‌عنصری بسته باشد.

(۲) اعمال جمع برداری و ضرب در اسکالر، پیوسته باشند.

تعریف ۷.۱. فرض کنیم X یك فضای برداری توپولوژیك با توپولوژی τ باشد.

(الف) X را فضای موضعاً محدب می‌نامیم، هرگاه هر نقطهٔ آن دارای پایهٔ موضعی با اعضای محدب باشد.

(ب) X را فضای فرشه می‌نامیم، هر گاه موضعاً محدب باشد و توپولوژی τ توسط یك متریك کامل انتقال پایا به‌وجود آمده باشد. متر d را روی X انتقال پایا گوییم هرگاه

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \ \ (x, y, z \in X).$$

(ج) $E \subseteq X$ را کراندار گوییم هرگاه برای هر همسایگی U از صفر در E، اسکالر $\alpha > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $E \subset \alpha U$.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم X یك فضای برداری باشد.

(الف) یك شبه‌نرم روی X، تابعی چون $p : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ است به‌طوری‌که خواص زیر را دارا باشد.

(۱) برای هر $x, y \in X$، $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

(۲) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

(ب) هرگاه p یك شبه‌نرم روی X باشد و به‌علاوه، برای هر $x \neq 0$ داشته‌باشیم $p(x) > 0$، در این صورت p را یك نرم روی X و X را فضای برداری نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۹.۱. نرم‌های $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ روی فضای برداری X را معادل گوییم هرگاه ثابت‌های $K > 0$ و $M > 0$ موجود باشند، به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$K\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1.$$

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. مجموعهٔ تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با $\mathscr{B}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و برای هر $T \in \mathscr{B}(X,Y)$، نرم T را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \sup \Big\{ \|T(x)\| : x \in B_X \Big\},$$

که در این‌جا B_X گوی یکه فضای نرم‌دار X است. فضای $\mathscr{B}(X, \mathbb{C})$ را با X^* نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان X می‌نامیم. به‌وضوح X^* یك فضای باناخ است.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید X، Y و Z فضای برداری باشند، نگاشت $B : X \times Y \longrightarrow Z$ را در نظر بگیرید. به هر $x \in X$ و هر $y \in Y$ نگاشت‌های $B_x : Y \longrightarrow Y$ و $B^y : X \longrightarrow Z$ را به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم

$$B_x(y) = B(x,y), \; B^y(x) = B(x,y)$$

(الف) B را دوخطی گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، B_xو B^y خطی باشند.

(ب) B را جداگانه پیوسته گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، B_x و B^y پیوسته باشند.

قضیه ۱۲.۱. (گراف بسته). *فرض کنیم X و Y فضای باناخ باشند و $T : X \longrightarrow Y$ یك عملگر خطی باشد. T عملگر خطی کراندار است اگر و تنها اگر نمودار $\{(x, T(x)) : x \in X\}$ در $X \times Y$ بسته باشد.*

برهان. به قضیهٔ ۲۶.۲ از [۹] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱۳.۱. (کرانداری یکنواخت) *فرض کنید X و Y فضای باناخ باشند و $A \subseteq \mathscr{B}(X, Y)$، اگر A به‌طور نقطه‌ای کراندار باشد آن‌گاه A در $\mathscr{B}(X, Y)$ کراندار است.*

برهان. به قضیهٔ ۵۸.۳ از [۸] رجوع کنید. $\square$

قضیه ۱۴.۱. *فرض کنید X، Y و Z فضاهای باناخ باشند و نگاشت $T : X \times Y \longrightarrow Z$ نگاشت دوخطی جداگانه پیوسته باشد، در این‌صورت $N > ۰$ موجود است به‌طوری‌که*

$$\|T(x, y)\| \leq N\|x\|\|y\| \quad (x \in X, y \in Y).$$

برهان. عضو $y_۰ \in Y$ را ثابت در نظر می‌گیریم و برای هر $x \in X$ با شرط $۱ \leq \|x\|$ تعریف می‌کنیم $T_x(y_۰) = T(x, y_۰)$. بنابر فرض، نگاشت T جداگانه پیوسته است، پس T_x پیوسته است. بنابراین $M > ۰$ موجود است به طوری که برای هر $x \in X$ با شرط $۱ \leq \|x\|$ داریم $\|T(x, y_۰)\| \leq M\|x\| \leq M$. در نتیجه T_x به‌طور نقطه‌ای کراندار است و لذا بنابر قضیهٔ کرانداری یکنواخت $K > ۰$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ با شرط $۱ \leq \|x\|$ داریم $\|T_x\| \leq K$. چون $y_۰$ دلخواه بود لذا برای هر $x \in X$ با شرط $۱ \leq \|x\|$ و برای هر $y \in Y$ داریم $\|T_x(y)\| \leq N\|y\|$. یا به‌طور معادل برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، $\|T(x, y)\| \leq N\|y\|$. حال اگر $x \in X$ نیز دلخواه باشد، از آنجا که $\|\frac{x}{\|x\|}\| = ۱$ لذا بنابر رابطه بالا به‌دست می‌آوریم

$$\|T(x, y)\| \leq N\|x\|\|y\|.$$

$\square$

آنالیز حقیقی

تعریف ۱۵.۱. فرض کنیم X یك مجموعه باشد.

(الف) خانوادهٔ $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های X را یك σ-جبر در X گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد.

(۱) $X \in \mathcal{M}$.

(۲) اگر $A \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $A^c \in \mathcal{M}$، که در آن A^c متمم A نسبت به X است.

(۳) اگر $A_۱, A_۲, \cdots \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ب) اگر $\mathcal{M}$ یك σ-جبر در X باشد، آن‌گاه $(X, \mathcal{M})$ را یك فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathcal{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

(ج) هرگاه $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یك فضای اندازه باشد، نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه برای هر مجموعهٔ باز V در $\mathbb{C}$، $f^{-۱}(V)$ یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد.

هرگاه E یك مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد، تابع با تعریف

$$\chi(x) = \begin{cases} ۱ & x \in E \\ ۰ & x \notin E \end{cases}$$

تابعی اندازه‌پذیر است، تابع χ_E را تابع مشخصهٔ مجموعهٔ E می‌نامیم.

(د) یك اندازهٔ مثبت، تابعی نامنفی مانند μ است که روی σ-جبری مانند $\mathcal{M}$ تعریف شده است به‌طوری‌که $\mu(\emptyset) = ۰$ و μ شمارا جمعی است، یعنی برای هر دنبالهٔ (A_i) از عناصر دوبه‌دو مجزای $\mathcal{M}$ داریم

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \mu(A_i).$$

گوییم زیرمجموعهٔ A از X، σ-متناهی است هرگاه $A = \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i$ که برای هر i، $A_i \in \mathcal{M}$ و $\mu(A_i) < \infty$.

(ه) هرگاه $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یك فضای اندازه باشد، گوییم یك خاصیت وابسته به $x \in X$ تقریباً همه جا روی X برقرار است، هرگاه مجموعه نقاطی که دارای آن خاصیت نیست، دارای اندازهٔ صفر باشد.

تعریف ۱.۱۶. زیرمجموعه A از X را پوچ گوییم هرگاه $\mu(A) = ۰$. مجموعه A را موضعاً μ-پوچ گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعه F از X که $\mu(F) < \infty$، $\mu(A \cap F) = ۰$. به عبارت دیگر $A \cap F$ برای هر F با اندازه متناهی، پوچ باشد.

قضیه ۱.۱۷. *فرض‌کنیم μ یك اندازهٔ مثبت روی σ-جبر $\mathcal{M}$ باشد، در این صورت احکام زیر برقرارند.*

(الف) μ خاصیت جمعی متناهی دارد یعنی اگر $A_۱, \cdots, A_n$ اعضای دو به دو مجزای $\mathcal{M}$ باشند، آن‌گاه

$$\mu(A_۱ \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_۱) + \cdots + \mu(A_n).$$

(ب) اگر $A, B \in \mathcal{M}$ آن‌گاه $A \subset B$ ایجاب می‌کند $\mu(A) \le \mu(B)$.

(ج) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ آن‌گاه

$$\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$$

(د) هرگاه $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ و $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ و $\mu(A_1)$ متناهی باشد، آن‌گاه

$$\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$$

برهان. به قضیهٔ ۱.۱۹ از [۲۴] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۱.۱۸. فرض کنیم X یك فضای موضعاً فشرده باشد. در این‌صورت

(الف) اگر $\mathcal{B}(X)$ کوچك‌ترین σ-جبر شامل تمام زیرمجموعه‌های بستهٔ X باشد، آن‌گاه $\mathcal{B}(X)$ را σ-جبر مجموعه‌های بورل X و اعضای $\mathcal{B}(X)$ را مجموعه‌های بورل گوییم.

(ب) اندازهٔ μ روی X را بورل می‌نامیم اگر روی $\mathcal{B}(X)$ تعریف شده باشد.

(پ) مجموعهٔ بورل E را کراندار گوییم هرگاه مجموعهٔ فشردهٔ K موجود باشد به‌طوری‌که $E \subseteq K$.

(ت) مجموعهٔ بورل $E \subset X$ را منظم بیرونی گوییم هرگاه

$$\mu(E) = \inf\left\{\mu(V) : \text{باز } V,\ E \subset V\right\}$$

به‌طور مشابه مجموعهٔ بورل $E \subset X$ را منظم درونی گوییم هرگاه

$$\mu(E) = \sup\left\{\mu(K) : \text{فشرده } K,\ K \subset E\right\}$$

اگر هر مجموعهٔ بورل در X هم منظم بیرونی و هم منظم درونی باشد، در این صورت μ منظم نامیده می‌شود.

(ث) یك اندازهٔ مختلط روی X، یك تابع مختلط-مقدار μ تعریف شده روی $\mathcal{B}(X)$ است به‌طوری‌که شمارا جمعی باشد. متناظر به هر اندازهٔ μ روی X، تابع $|\mu| : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ را تغییر کل μ می‌نامیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\Sigma_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| : E_i \in \mathcal{B}(X)\right\}$$

که در آن سوپریموم روی همهٔ افرازهای متناهی $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ از E متشکل از مجموعه‌های بورل گرفته می‌شود. در این‌صورت $|\mu|$ یك اندازهٔ مثبت متناهی روی X است؛ یعنی $|\mu|(X) < \infty$.

(ج) اندازهٔ دیراك (یا اندازهٔ جرم نقطه‌ای) δ_x روی X، برای هر زیرمجموعهٔ بورل E از X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

(چ) یک اندازه رادون روی X یک اندازه بورل است که روی همه مجموعه‌های فشرده متناهی است و روی مجموعه‌های بورل منظم بیرونی است و روی مجموعه‌های باز منظم درونی است. اندازه رادون همچنین روی همه مجموعه‌های σ-متناهی منظم درونی است؛ گزاره ۵.۷ از [۱۰] را ببینید.

تعریف ۱۹.۱. منظور از یك اندازهٔ بیرونی روی مجموعهٔ ناتهی X تابعی چون $\mu^* : P(X) \longrightarrow [0, \infty[$، است (منظور از $P(X)$ مجموعهٔ توانی X است) که در خواص زیر صدق می‌کند.

(۱) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(۲) اگر $A \subset B$ آن‌گاه $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(۳) برای هر دنبالهٔ دلخواه (A_n) از زیرمجموعه‌های X داریم $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

تعریف ۲۰.۱. مجموعهٔ $I \subseteq \mathbb{R}^n$ را یك حجرهٔ n-بعدی می‌نامیم هرگاه $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ که در آن برای $i = 1, 2, \cdots, n$، I_i یك بازه در $\mathbb{R}$ است. طول I را به‌صورت $\ell(I) = \ell(I_1) \cdots \ell(I_n)$ تعریف می‌کنیم؛ که $\ell(I_i)$ طول بازهٔ I_i است. برای $E \subseteq \mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم

$$m^*(E) = \inf \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m) : \ E \subseteq \cup_{m=1}^{\infty} I_m \Big\}$$

که در آن I_mها حجره‌های n-بعدی هستند. اکنون طبق قضیهٔ کاراتئودوری، σ-جبری چون $\mathcal{M}$ و اندازه‌ای چون m موجود است به‌طوری‌که m برابر تحدید m^* به $\mathcal{M}$ است. اندازهٔ m را اندازهٔ لبگ n-بعدی می‌نامیم. اندازهٔ لبگ دارای خواص زیر است.

(۱) اندازهٔ لبگ انتقال پایاست، به این مفهوم که برای هر $E \in \mathcal{M}$ و هر $s \in \mathbb{R}^k$ داریم $m(E+s) = m(E)$، که در آن

$$E + s = \{x + s : \ x \in E\}.$$

(۲) اندازهٔ لبگ اندازه‌ای منظم است.

برای دیدن جزئیات به [۳] یا [۲۴] مراجعه کنید.

تعریف ۲۱.۱. فرض کنیم X یك فضای موضعاً فشرده باشد.

(الف) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع و ضرب اسکالر یك فضای برداری است. به‌علاوه، برای $f \in C(X)$ محمل f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار روی X با محمل فشرده را با $C_{\circ\circ}(X)$ یا $C_c(X)$ نشان می‌دهیم که یک زیرفضای $C(X)$ است.

(ب) گوییم تابع f در بی‌نهایت صفر می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X \setminus K$ داشته باشیم $|f(x)| < \varepsilon$. مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط-مقدار f روی X که در بی‌نهایت صفر می‌شود را با $C_\circ(X)$ نشان می‌دهیم، همچنین $C_{\circ\circ}(X)$ در $C_\circ(X)$ چگال است.

(ب) نرم یکنواخت تابع مختلط-مقدار f روی مجموعهٔ X به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_u = \sup\Big\{|f(x)| : x \in X\Big\}.$$

قضیه ۲۲.۱. (*نمایش ریس*). *فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشردهٔ هاسدورف و I یک تابعک خطی مثبت روی $C_c(X)$ باشد. در این‌صورت اندازهٔ بورل منظم یکتایی مانند μ روی X وجود دارد به‌طوری‌که*

$$I(f) = \int_X f d\mu \qquad (f \in C_c(X)).$$

به‌علاوه داریم $\|I\| = \|\mu\|$.

برهان. به قضیهٔ ۱۴.۲ از [۲۴] رجوع کنید. □

تعریف ۲۳.۱. فرض‌کنید X و Y فضاهایی ناتهی و موضعاً فشرده باشند و μ و ν دو اندازهٔ مثبت بورل منظم به‌ترتیب، روی X و Y باشند. برای $f \in C_{\circ\circ}(X \times Y, \mathbb{R})$ داریم

$$\int_X \Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big)d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)d\mu(x)\Big)d\mu(y).$$

مقدار مشترک این دو انتگرال یک تابعک خطی مثبت روی $C_{\circ\circ}(X \times Y)$ معرفی می‌کند. طبق قضیهٔ نمایش ریس اندازهٔ مثبت بورل منظمی روی $X \times Y$ موجود است که این تابعک را نمایش می‌دهد، اندازهٔ مذکور را اندازهٔ حاصل‌ضربی روی $X \times Y$ می‌نامیم و آن را با $\mu \times \nu$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۴.۱. (*فوبینی*). *فرض کنید μ و ν به‌ترتیب دو اندازهٔ بورل منظم روی فضاهای موضعاً فشردهٔ X و Y باشند و f یک تابع مختلط-مقدار $\mu \times \nu$-اندازه‌پذیر روی $X \times Y$ باشد که خارج از مجموعهٔ $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ تقریباً همه جا صفر باشد. که در آن برای هر n، A_n مجموعه‌ای $\mu \times \nu$-اندازه‌پذیر است و $(\mu \times \nu)(A_n) < \infty$. در این صورت انتگرال‌های زیر*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y), \;\; \int_X\int_Y f(x,y)d\nu(x)d\mu(y), \;\; \int_Y\int_X f(x,y)d\mu(x)d\nu(y)$$

مساوی و متناهی هستند اگر و تنها اگر یکی از انتگرال‌های زیر متناهی باشد

$$\int_{X\times Y}|f(x,y)|d(\mu\times\nu)(x,y),\quad \int_X\int_Y|f(x,y)|d\nu(x)d\mu(y),\quad \int_Y\int_X|f(x,y)|d\mu(x)d\nu(y)$$

برهان. به قضیهٔ ۱۰.۱۳ از [۱۴] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۲۵.۱. فرض کنید $(X,\mathcal{M},\mu)$ یك فضای اندازه باشد.

(الف) عدد حقیقی M یك کران اساسی برای تابع مختلط-مقدار f روی مجموعهٔ X نامیده می‌شود، هرگاه برای تقریباً هر $x\in X$ داشته باشیم $|f(x)|\leq M$. تابع f اساساً کراندار نامیده می‌شود اگر یك کران اساسی داشته باشد و

$$\|f\|_\infty:=\inf\left\{M:\ |f(x)|\leq M\ ,\text{برای تقریباً هر } x\right\}$$

$L^\infty(X,\mu)$ یا $L^\infty(\mu)$ را فضای توابع اندازه‌پذیر f تعریف می‌کنیم که $\|f\|_\infty<\infty$.

دو تابع $f,g\in L^\infty(X,\mu)$ را یکسان می‌گیریم اگر $\|f-g\|_\infty=0$؛ یعنی f و g تقریباً همه‌جا برابر باشند و می‌نویسیم $f\equiv g$. در این‌صورت $L^\infty(X,\mu)$ همراه با اعمال نقطه‌ای توابع و نرم $\|.\|_\infty$ فضای باناخ است.

(ب) برای $1\leq p<\infty$، خانوادهٔ تمام توابع مختلط-مقدار f روی X با شرط

$$\|f\|_p=\Big(\int_X|f|^pd\mu\Big)^{1/p}<\infty$$

را با $L^p(X,\mu)$ یا $L^p(\mu)$ نشان می‌دهیم. $L^p(X,\mu)$ با اعمال نقطه‌ای توابع و نرم بالا فضای باناخ تشکیل می‌دهد.

چنانچه X یک مجموعه دلخواه باشد و μ اندازه شمارشی روی X باشد، دراین‌صورت به جای $L^p(X)$ می‌نویسیم $\ell^p(X)$ برای هر $p>0$. به راحتی می‌توان دید برای $p>1$،

$$\ell^p(X)=\{f:X\to\mathbb{C}|\ \|f\|_p:=(\sum_{x\in X}|f(x)|^p)^{1/p}<\infty\}$$

و

$$||f||_\infty=\{f:X\to\mathbb{C}|\sup_{x\in X}|f(x)|<\infty\}.$$

قضیه ۲۶.۱. *فرض‌کنیم p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند به‌طوری‌که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (در این‌صورت p و q را مزدوج نمایی یا مزدوج هولدر می‌نامیم). فرض‌کنیم (X,μ) یك فضای اندازه باشد. در این‌صورت*

(الف) برای هر $f\in L^p(X,\mu)$ و $g\in L^q(X,\mu)$ داریم $\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q$.

(ب) برای هر $f,g\in L^p(X,\mu)$ داریم $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$.

نامساوی (الف) را نامساوی هولدر و نامساوی (ب) را نامساوی مینکوفسکی می‌نامیم.

برهان. به قضیهٔ ۳.۵ از [۲۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۷.۱. *فرض‌کنیم (X,μ) فضای اندازه باشد و $f_1, \dots, f_n$ توابع نامنفی در $L^1(X,\mu)$ باشند. فرض‌کنیم $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ اعداد مثبت باشند به‌طوری‌که $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = 1$. آن‌گاه $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n} \in L^1(X,\mu)$ و داریم*

$$\int_X f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_n^{\alpha_n} d\mu \leq \|f_1\|_1^{\alpha_1} \|f_2\|_1^{\alpha_2} \cdots \|f_n\|_1^{\alpha_n}$$

این نامساوی به نامساوی هولدر تعمیم یافته معروف است.

برهان. به قضیهٔ ۱۲.۵ از [۱۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۸.۱. (تسلطی لبگ). *فرض کنید (X,μ) فضای اندازه باشد و (f_n) دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$،*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

اگر تابعی مانند $g \in L^1(\mu)$ موجود باشد که

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots \ ; \ x \in X)$$

آن‌گاه $f \in L^1(\mu)$ و

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0, \ \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

برهان. به قضیهٔ ۲۶.۱ از [۲۴] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۹.۱. *فرض کنید (X,μ) فضای اندازه باشد و $1 \leq p \leq \infty$. اگر (f_n) در $L^p(\mu)$ به f همگرا باشد، آن‌گاه (f_n) زیردنباله‌ای دارد که تقریباً همه‌جا به‌طور نقطه‌ای به f میل می‌کند.*

برهان. به قضیهٔ ۱۲.۳ از [۲۴] رجوع کنید. □

قضیه ۳۰.۱. (لوی). *فرض کنید f_n دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر نامنفی باشد به‌طوری‌که $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu < \infty$ آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ تابع انتگرال‌پذیر است و*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

برهان. به قضیهٔ ۱۸.۹ از [۳] رجوع کنید. □

قضیه ۳۱.۱. *فرض کنید μ یك اندازهٔ بورل منظم روی فضای موضعاً فشردهٔ X باشد و $1 \leq p < \infty$، آن‌گاه $C_c(X)$ در $L^p(\mu)$ چگال است.*

برهان. به قضیهٔ ۳.۱۴ از [۲۴] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۳۲.۱. فرض‌کنید $(X, \mathcal{M})$ یك فضای اندازه باشد و $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ یك اندازه روی X باشد. هرگاه برای هر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subseteq X$ داشته باشیم $|\mu|(K) < \infty$، اندازهٔ μ را موضعاً متناهی می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۱. (الف) تابع اندازه‌پذیر $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را موضعاً کراندار گوییم، هرگاه برای هر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subseteq X$، $f|_K$ (تحدید f به K) کراندار باشد.

(ب) اگر X فضای توپولوژیکی موضعاً فشرده باشد و μ اندازه رادون باشد، فضای L^p موضعی را به صورت زیر

$$L^p_{loc}(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \ \ | \ \ \int_K |f|^p d\mu < +\infty \quad \text{برای هر } K \text{ فشرده}\}$$

تعریف می‌کنیم.

جبرهای باناخ

تعریف ۳۴.۱. (الف) فرض کنیم $\mathcal{A}$ یك فضای برداری روی $\mathbb{C}$، میدان اعداد مختلط، همراه با یك عمل ضرب $(a, b) \mapsto ab$ از $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ باشد، به‌طوری‌که برای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(۱) $(ab)c = a(bc)$.

(۲) $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$.

(۳) $a(b + c) = ab + ac$.

(۴) $(a + b)c = ab + bc$.

در این‌صورت $\mathcal{A}$ را یك جبر می‌نامیم.

جبر $\mathcal{A}$ را نرم‌دار گوییم هرگاه به‌عنوان یك فضای برداری، نرم‌دار باشد و به‌علاوه برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. در این حالت $d(a, b) = \|a - b\|$ یك متر روی $\mathcal{A}$ تعریف می‌کند که عمل‌های جمع برداری، ضرب اسکالر و ضرب برداری روی $\mathcal{A}$ نسبت به توپولوژی حاصل از d (که به توپولوژی نرم معروف است) پیوسته‌اند.

(ب) جبر $\mathcal{A}$ را یک جبر جابه‌جایی گوییم هرگاه

$$xy = yx \quad (x, y \in \mathcal{A})$$

(ج) جبر نرم‌دار $\mathcal{A}$ را جبر باناخ گوییم اگر به‌عنوان یك فضای متریك كامل باشد.

(د) زیرمجموعهٔ $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ را زیرجبر $\mathcal{A}$ گوییم، هرگاه با اعمال $\mathcal{A}$ تشکیل یك جبر دهد.

تعریف ۳۵.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر نرمدار باشد و $x \in \mathcal{A}$. شعاع طیفی x با دستور $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$ داده می‌شود.

تابعک خطی φ روی جبر $\mathcal{A}$ را ضربی گوییم هرگاه $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ برای هر $x, y \in \mathcal{A}$. مجموعه همه تابعک‌های خطی ضربی غیر صفر روی $\mathcal{A}$ را با $\Delta(\mathcal{A})$ نشان می‌دهند و آن را طیف $\mathcal{A}$ می‌نامند. هر تابعک خطی ضربی روی جبر باناخ، خود به خود پیوسته است، لم ۵.۱.۲ از [۱۶] را ببینید. جبرهای باناخ جابجایی موجودند که هیچ تابعک خطی ضربی ناصفر روی آن‌ها وجود ندارد. شرط لازم و کافی برای آنکه $\Delta(\mathcal{A}) \neq 0$ آن است که برای هر $x \in \mathcal{A}$، اگر $r(x) = 0$، آن‌گاه $x = 0$ یا معادلاً اگر $x = 0$ آن‌گاه $r(x) > 0$. قضیه ۵.۲.۲ از [۱۶] را ببینید.

گزاره ۳۶.۱. *اگر $\mathcal{A}$ جبر باناخ جابجایی یکدار باشد، در این صورت طیف آن ناتهی است.*

برهان. به قضیه ۲.۳۱ از [۱۶] مراجعه کنید. □

تعریف ۳۷.۱. فرض کنید S یك نیم‌گروه و τ یك توپولوژی روی S باشد. (S, τ) را نیم‌گروه توپولوژیك گوییم هرگاه τ هاسدورف باشد و نگاشت ضرب $(s,t) \mapsto s.t$ از $S \times S$ به S پیوسته باشد.

تعریف ۳۸.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یك جبر و τ یك توپولوژی روی آن باشد به‌طوری‌که $(\mathcal{A}, \tau)$ یك فضای برداری توپولوژیك باشد، $(\mathcal{A}, \tau)$ را جبر توپولوژیك گوییم هرگاه نیم‌گروه $(\mathcal{A}, .)$ نسبت به توپولوژی τ نیم‌گروه توپولوژیك باشد.

تعریف ۳۹.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با نرم $\|.\|$ و M یک فضای نرمدار با نرم $|||.|||$ باشد. فرض کنید یک نگاشت از $\mathcal{A} \times M$ به M با تعریف $(a, m) \mapsto am$ موجود باشد به طوری که

(الف) $(a+b)m = am + bm, a(m+n) = am + an$

(ب) $k(am) = (ka)m = a(km)$

(ج) $|||am||| \leqslant c\|a\| |||m|||$

برای هر $a,b \in \mathcal{A}$، $m,n \in M$، $k \in \mathbb{C}$. در اینجا c یک عدد ثابت مثبت است. در این صورت گوییم M یک $\mathcal{A}$-مدول چپ است. اگر M فضای باناخ باشد، در این صورت آن‌را یک $\mathcal{A}$-مدول باناخ چپ می‌نامیم. $\mathcal{A}$-مدول راست به طریق مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۴۰.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر نرمدار باشد. تور (e_α) در $\mathcal{A}$ را یک همانی تقریبی چپ برای $\mathcal{A}$ می‌نامند هرگاه $\|e_\alpha a - a\| \to 0$ برای هر $a \in \mathcal{A}$. چانچه $(\|e_\alpha\|)$ کراندار باشد، همانی تقریبی را کراندار می‌نامند.

قضیه ۴۱.۱. (تجزیه کوهن) *فرض کنید $(\mathcal{A}, \|.\|)$ یک جبر باناخ دارای همانی تقریبی چپ کراندار باشد. اگر M یک $\mathcal{A}$-مدول چپ باناخ با نرم $\|\|.\|\|$ باشد در این صورت $\mathcal{A}M = \{am \ : \ a \in \mathcal{A}, m \in M\}$ یک زیرفضای خطی بسته از M است.*

برهان. به قضیهٔ ۲۲.۳۲ از [۱۵] مراجعه کنید. □

آنالیز هارمونیک

تعریف ۴۲.۱. مجموعه G را یک گروه توپولوژیک می نامیم هرگاه G یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد و

(الف) G گروه باشد.

(ب) نگاشت $G \to G$ با ضابطه $x \to x^{-1}$ پیوسته باشد.

(ج) نگاشت $G \times G \to G$ با ضابطه $(x,y) \to xy$ پیوسته باشد.

گروه توپولوژیک G را گسسته خوانیم هرگاه توپولوژی آن، توپولوژی گسسته باشد. گروه توپولوژیک G را فشرده خوانیم هرگاه توپولوژی آن، فشرده باشد. گروه توپولوژیک G را موضعاً فشرده خوانیم اگر G هاسدورف بوده و برای هر همسایگی U از $x \in G$ همسایگی V حول x موجود باشد که $V \subset U$ و $\overline{V}$فشرده باشد.

تعریف ۴۳.۱. اگر B, A دو زیرمجموعه از G باشند، آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$AB = \{t.s \ : \ t \in A, s \in B\}, \quad A^{-1} = \{t^{-1} \ : \ t \in A\}.$$

تعریف ۴۴.۱. فرض کنید G یک گروه دلخواه و f یک تابع مختلط مقدار روی G باشد. برای $a \in G$، تعریف می‌کنیم

$$L_a f(x) =_a f(x) = f(ax), \quad R_a f(x) = f_a(x) = f(xa)$$

برای هر $x \in G$. تابع ${}_af$ (f_a)، انتقال چپ (انتقال راست) f به‌وسیله a نامیده می‌شود. همچنین f^* تابعی روی G است که برای هر $x \in G$ به صورت $f^*(x) = f(x^{-1})$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴۵.۱. فرض کنید G یک گروه و $\mathfrak{F}$ مجموعه‌ای از توابع مختلط مقدار روی G باشد به طوری که اگر $f \in \mathfrak{F}$، آن‌گاه ${}_af \in \mathfrak{F}$ ($f_a \in \mathfrak{F}$) ، گوییم $\mathfrak{F}$ تحت انتقال چپ (راست) پایاست.

تعریف ۴۶.۱. فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. اندازه غیرصفر رادون μ را روی G یک اندازه هار چپ گوییم هرگاه

$$\mu(xB) = \mu(B) \qquad (x \in G,\ B \in \mathcal{B}(G))$$

قضیه ۴۷.۱. *گروه G فشرده است اگر و تنها اگر $\lambda(G) < \infty$ و G ناگسسته است اگر و تنها اگر $\lambda(\{e\}) = 0$ که e عضو همانی گروه G است.*

برهان. به قضیه ۹.۱۵ از [۱۴] مراجعه کنید. □

گزاره ۴۸.۱. *گروه موضعاً فشرده G ناگسسته است اگر و تنها اگر دنباله نزولی (U_n) از مجموعه‌های باز با بستار فشرده حول عضو همانی یافت شود به طوری که $\lambda(U_n) \to 0$.*

برهان. اگر G گسسته باشد در این صورت $\lambda(\{e\}) = 0$. چون λ منظم است پس

$$\lambda(\{e\}) = \inf\{\lambda(U) :\ e \in U,\ \text{باز } U\}$$

بنابراین دنباله (U_n) از همسایگی‌ها با بستار فشرده یافت می‌شود که $\lambda(U_n) \to 0$. می‌توان (U_n) را نزولی اختیار کرد.

جهت عکس واضح است. زیرا اگر G گسسته باشد، $\lambda(\{e\}) > 0$.

□

تعریف ۴۹.۱. مجموعه $A \subseteq G$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم $\Delta(x) = \dfrac{\lambda(Ax)}{\lambda(A)}$ برای هر $x \in G$. Δ را تابع پیمانه‌ای روی G می‌نامند. تابع Δ یک همریختی پیوسته از G به گروه ضربی $(0, +\infty)$ است. اگر $\Delta \equiv 1$، گروه G را تک پیمانه‌ای می‌نامند. بدیهی است هر گروه آبلی تک پیمانه‌ای است.

قضیه ۵۰.۱. **[کاکوتانی-کدیرا]** *فرض کنید G یک گروه به طور فشرده تولید شده، موضعاً فشرده با عضو واحد e باشد. آن‌گاه برای هر خانواده شمارای $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ از همسایگی‌های حول e، یک زیرگروه نرمال فشرده N از G موجود است به‌طوری‌که $N \subset \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ و G/N متریک‌پذیر است و یک پایه شمارا برای مجموعه‌های باز آن دارد.*

برهان. به قضیهٔ ۸.۷ از [۱۴] رجوع کنید. □

تعریف ۵۱.۱. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده دلخواه و λ اندازه هار چپ روی G باشد. برای $p > ۰$ فضای لبگ $L^p(G, \lambda)$ را با $L^p(G)$ نشان می‌دهیم. برای $p = \infty$ تعریف می‌کنیم

$$L^p(G) = \{f : G \to \mathbb{C} |\ \|f\|_\infty < \infty,\ \text{بورل اندازه‌پذیر}\ f\}$$

که در آن

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > ۰ |\ \text{موضعاً تقریباً همه جا}\ |f(x)| < \alpha\}.$$

قضیه ۵۲.۱. *فرض کنید G گروه موضعاً فشرده و λ اندازه هار چپ روی آن باشد. فضای دوگان $L^p(G)$ یکریخت طولپا با $L^q(G)$ است که q مزدوج نمایی p است. چنانچه $p = ۱$ قرار می‌دهیم $q = \infty$. دوگانگی مربوط با دستور زیر داده می‌شود*

$$\langle f, g\rangle = \int_G fgd\lambda \quad (f \in L^q(G), g \in L^p(G))$$

برهان. به قضیهٔ ۱۸.۱۲ از [۱۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۵۳.۱. منظور از یک مشخصه روی گروه G عبارت است از یک همریختی χ از G به گروه ضربی $(۰, \infty)$، به عبارت دیگر تابعی مانند $\chi : G \to (۰, \infty)$ که برای هر $x, y \in G$، $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$.

قضیه ۵۴.۱. *فرض کنید G گروه موضعاً فشرده باشد. طیف $L^۱(G)$ یعنی فضای تابعک‌های خطی ضربی روی $L^۱(G)$ مجهز به توپولوژی ضعیف $\sigma(L^۱(G), L^\infty(G))$ با فضای مشخصه‌های پیوسته کراندار روی G مجهز به توپولوژی فشرده- باز یکی است. در واقع هر تابعک خطی ضربی Φ روی $L^۱(G)$ متناظر با یک مشخصه χ روی G است به طوری که*

$$\Phi(f) = \int_G f\chi d\lambda \qquad (f \in L^۱(G))$$

و به عکس.

برهان. به قضیهٔ ۷.۲۳ از [۱۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۵۵.۱. (پیچش توابع) اگر f و g دو تابع هار اندازه‌پذیر روی گروه G باشند، پیچش دو تابع به صورت

$$f * g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})d\lambda(y) = \int_G f(xy^{-1})g(y)\Delta(y^{-1})d\lambda(y)$$

تعریف می‌شود به شرطی که انتگرال تقریباً همه جا موجود و متناهی باشد.

قضیه ۱.۵۶. *فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد اگر $f \in L^1(G)$ و $g \in L^p(G)$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$)، آن‌گاه*

$$f * g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})d\lambda(y) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\lambda(y)$$

برای $p < \infty$ تقریباً همه جا و برای $p = \infty$ موضعاً تقریباً همه جا موجود است.

برهان. به قضیهٔ ۲۰.۱۴ از [۱۴] مراجعه کنید. □