بسم الله الرحمن الرحیم

الهی، فرد صمد تویی که ماسوایت همه زوج ترکیبی اند...

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا به ذکر مقدماتی از روش‌های حل معادلات غیر خطی چون روش تجزیه‌ی آدومیان، روش هوموتوپی اختلال و روش آنالیز هوموتوپی پرداخته‌ایم. سپس با پیاده سازی روش آنالیز هوموتوپی روی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، قابلیت‌ها و ویژگی‌های این روش را نشان داده‌ایم. در ادامه تغییراتی را روی روش آنالیز هوموتوپی اعمال کرده و تحت عنوان روش آنالیز هوموتوپی اصلاح شده آورده‌ایم. در نهایت، مقایسه‌ای بین سه روش اختلال هوموتوپی، آنالیز هوموتوپی و آنالیز هوموتوپی اصلاح شده در حل بعضی از معادلات انتقال گرما، صورت گرفته‌است که نشان دهنده‌ی برتری روش آنالیز هوموتوپی اصلاح شده بر این روش‌ها می‌باشد.

فهرست مندرجات

عنوان **صفحه**

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پیش نیاز

۱.۱ مقدمه

در این فصل به تبیین مفاهیم مورد نیاز دراین پایان‌نامه پرداخته، ابتدا انواع معادلات دیفرانسیل (معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی) بررسی و روش تجزیه‌ی آدومیان به طور مختصر شرح داده می شود. در پایان، شرح مختصری از روش اختلال هوموتوپی بیان خواهد شد.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف۱.۲.۱. معادله‌ی دیفرانسیل معادله‌ای است شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن که هدف از حل آن معادله، یافتن تابع مجهول است. اگر در معادله‌ی دیفرانسیل، مشتقات توابع تنها نسبت به یک متغیر ظاهر شوند، آن را یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی[۱] می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. به بزرگترین مرتبه‌ی مشتق ظاهر شده در یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی، مرتبه آن معادله می‌گوییم. شکل کلی یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n- ام به صورت

$$f\left(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = ۰$$

می‌باشد.

تعریف۳.۲.۱. اگر در یک معادله‌ی دیفرانسیل با تابع مجهول y، جمله‌ی غیر خطی از y و مشتقاتش ظاهر نشده باشد، معادله را خطی و در غیر این صورت، معادله را غیر خطی می‌نامیم. شکل کلی یک معادله‌ی خطی مرتبه‌ی n- ام به صورت

[۱] Ordinary differential equation

$$a_۰(x)y^{(n)} + a_۱(x)y^{(n-۱)} + \cdots + a_n(x)y = a_{n+۱}(x)$$

است که در آن ضرایب $a_i(x), i = ۰,۱,\dots,n+۱$ توابعی معلوم هستند که در بازه‌ی I تعریف شده‌اند. معادله‌ی فوق در صورتی همگن است که $a_{n+۱}(x) \equiv ۰$ و در حالتی که $a_{n+۱}(x) \neq ۰$، معادله را غیر همگن می‌نامیم.

معادلات دیفرانسیل خطی معمولی را می‌توان به کمک روش‌های تحلیلی حل کرد، ولی در بیشتر موارد با معادلات دیفرانسیل غیر خطی مواجه هستیم که نمی‌توان جواب تحلیلی آن‌ها را به دست آورد.

تعریف۱.۲.۴. اگر در یک معادله‌ی دیفرانسیل، مقدار تابع و مشتقات آن در یک نقطه به عنوان شرایط معادله ظاهر شوند، آن را یک مسئله‌ی مقدار اولیه می‌نامیم. شکل کلی یک مساله‌ی مقدار اولیه مرتبه-ی n- ام به صورت

$$f\left(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = ۰$$

$$y(a) = \alpha_۰, \quad y'(a) = \alpha_۱\,, \quad \dots \quad , \quad y^{(n-۱)}(a) = \alpha_{n-۱}$$

است که در آن a و $\alpha_i, i = ۰,۱,\dots,n-۱$ ها ثابت‌های مفروض هستند.

مثال ۱.۲.۱. حرکت یک آونگ ساده در حال نوسان تحت مفروضات ساده مشخص را می‌توان با معادله-ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم

$$\frac{d^۲\theta}{dt^۲} + \frac{g}{L} sin\theta = ۰$$

بیان کرد که در آن L طول آونگ، g ثابت ثقل زمین و$\theta(t)$ زاویه آونگ با وضعیت قائم یا حالت تعادل آن در لحظه‌ی t است. اگر وضعیت آونگ در شروع حرکت را با $\theta(t_0) = \theta_0$ و سرعت در آن نقطه را با $\theta'(t_0) = \theta'_0$ مشخص کنیم، با یک مسئله‌ی مقدار اولیه روبرو هستیم. از طرفی به ازای مقادیر کوچک θ، از تقریب $\sin\theta \approx \theta$ برای ساده کردن معادله به صورت

$$\frac{d^۲\theta}{dt^۲} + \frac{g}{L}\theta = ۰,$$

استفاده می‌کنیم.

در ادامه به معرفی معادلات دیفرانسیل جزئی و شکل کلی آنها می‌پردازیم.

تعریف۱.۵.۲.۱. اگر در یک معادله‌ی دیفرانسیل، مشتقات توابع نسبت به چند متغیر ظاهر شده باشند آن را یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۱] می‌نامند. یک معادله با مشتقات جزئی را در حالت کلی می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x, y, \dots u, \dots u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = ۰$$

که شامل متغیرهای مستقل $x, y, \dots$ تابع مجهول u (وابسته به متغیرهای مستقل) و مشتقات جزئی $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$ است. دامنه‌ی این مساله، یک دامنه‌ی مناسب D از فضای n بعدی حقیقی می‌باشد که بر حسب n متغیر مستقل $x, y, \dots$ مشخص شده‌است. تعداد متغیرهای مستقل، بعد مساله را تعیین می‌کند.

معادلات دیفرانسیل جزئی را می‌توان به معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی تقسیم کرد. در یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی، متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها به‌صورت خطی در معادله ظاهر می شوند، به‌خصوص ضرب متغیر وابسته و مشتقات آن در معادله وجود ندارد. در ادامه، معادله‌ی موج یک بعدی، که نمونه‌ای از یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی است، ارائه شده است. در این معادله a را به عنوان سرعت صوت، ثابت فرض می کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x}.$$

اما در معادلات دیفرانسیل غیرخطی، حاصل ضرب متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها دیده می شود. جواب‌های معادله‌ی غیر خطی را نمی‌توان با هم جمع کرد تا جواب دیگری برای معادله‌ی اصلی به‌دست آورد.

معادله‌ی لزج بارگرز، نمونه‌ای از معادله‌ی دیفرانسیل جزئی غیر خطی است

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x}.$$

اگر معادله‌ی دیفرانسیل جزئی، به‌ازای بعضی مقادیر تابع، خطی و به‌ازای بعضی مقادیر غیر خطی باشد، به آن معادله‌ی دیفرانسیل جزئی شبه خطی گفته می‌شود.

[۱] Partial differential equation

به‌عنوان نمونه می‌توان به معادله‌ی زیر اشاره کرد:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}+xyu^۲=۰.$$

در ادامه به روش تجزیه‌ی آدومیان می‌پردازیم.

۳.۱ روش تجزیه‌ی آدومیان

روش تجزیه‌ی آدومیان[۱]، یک روش تحلیلی توانا برای حل مسائل غیر خطی است که ایده‌ای بسیار ساده دارد. این روش صرفنظرازاین‌که مسئله‌ی غیر خطی شامل پارامترکوچک/بزرگ باشد، دارای همگرایی تقریبا َزیادی است. تقریب داده شده به وسیله‌ی روش تجزیه، اغلب شامل چندجمله‌ای‌ها می‌باشد ولی در حالت کلی ناحیه‌ی همگرایی سری توانی، کوچک است. بنابراین مجموعه‌ی چندجمله-ای‌ها اغلب پایه‌ای مناسب برای تقریب جواب یک مساله‌ی غیر خطی نیست. متاسفانه روش تجزیه نمی‌تواند شرایطی را فراهم کند تا توابع پایه‌ای متفاوتی را برای تقریب جواب مساله‌های غیر خطی به-کار بریم. علاوه بر محدودیت فوق، روش تجزیه فاقد راهی است که منجر به سازش ناحیه و سرعت همگرایی سری تقریب گردد. روش تجزیه‌ی آدومیان، معادله‌ی دیفرانسیل غیر خطی را به‌دو مولفه‌ی $\mathcal{L}(y(x))+N(y(x))=۰$ تقسیم می‌کند که در آن $\mathcal{L}$ و N به ترتیب عملگرهای خطی و غیر خطی هستند. سپس معادله را نسبت به $\mathcal{L}(y(x))$ حل می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(y(x))=-N(y(x))$$

با اعمال $\mathcal{L}^{-۱}$ روی دو طرف معادله‌ی فوق، خواهیم داشت:

$$y=-\mathcal{L}^{-۱}\left(N(y(x))\right)+\varphi(x) \qquad (۱.۳.۱)$$

که در آن $\varphi(x)$، ناشی از انتگرال‌گیری است و در شرط $\mathcal{L}(\varphi(x))=0$ صدق می‌کند.

علاوه بر این، فرض می‌کنیم که جمله‌ی غیرخطی $N(y(x))$، دارای نمایش سری نامتناهی

$$N(y(x))=\sum_{n=۰}^{\infty}A_n(x) \qquad (۲.۳.۱)$$

[۱] Adomian’s decomposition method

باشد که در آن

$$A_n(x) = \frac{۱}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} N(\sum_{n=۰}^{\infty}(\lambda^n y_n))\Big|_{\lambda=۰} \qquad (۳.۳.۱)$$

چند جمله‌ای‌های آدومیان هستند. فرض می‌کنیم جواب $y(x)$ قابلیت نمایش

$$y(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} y_n(x) \qquad (۴.۳.۱)$$

را داشته باشد. درادامه، با جاگذاری سری‌های (۴.۳.۱) و (۲.۳.۱) درمعادله‌ی (۱.۳.۱)، داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} y_n(x) = \varphi(x) - \mathcal{L}^{-۱}(\sum_{n=۰}^{\infty} A_n(x)).$$

با برابر قراردادن جملات در سری فوق، جواب تقریبی به‌دست خواهدآمد. به‌هرحال همه‌ی جملات سری فوق، قابل محاسبه نیستند و جواب توسط سری‌های $\sum_{n=۰}^{N} y_n(x)$ تقریب زده می‌شوند.

در ادامه به حل معادله‌ی ریکاتی درجه‌ی دوم با روش تجزیه‌ی آدومیان می‌پردازیم.

مثال ۲.۳.۱. معادله‌ی دیفرانسیل ریکاتی درجه‌ی دوم

$$\frac{dy(t)}{dt} = ۲y(t) - y^۲(t) + ۱ \qquad (۵.۳.۱)$$

با شرط اولیه‌ی $y(۰) = ۰$ مفروض است. جواب واقعی معادله‌ی (۵.۳.۱) با شرط اولیه‌ی $y(۰) = ۰$ عبارتست از:

$$y(t) = ۱ + \sqrt{۲}\tanh\left(\sqrt{۲}t + \log(\sqrt{۲} - ۱)\right). \qquad (۶.۳.۱)$$

در نتیجه بسط تیلور $y(t)$ حول $t = ۰$ به صورت زیر است:

$$y(t) = t + t^۲ + \frac{t^۳}{۳} - \frac{t^۴}{۳} - \frac{۷t^۵}{۱۵} - \frac{۷t^۶}{۴۵} + \frac{۵۳t^۷}{۳۱۵} + \frac{۷۱t^۸}{۳۱۵} + \cdots. \qquad (۷.۳.۱)$$

در روش تجزیه‌ی آدومیان، مساله‌ی مقدار اولیه‌ی (۵.۳.۱) را با معادله‌ی انتگرالی ولترای

$$y(t) = t + \int_۰^t \left(۲y(s) - y^۲(s)\right) ds$$

جایگزین می‌کنیم. جواب به‌وسیله‌ی

$$y(t) = y_{0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$$

داده می‌شود که در آن

$$y_{0}(t) = t,$$
$$y_{k+1}(t) = \int_{0}^{t} \left(2y_k(s) - A_k(s)\right) ds, \qquad k \geq 0$$

که

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{k} y_n y_{n-k}$$

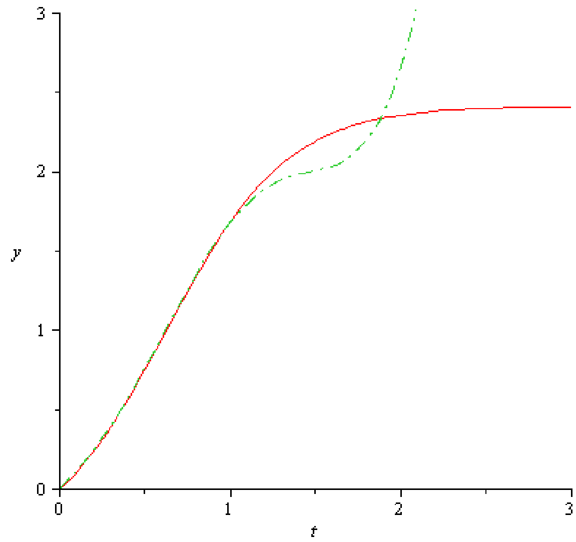
به چند جمله ای‌های آدومیان معروف هستند. پس

$$y_1(t) = t^2 - \frac{t^3}{3},$$
$$y_2(t) = \frac{2t^3}{3} - \frac{2t^4}{3} + \frac{2t^5}{15},$$
$$y_3(t) = \frac{t^4}{3} - \frac{11t^5}{15} + \frac{17t^6}{45} - \frac{17t^7}{315},$$
$$\vdots$$

و بنابراین

$$y(t) \cong t + t^2 + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{17t^6}{45} - \frac{17t^7}{315}.$$

نمودار (۱.۳.۱) مقایسه‌ی بین جواب به‌دست آمده از روش تجزیه‌ی آدومیان وجواب واقعی (۶.۳.۱) را نشان می‌دهد.



نمودار (۱.۳.۱) : تقریب مرتبه‌ی چهارم روش تجزیه‌ی آدومیان (- · -) y_{ADM} و (—) y_{exact}

۴.۱ روش اختلال هوموتوپی

به منظور توضیح این روش، معادله‌ی زیر را

$$A(u) - f(r) = ٠$$

با شرایط مرزی

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = ٠$$

در نظر می‌گیریم که در آن

$$A(u) = \mathcal{L}(u) + N(u).$$

هوموتوپی $v(r,p): \Omega \times [٠,١] \to \Re$ ، صادق در

$$H(v,p) = \mathcal{L}(v) - \mathcal{L}(u_٠) + p\mathcal{L}(u_٠) + p[N(v) - f(r)] = ٠ \qquad (١.٤.٨)$$

را در نظرمی‌گیریم‌که در آن r عضوی از دامنه Ω می‌باشد، $p\epsilon[٠,١]$ یک پارامتر محاطی و $u_٠$ تقریب اولیه‌ی معادله‌ی مفروض است. به‌وضوح در هوموتوپی فوق داریم:

$$H(\nu,\cdot)=\mathcal{L}(\nu)-\mathcal{L}(u_{\cdot})=\cdot,\qquad H(\nu,\text{۱})=A(\nu)-f(r)=\cdot.$$

با تغییر p از ۰ به ۱، $\nu(r,p)$ تابع پارامتری از $u_{\cdot}(r)$ به $u(r)$ تغییر می‌کند. کمیت $\cdot\le p\le \text{۱}$ را به-عنوان یک پارامترکوچک در نظر گرفته و فرض می‌کنیم ν دارای نمایش سری توانی

$$\text{v}(r)=\text{v}_{\cdot}(r)+p\text{v}_{\text{۱}}(r)+p^{\text{۲}}\text{v}_{\text{۲}}(r)+p^{\text{۳}}\text{v}_{\text{۳}}(r)+\cdots \qquad (\text{۹.۴.۱})$$

بر حسب p باشد، زمانی که $p\to\text{۱}$ ، سری (۹.۴.۱) جواب تقریبی معادله‌ی مفروض را می‌دهد، یعنی:

$$u(r)=\lim_{p\to\text{۱}}\nu(r)=\text{v}_{\cdot}(r)+\text{v}_{\text{۱}}(r)+\text{v}_{\text{۲}}(r)+\text{v}_{\text{۳}}(r)+\cdots.$$

مثال ۳.۴.۱. مساله‌ی مقدار اولیه‌ی (۵.۳.۱) مفروض است. برای حل این مساله توسط روش اختلال هوموتوپی، با توجه به مطالب فوق، فرضیات زیر مورد نیاز است.
عملگر خطی $\mathcal{L}$ ، عملگر غیر خطی N ، تابع تحلیلی معلوم $f(r)$ و تقریب اولیه $y_{\cdot}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(u)=\frac{du}{dt}-\text{۲}u\quad,\quad N(u)=u^{\text{۲}}\quad,\quad y_{\cdot}(t)=t\quad,\quad f(r)=\text{۱}$$

با تشکیل هوموتوپی (۸.۴.۱) برای مساله‌ی مقدار اولیه‌ی (۵.۳.۱)، جاگذاری (۹.۴.۱) در (۸.۴.۱) و برابر قرار دادن جملات با توان‌های یکسان، داریم:

$$p^{\cdot}\left(\mathcal{L}(\text{v}_{\cdot})-\mathcal{L}(y_{\cdot})\right)=\cdot$$

$$p^{\text{۱}}\left(\mathcal{L}(\text{v}_{\text{۱}})+\mathcal{L}(y_{\cdot})+N(\text{v}_{\cdot})-f(r)\right)=\cdot\qquad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}(\text{v}_{\text{۱}})+\mathcal{L}(y_{\cdot})+\text{v}_{\cdot}^{\ \text{۲}}-\text{۱}=\cdot$$

$$p^{\text{۲}}\left(\mathcal{L}(\text{v}_{\text{۲}})+\text{۲}\text{v}_{\cdot}\text{v}_{\text{۱}}\right)=\cdot\qquad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}(\text{v}_{\text{۲}})+\text{۲}\text{v}_{\cdot}\text{v}_{\text{۱}}=\cdot$$

$$p^{\text{۳}}\left(\mathcal{L}(\text{v}_{\text{۳}})+\text{۲}\text{v}_{\cdot}\text{v}_{\text{۱}}+\text{v}_{\text{۱}}^{\ \text{۲}}\right)=\cdot\qquad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}(\text{v}_{\text{۳}})+\text{۲}\text{v}_{\cdot}\text{v}_{\text{۱}}+\text{v}_{\text{۱}}^{\ \text{۲}}=\cdot$$

$$p^{\text{۴}}\left(\mathcal{L}(\text{v}_{\text{۴}})+\text{۲}\text{v}_{\cdot}\text{v}_{\text{۳}}+\text{۲}\text{v}_{\text{۱}}\text{v}_{\text{۲}}\right)=\cdot\qquad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}(\text{v}_{\text{۴}})+\text{۲}\text{v}_{\cdot}\text{v}_{\text{۳}}+\text{۲}\text{v}_{\text{۱}}\text{v}_{\text{۲}}=\cdot$$

$$\vdots$$

که با توجه به فرض $\text{v}_{\cdot}(\text{t})=y_{\cdot}(t)=t$، ضریب $p^{\cdot}$ مساوی صفر است. برای نمونه $\text{v}_{\text{۱}}$ را به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}(\text{v}_۱) + \mathcal{L}(y_۰) + \text{v}_۰^{\ ۲} - ۱ = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\text{v}_۱}{dt} - ۲\text{v}_۱ + ۱ - ۲t + t^۲ - ۱ = ۰$$

$$\Longrightarrow \qquad \text{v}_۱(t) = \tfrac{۱}{۴}(-۱ + e^{۲t} - ۲t + ۲t^۲).$$

با حل معادلات خطی فوق خواهیم داشت:

$$\text{v}_۲(t) = \tfrac{۱}{۴}\left(t^۲ - e^{۲t}t^۲ + ۲t^۳\right),$$

$$\text{v}_۳(t) = \tfrac{۱}{۹۶}\left(-۳e^{۴t} + e^{۲t}\left(۱۲t^۴ - ۸t^۳ + ۱۲t^۲ + ۱۲t - ۹۶\right) + ۶۰t^۴ + ۱۲۰t^۳ + ۱۸۰t^۲ + ۱۹۲t + ۹۹\right),$$

$$\text{v}_۴(t) = \tfrac{۱}{۱۹۲}(e^{۴t}\left(۱۲t^۲ - ۶t + ۳\right) + e^{۲t}(-۸t^۶ + ۱۶t^۵ - ۳۶t^۴ - ۳۲t^۳ + ۱۹۲t^۲ - ۱۴۶۷) + ۱۶۸t^۵ + ۶۳۶t^۴ + ۱۵۸۴t^۳ + ۲۷۴۸t^۲ + ۲۹۴۶t + ۱۴۷۳, \ldots$$

با فرض $u_m(t) = \sum_{i=۰}^{m} \text{v}_i(t)$ و استفاده از بسط تیلور حول $t = ۰$ داریم:

$$u_۰(t) = t \ ,$$

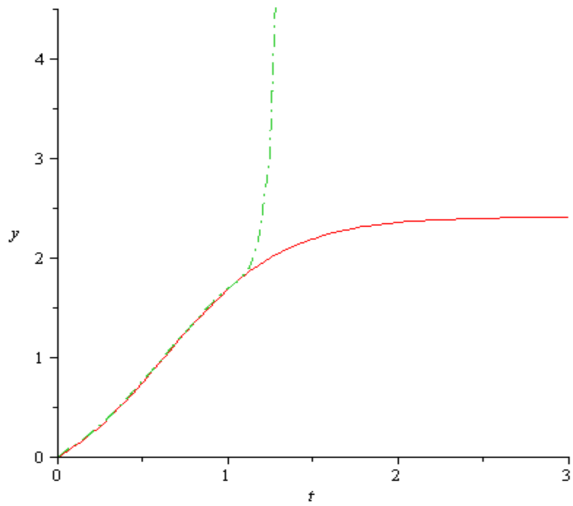
$$u_۱(t) = t + t^۲ + \frac{t^۳}{۳} + \frac{t^۴}{۶} + \cdots \ ,$$

$$u_۲(t) = t + t^۲ + \frac{t^۳}{۳} - \frac{t^۴}{۳} - \frac{۷t^۵}{۱۵} - \frac{۷t^۶}{۴۵} - \frac{۲t^۷}{۶۳} + \cdots \ ,$$

$$u_۳(t) = t + t^۲ + \frac{t^۳}{۳} - \frac{t^۴}{۳} - \frac{۷t^۵}{۱۵} - \frac{۷t^۶}{۴۵} - \frac{۵۳t^۷}{۳۱۵} + \frac{۲۲۱t^۸}{۱۲۶۰} + \cdots.$$

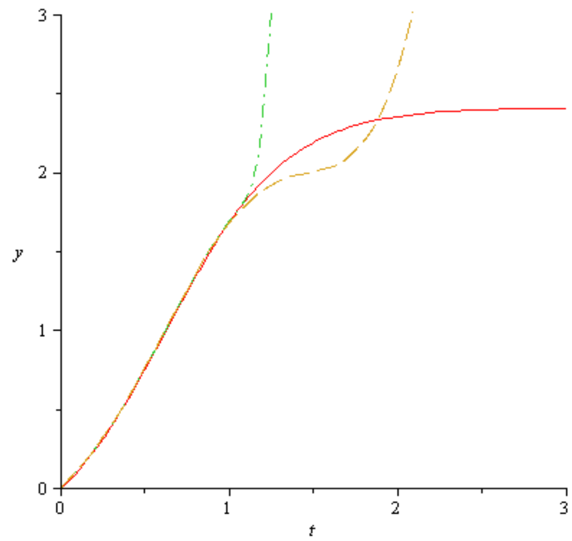
با توجه به (۷.۳.۱)، می‌بینیم که جواب به‌دست آمده از دقت بیشتری برخوردار است. با ادامه‌ی روش اختلال هوموتوپی، می‌توان جملات بیشتری از بسط تیلور را به سرعت به‌دست آورد.

نمودار (۲.۴.۱) مقایسه‌ی بین جواب به‌دست آمده از روش اختلال هوموتوپی و جواب دقیق (۶.۳.۱) را آسان می‌کند.



نمودار (۲.۴.۱) : تقریب مرتبه‌ی دهم اختلال هوموتوپی (– · –) y_{HPM} و (—) y_{exact}

در نمودار (۳.۴.۱)، تقریب مرتبه‌ی دهم از روش اختلال هوموتوپی با تقریب مرتبه‌ی چهارم از روش تجزیه‌ی آدومیان، نسبت به جواب دقیق (۶.۳.۱)، مقایسه شده است.



نمودار (۳.۴.۱) : (—) y_{exact} , (– · –) y_{HPM} , (- - -) y_{ADM}

فصل ۲

روش آنالیز هوموتوپی

۱.۲ مقدمه

بیشتر پدیده‌های پیرامون ما دارای ماهیت غیر خطی بوده و با معادلات غیر خطی فرمول‌بندی می‌شوند. هر چند به‌وجود آمدن کامپیوترهای پیشرفته، حل مسائل خطی را آسان کرده است، امّا هنوز بحث در مورد حل دقیق یک مساله‌ی غیر خطی مطرح است، زیرا با وجود به‌کارگیری کامپیوترهای پیشرفته و همچنین نرم افزارهایی مثل میپل[۱] و متمتیکا[۲] و شبیه آن، هنوز به‌دست آوردن جواب تحلیلی یک مساله غیر خطی مشکل است.

یکی از روش‌های نیمه تحلیلی برای حل مسائل غیر خطی، روش آنالیز هوموتوپی است، که بر مبنای یک مفهوم اساسی در توپولوژی مطرح شده است [۱۰]. برای مثال معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$N[u(t)]=0 \qquad (۱.۱.۲)$$

که در آن N یک عملگر غیر خطی، t متغیر زمان و$u(t)$ تابع مجهول است. فرض کنید$u_0(t)$ یک تقریب اولیه برای $u(t)$ و $\mathcal{L}$ نمایش یک عملگر خطی یک به یک کمکی باشد که

$$\mathcal{L}f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0, \qquad (۲.۱.۲)$$

هوموتوپی H را به شکل

$$H[\Phi(t;p),p]=(1-p)\mathcal{L}\,[\Phi(t;p)-u_0(t)]+pN[\Phi(t;p)] \qquad (۳.۱.۲)$$

تعریف می‌کنیم، که‌درآن$p\epsilon[0,1]$ پارامتر جانشانی و $\Phi(t;p)$ تابعی از t و p است. برای $p=0$ و $p=1$ به ترتیب داریم:

$$H[\Phi(t;p),p]\big|_{p=0} = \mathcal{L}[\Phi(t;0)-u_0(t)]$$

و

[۱] Maple
[۲] Mathematica

$$H[\Phi(t;p),p]\big|_{p=1} = N[\Phi(t;1)].$$

با توجه به رابطه ی(۲.۱.۲) به‌سادگی می‌توان نشان داد که جواب معادله‌ی

$$H[\Phi(t;p),p]\big|_{p=0} = 0$$

عبارت است از$\Phi(t;0) = u_0(t)$ و به همین ترتیب $\Phi(t;1) = u(t)$ جواب معادله‌ی

$$H[\Phi(t;p),p]\big|_{p=1} = 0$$

می‌باشد. وقتی پارامتر جانشانی p از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد، جواب معادله

$$H[\Phi(t;p),p] = 0$$

یعنی $\Phi(t;p)$ وابسته به پارامتر p بوده و به طور پیوسته از تقریب اولیه‌ی $u_0(t)$ تا جواب دقیق $u(t)$ برای معادله‌ی (۱.۱.۲) تغییر می‌کند. در توپولوژی چنین تغییری را دگردیسی[1] می‌نامند. لیائو[2] با استفاده از هوموتوپی رایج (۳.۱.۲) پارامتر کمکی غیر صفر h و تابع کمکی غیر صفر$H(t)$ را معرفی کرد تا هوموتوپی جدید

$$\widetilde{H}[\Phi(t;p),p,h,H] = (1-p)\mathcal{L}[\Phi(t;p)-u_0(t)] - phH(t)N[\Phi(t;p)] \qquad (۴.۱.۲)$$

را تعریف کنید، که فرم عمومی‌تر (۳.۱.۲) است، زیرا داریم:

$$\widetilde{H}[\Phi(t;p),p,-1,1] = H(\Phi;p).$$

به طور مشابه، هنگامی‌که پارامتر جانشانی p از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد، $\Phi(t;p,h,H)$ از تقریب اولیه $u_0(t)$ تا جواب دقیق $u(t)$ برای معادله (۱.۱.۲) تغییر می‌کند، امّا جواب $\Phi(t;p,h,H)$ از معادله

$$\widetilde{H}[\Phi(t;p),p,h,H] = 0 \qquad (۵.۱.۲)$$

نه‌تنها به پارامتر جانشانی p، بلکه به پارامتر کمکی غیر صفر h و تابع کمکی غیر صفر$H(t)$ وابسته است. پس زمانی‌که $p = 1$ ، جواب هنوز به پارامترکمکی h وابسته است.

[1] Deformation
[2] Shijun Liao

۲.۲ معادله‌ی دگردیسی مرتبه‌ی صفر برای معادلات دیفرانسیل معمولی

تعداد زیادی از مسائل غیر خطی به‌وسیله‌ی مجموعه‌ای از معادلات و شرایط اولیه یا مرزی فرمول‌بندی می‌شوند. برای اختصار تنها معادله‌ی غیر خطی

$$N[u(t)] = g(t) \tag{۶.۲.۲}$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن N یک عملگر غیر خطی، $u(t)$ تابع مجهول و $g(t)$ یک تابع معلوم می‌باشند. فرض می‌کنیم $u_{\cdot}(t)$ یک تخمین اولیه از جواب واقعی $u(t)$، $h \neq ۰$ پارامتر کمکی مجهول و $H(t) \neq ۰$ تابع کمکی معلوم باشند و $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی باشد که در (۲.۱.۲) صدق می‌کند. حال با استفاده از $p\epsilon[۰,۱]$ به‌عنوان پارامتر جانشانی، هوموتوپی تعمیم یافته‌ی

$$\widetilde{H}[\Phi(t;p);u_{\cdot}(t),H,h,p] = (۱-p)\{\mathcal{L}[\Phi(t;p)-u_{\cdot}(t)]\} - phH(t)\{N[\Phi(t;p)]-g(t)\} \tag{۷.۲.۲}$$

را می‌سازیم. با مساوی صفر قرار دادن طرف راست رابطه‌ی (۷.۲.۲)، به معادله‌ی

$$(۱-p)\{\mathcal{L}[\Phi(t;p)-u_{\cdot}(t)]\} = phH(t)\{N[\Phi(t;p)]-g(t)\} \tag{۸.۲.۲}$$

می‌رسیم، که به آن معادله‌ی دگردیسی مرتبه‌ی صفر[۱] می‌گویند. $\Phi(t;p)$ به‌عنوان جواب معادله‌ی (۸.۲.۲)، به‌تخمین اولیه‌ی $u_{\cdot}(t)$، عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$، تابع کمکی $H(t)$، پارامتر کمکی h و پارامتر جانشانی $p\epsilon[۰,۱]$ وابسته است. هنگامی‌که $p = ۰$، معادله‌ی دگردیسی مرتبه صفر(۸.۲.۲) به معادله‌ی

$$\mathcal{L}[\Phi(t;\cdot)-u_{\cdot}(t)]=\cdot \tag{۹.۲.۲}$$

تبدیل می‌شود، که با استفاده از (۲.۱.۲) داریم:

$$\Phi(t;\cdot) = u_{\cdot}(t) \tag{۱۰.۲.۲}$$

---

[۱] Zero-order deformation equation

وقتی که $p = ۱$، از آن جا که $h \neq ۰$ و $H(t) \neq ۰$، معادله‌ی دگردیسی مرتبه‌ی صفر بارابطه‌ی

$$N[\Phi(t;۱)] - g(t) = ۰ \qquad (۱۱.۲.۲)$$

هم ارز است که جواب واقعی معادله‌ی (۶.۲.۲) می‌باشد، یا به عبارت دیگر

$$\Phi(t;۱) = u(t). \qquad (۱۲.۲.۲)$$

با توجه به (۱۰.۲.۲) و (۱۲.۲.۲)، زمانی‌که پارامتر جانشانی p از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد، $\Phi(t;p)$ به‌طور پیوسته از تخمین اولیه‌ی $u_۰(t)$ تا جواب واقعی $u(t)$ برای مساله‌ی (۶.۲.۲) تغییر می‌کند. همان‌طورکه بیان شد این نوع تغییر پیوسته را در توپولوژی، دگردیسی می‌نامند. به همین دلیل معادله (۸.۲.۲) را معادله‌ی دگردیسی مرتبه‌ی صفر می‌گویند. مشتق مرتبه $m-$ام تابع $\Phi(t;p)$ در $p = ۰$ را به صورت

$$u_۰^{(m)}(t) = \frac{\partial^m \Phi(t;p)}{\partial p^m}\Big|_{p=۰} \qquad (۱۳.۲.۲)$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از قضیه‌ی تیلور، $\Phi(t;p)$ می‌تواند با یک سری توانی از p به‌شکل

$$\Phi(t;p) = \Phi(t;۰) + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{u_۰^{(m)}(t)}{m!} p^m \qquad (۱۴.۲.۲)$$

بیان شود. تعریف می‌کنیم

$$u_m(t) = \frac{u_۰^{(m)}(t)}{m!} = \frac{۱}{m!} \frac{\partial^m \Phi(t;p)}{\partial p^m}\Big|_{p=۰} \qquad (۱۵.۲.۲)$$

و با استفاده از (۱۰.۲.۲)، سری توانی (۱۴.۲.۲) به‌شکل

$$\Phi(t;p) = u_۰(t) + \sum_{m=۱}^{\infty} u_m(t) p^m \qquad (۱۶.۲.۲)$$

در می‌آید. همان‌طورکه می‌بینیم در انتخاب تقریب اولیه‌ی $u_۰(t)$، عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$، تابع کمکی $H(t)$ و پارامتر کمکی h آزادی عمل زیادی داریم. با فرض انتخاب مناسب این‌ها، می‌توان گفت:

الف) جواب $\Phi(t;p)$ از معادله دگردیسی مرتبه صفر(۸.۲.۲) برای هر $p\epsilon[۰,۱]$ وجود دارد.

ب) $u_۰^{(m)}(t)$ برای m=۱,۲,۳,... موجود است.