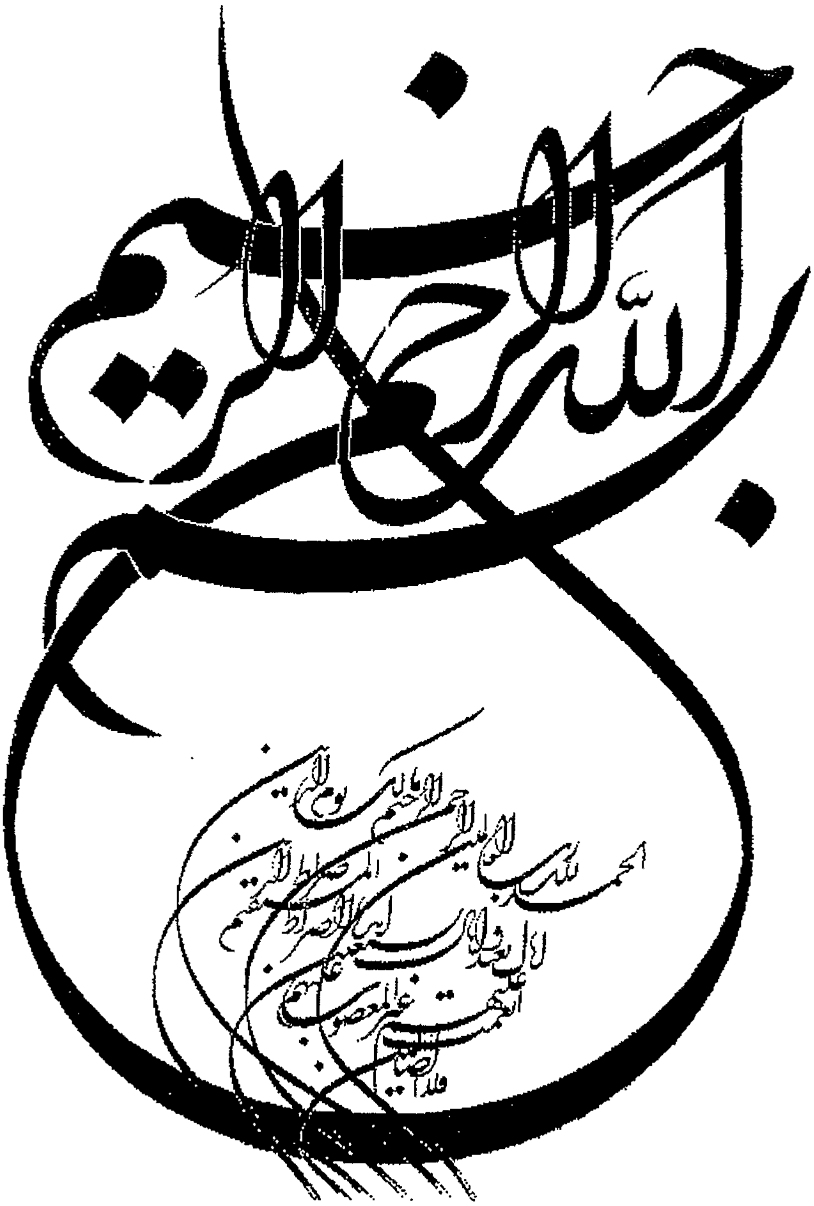
بسم الله الرحمن الرحیم
الحمد لله رب العالمین الرحمن الرحیم مالک یوم الدین
ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم
صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم و لا الضالین

۱۰۵۰۶۰

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

الگوریتم نقطه تقریبی روی خمینه های ریمانی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا پوریای ولی

استاد مشاور:

دکتر صغری نوبختیان

پژوهشگر:

سمیرا فاضل انوار یزدی

دی ماه ۱۳۸۶

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض خانم سمیرا فاضل انوار یزدی

تحت عنوان:

الگوریتم نقطه تقریبی روی خمینه های ریمانی

در تاریخ ...۸۶/۱۰/۱۸..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالـــی............ به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر محمدرضا پوریای ولی با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر صغری نوبختیان با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر محمود لشکری زاده با مرتبه علمی استاد امضاء

۴- استاد داور خارج گروه دکتر اعظم اعتماد با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

بسمه تعالی

کجا مرغ وهم را آن توان باشد تا بر اوج شناختش پر گشاید؟

سپاس بیشمار آفریدگاری را سزاست، که زبان ستایشگران از وصف کمالش عاجز و کوششگران سپاسگویش، با تلاش هر قدر گران نتوانند : "کز عهده ی شکرش بدر آیند."

پروردگاری که مرغ دور پرواز اندیشه را نیروی پر گشودن تا قاف قربتش نیست. یکتای بی همتائی که به نیروئی برتر از پندار، عدم را رنگ هستی زد و آنچه را که در چشم اندیشمندان جز ابخره ای رنگین و رویاگون بیش نبود، جامه ی وجود پوشانید.

پس از حمد و سپاس پروردگار متعال بر خود لازم می دانم از پدر و مادر عزیزم تشکر نمایم، که با صبر و شکیبایی و حمایت همه جانبه در تمام مراحل زندگی مرا یاری نمودند.

همچنین مراتب امتنان خود را از اساتید ارجمند و دلسوز آقای دکتر پوریای ولی و سرکار خانم دکتر نوبختیان بجا می آورم، که در طول تحصیل راهنما و مشوق اینجانب بودند.

از زحمات سرکار خانم دکتر اعتماد و جناب آقای دکتر لشکری زاده در خواندن این پایان نامه و پروفسور تاپسو در ارسال مقالات سپاسگزارم و از تمام اساتید ریاضی، سرکار خانم ها گرامی، موری، فرهمند، غازی و معمار در طی تدوین این پایان نامه تشکر می کنم.

دی ماه ۱۳۸۶

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و همه ی کسانی که در به ثمر رساندن

این پایان نامه یاریم کردند.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا الگوریتم نقطه تقریبی (PPA) و همگرایی آن برای مـی نـیمم سـازی مسـائل محـدب روی فضاهای هیلبرت را مورد بررسـی قـرار می دهیم. سپـس به مطالعه ی مسائـل می نـیمم سـازی مـی پـر دازیـم، در حالتـی که مجموعه ی قیود خمینه ی ریمانی با انحنای برشی غیر مثبت و تابع هـدف محـدب باشـد و بـه ایـن ترتیـب الگوریتم نقطه تقریبی را به خمینه ها ی ریمانی تعمیم مـی دهـیم. همچنـین ثابـت مـی کنـیم دنبالـه ی تولیـد شـده به وسیله ی این روش خوش تعریف است و همگرا به نقطه ی می نیمم می باشد. پس از آن به بررسی این الگـوریتم در حالتی پرداخته که عملگر، میدان برداری یکنوا باشد. در این حالت هدف یافتن نقاط تکین (منفرد) میـدان بـرداری یکنـوا روی خمینه های هادامار می باشد. سپس با معرفی متریک ریمانی مناسب، نشان می دهیم کـه مـی تـوان مسـائل غیـر محدب و غیر یکنوا را به مسائل محدب و یکنوا تبدیل کرد.

واژه های کلیدی : نقطه تقریبی، مسئله ی غیر محدب، خمینه ها ی ریمانی، خمینه ها ی هادامار، محدب ژئودزیک.

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

عنوان صفحه

پیشگفتار

تحدّب یکی از مهم ترین ابزار های موجود در برنامه ریزی ریاضی است، که این مفهوم به صورت های مختلفی تعمیم داده شده است. از آن جمله می توان به مفاهیم شبهه محدب [۱] و نیم محدب [۲] اشاره نمود. همچنین می توان با استفاده از روش های عددی، بسیاری از مسائل بهینه سازی غیر محدب را حل نمود.

تعمیم مفهوم تحدّب به روی خمینه های هموار بسیار طبیعی به نظر می رسد. مسائل بسیار زیادی روی خمینه های هموار وجود دارند که با استفاده از مفهوم تعمیم داده شده ی تحدّب روی خمینه ها، قابل حل می باشند.

ویژگی خمینه های هموار در این است که این فضاها خطّی نبوده و بسیاری از روش های موجود که برای حل مسائل بهینه سازی روی فضاهای خطّی بکار برده می شوند، روی خمینه های هموار کار ساز نیستند.

رابشاک [۳][۲۸] واُدریس [۴] [۳۶] از پیشگامان استفاده از مفهوم تعمیم یافته ی تحدّب با نام تحدّب ژئودزیک [۵] هستند. آنها این مفهوم را برای حل مسائل بهینه سازی روی خمینه ها بکار گرفتند. پیشرفت های انجام شده در سال های اخیر، مبین کارائی این روش ها بر روی خمینه های ریمانی است. از روش های عددی مورد استفاده در بهینه سازی می توان

[۱] $pseudo-convex$

[۲] $quasi-convex$

[۳] $Rapcsak$

[۴] $Udriste$

[۵] geodesic convexity

به روش های الگوریتم نقطه تقریبی (PPA) و منظم سازی تقریبی اشاره نمود. روش الگوریتم نقطه تقریبی توسط مارتینه [6] [۲۲] و راکفلر [۳۱]، ابداع گردید و روی فضای هیلبرت، مورد مطالعه قرار گرفت.

هدف ما در این پایان نامه این است که با توجه به مقاله ی [۱۸]، به مطالعه ی الگوریتم نقطه تقریبی و همگرایی آن روی فضاهای هیلبرت پرداخته، و سپس با استفاده از مقالات [۱۱] و [۱۴]، به بررسی این روش به روی خمینه های ریمانی بپردازیم.

این پایان نامه شامل چهار فصل است.

در فصل اول به بیان تعاریف، مفاهیم مقدماتی و بعضی قضایا و نتایج می پردازیم.

در فصل دوم به بررسی روش الگوریتم نقطه تقریبی و همگرائی آن برای می نیمم سازی مسائل محدب

$$\min_{x\in H} f(x)$$

می پردازیم، که در آن $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ تابعی سره ، نیم پیوسته پائینی و محدب در فضای هیلبرت H است. همچنین سرعت همگرایی برای باقیمانده ی $f(x_n) - f(u)$ تخمین زده می شود و به مسئله ی راکفلر، که آیا (PPA) به طور قوی همگراست یا نه پاسخ می دهیم.

در فصل سوم به بررسی مسائل می نیمم سازی با قیود پر داخته و نشان می دهیم اگر مجموعه ی قیود، خمینه ی ریمانی با انحنای برشی غیر مثبت و تابع هدف محدب باشد، آنگاه الگوریتم نقطه تقریبی در فضای اقلید سی را می توان برای حل مسائل می نیمم

[6] $Martinet$

سازی به خمینه های ریمانی تعمیم داد. همچنین نشان می دهیم که دنباله ی تولید شده به وسیله ی این الگوریتم خوش تعریف است و به یک می نیمم کننده همگراست.

در فصل چهارم به بررسی روش الگوریتم نقطه تقریبی روی خمینه های ریمانی در حالتی می پردازیم که عملگر، میدان برداری یکنوا است. در این حالت، هدف یافتن نقاط تکین (منفرد) میدان برداری یکنوا است. همچنین با ارائه ی مثالی نشان می دهیم که می توان با معرفی متر مناسب مسائل غیر محدب و غیر یکنوای به صورت

$$\min_{p\in M} f(p)$$

و یافتن نقاط x در M به طوری که $X(x) = \circ$،

را به مسائل محدب و یکنوا تبدیل کرد.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به ارائه ی برخی از تعاریف، قضایا و نتایج مورد نیاز در پایان نامه پر داخته می شود. منابع اصلی در این فصل [۱]، [۲]، [۳]، [٦]، [۱۹]، [۲۱]، [۳۳]، [۳۴] و [۳۵] می باشند.

۱.۱. فضاهای متریک کامل:

تعریف ۱.۱ . فرض کنید X یک مجموعه ی ناتهی باشد، تابع حقیقی d تعریف شده بر $X \times X$ را یک متر روی X نامیم، هر گاه برای هر $x, y, z \in X$ ، داشته باشیم:

۱) $d(x,y) \geq \circ$, $d(x,y) = \circ \Longleftrightarrow x = y$ ؛

۲) $d(x,y) = d(y,x)$ ؛

۳) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

مجموعه ی X با متر d را یک فضای متری نامیده و آن را با (X,d) نشان می دهیم.

فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای در X باشد. گوئیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به x است، هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon.$$

در این صورت می نویسیم $x_n \longrightarrow x$.

دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را کوشی نامیم، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

تعریف ۲.۱ . فضای متری (X,d) را کامل (تام)[1] نامیم، هر گاه هر دنباله ی کوشی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X به عضوی مانند $x \in X$ همگرا باشد.

فضاهای برداری که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند، فضاهای برداری حقیقی هستند.

تعریف ۳.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری باشد. تابع $\|\ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی X نامیم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ، در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\|x\| \geq 0$ ؛

۲) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ؛

۳) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ؛

۴) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

اگر روی X یک نرم وجود داشته باشد X را یک فضای نرم دار نامیم.

[1] complete

اگر X یک فضای نرم دار باشد، مجموعه ی همه ی تابعک های خطی پیوسته Λ روی X را با X' نمایش می دهیم. X' یک فضای نرم دار است که آن را دوگان X نامیم و نرم آن به صورت زیر تعریف می شود

$$\|\Lambda\|_{\star} = \sup\{|\Lambda\, x| \ : \ \|x\| \leq ۱\}.$$

تعریف ۴.۱ . یک تابع پوشای $h : \langle X, \tau_۱\rangle \longrightarrow \langle Y, \tau_۲\rangle$ یک همانریختی[۲] (نگاشت توپولوژیک) است اگر و تنها اگر h یک به یک و h و $h^{-۱}$ پیوسته باشند.

تعریف ۵.۱ . فرض کنید X یک فضای نرم دار و X' دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده به وسیله ی X' روی X ، یعنی ضعیف ترین توپولوژی روی X به قسمی که هر $\Lambda \in X'$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X گویند وآن را با $\sigma(X, X')$ نشان می دهند.

اگر $x_{\circ}$ عضوی دلخواه از X ، $\varepsilon > \circ$ و $\Lambda \in X'$ ، آنگاه:

$$U(\Lambda, x_{\circ}, \varepsilon) = \{x \in X \ : \ |\Lambda x - \Lambda x_{\circ}| < \varepsilon\}, \qquad (۱)$$

یک مجموعه ی باز (یک همسایگی از $x_{\circ}$) نسبت به توپولوژی ضعیف است. در حقیقت گردایه[۳] تمام $U(\Lambda, x_{\circ}, \varepsilon)$ وقتی که Λ ، $x_{\circ}$ و ε تغییر می کنند، تشکیل یک زیر پایه برای توپولوژی ضعیف می دهند و گردایه تمام اشتراک های متناهی از مجموعه های به شکل (۱) تشکیل یک پایه برای توپولوژی ضعیف می دهند. بنابراین یک مجموعه ی پایه‌ای باز برای توپولوژی ضعیف به شکل زیر می باشد

[۲] homeomorphism

[۳] collection

$$B = \{x \in X \ : \ |\Lambda_1 x - \Lambda_1 x_0| < \varepsilon_1\} \cap \{x \in X \ : \ |\Lambda_2 x - \Lambda_2 x_0| < \varepsilon_2\} \cap \ldots \cap \{x \in X \ : \ |\Lambda_m x - \Lambda_m x_0| < \varepsilon_m\},$$

برای یک عضو $x_0 \in X$ و $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m \in X'$ و اعداد مثبت $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$. برای دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به x در X ، نسبت به توپولوژی ضعیف می نویسیم $x_n \xrightarrow{w} x$.

به بیان دیگر توپولوژی ضعیف روی X به صورت زیر تعریف می شود:

x در X به طور ضعیف به $\bar{x}$ همگراست اگر برای هر $\Lambda \in X'$

$$\langle \Lambda, x \rangle \to \langle \Lambda, \bar{x} \rangle.$$

تعریف ۱.۶ . فضای برداری H را یک **فضای ضرب داخلی** نامیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x , y در H یک عدد حقیقی مانند (x,y) به نام « حاصل ضرب داخلی » (یا « حاصل ضرب اسکالر») y, x چنان مربوط شده باشد که شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $(x,y) = (y,x)$ ؛

۲) اگر $x, y, z \in H$ ، $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$ ؛

۳) اگر $x, y \in H$ و α اسکالر باشد، $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ ؛

۴) به ازای هر $x \in H$ ، $(x,x) \geq 0$ ؛

۵) $(x,x) = 0$ ایجاب می کند که $x = 0$.

اگر X یک فضای حاصل ضرب داخلی باشد، آنگاه نرم x به صورت

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2},$$

تعریف می شود که خواص یک نرم را داراست.

نتیجه ۷.۱ . نامساوی کوشی– شوارتز[۴] . برای هر y, x در فضای ضرب داخلی H داریم:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

نتیجه ۸.۱ . نامساوی مثلثی . برای هر y, x در فضای ضرب داخلی H داریم:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

اگر فاصله ی بین y, x را مساوی $\|x - y\|$ تعریف کنیم، تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرارند. لذا H یک فضای متری است. هر گاه این فضای متری تام باشد، یعنی هر دنباله ی کوشی در H در آن همگرا باشد، آنگاه H یک فضای هیلبرت[۵] نام دارد.[۳۳]

تعریف ۹.۱ . فضای توپولوژی (X, τ) را هاسدورف[۶] گوئیم هر گاه برای هر دو عضو متمایز p و q در X، همسایگی مانند U برای p و همسایگی مانند V برای q وجود داشته باشد به طوری که $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۱۰.۱ . فضای $\langle X, \tau \rangle$ شمارش پذیر نوع دوم است اگر و تنها اگر τ دارای یک پایه ی شمارش پذیر $\beta = \{B_n \ : \ n \in I^+\}$ باشد، که در آن I^+ مجموعه ی اعداد طبیعی است.

تعریف ۱۱.۱ . فرض کنید $f, f' : I \longrightarrow X$ ، که درآن $I = [0, 1]$ است، دو مسیر(یعنی دو تابع پیوسته) در فضای توپولوژی X با نقاط ابتدایی و انتهایی یکسان باشند. گوئیم f با

[۴] $Cauchy - Schwarz$

[۵] Hilbert

[۶] $Hausdorff$

f' همــوتوپی مسیــری است هــر گاه نگاشت پیوستــه ی $F : I \times I \longrightarrow X$ یافت شــود به گونه ای که در روابط زیر صدق کند:

$$(۱) \begin{cases} F(x, ۰) = f(x), \\ F(x, ۱) = f'(x). \end{cases} \qquad (۲) \begin{cases} F(۰, t) = f(۰) = x_۰, \\ F(۱, t) = f(۱) = x_۱. \end{cases}$$

تذکر ۱۲.۱ . همـوتوپی مسیری بودن، مسیرهای های بین دو نقطه ی $x_۰$ و $x_۱$ از فضای X را به کلاس های هم ارزی افراز می کند. کلاس مسیر f را با $[f]$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۳.۱ . منظـور از یک طوقه[۷] در فضای X ، مسیری است که نقاط ابتـدایی و انتهایی آن بر هم منطبق باشـد. یعنی:

$$f : I \longrightarrow X$$

$$f(۰) = f(۱) = x_۰$$

$x_۰$ را نقطه پایه ی طوقه ی f گوئیم.

تعریف ۱۴.۱ . فـرض کنید $f, g : I \longrightarrow X$ ، دو مسیر در فضای X باشند به گونه ای که $f(۱) = g(۰)$. در این صـورت ترکیب g, f ، با نمـاد $(f * g)$ ، را به صـورت زیـر تعریـف می کنیم:

$$h = f * g : I \longrightarrow X$$

$$h(t) = \begin{cases} f(۲t) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ g(۲t - ۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱. \end{cases}$$

[۷] loop

فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $f,g: I \longrightarrow X$ دو طوقه ی دلخواه بر پایه ی نظیر $x_\circ$ باشند. بر روی $[f]$ و $[g]$، عمل $[f] \circledast [g] = [f * g]$ را تعریف می کنیم.
مجموعه ی $\{[f] \ : \ f: I \longrightarrow X\}$ یک طوقه بر پایه ی $x_\circ$ است.، با عمل $\circledast$ تشکیل یک گروه می دهد. این گروه را اولین گروه بنیادی فضای X نسبت به پایه ی $x_\circ$ نامیم و به $\Pi_1(X, x_\circ)$ نمایش می دهیم.[۲۵]
قابل ذکر است که در فضاهای همبند مسیری گروه بنیادی بستگی به انتخاب نقطه ی پایه ندارد.[۲۵]

تعریف ۱۵.۱ . فضای توپولوژی X که همبند مسیری باشد را همبند ساده گویند، هرگاه $\Pi_1(X, x_\circ) = \circ$ باشد، یعنی اولین گروه بنیادی فضای X فقط شامل $[e_{x_\circ}]$ باشد.

تعریف ۱۶.۱ . تابع f با مقدار حقیقی، تعریف شده روی فضای توپولوژی X را موضعاً کراندار گوئیم، اگر برای هر $x_\circ$ در X همسایگی A از $x_\circ$ وجود داشته باشد به طوری که $f(A)$ مجموعه ای کراندار باشد، یعنی

$$\forall\, x \in A \ , \ \exists\, M > \circ \ , \ \mid f(x) \mid \leq M.$$

۲.۱. تعاریف و خواص بنیادی:

فرض کنید X یک فضای برداری باشد.

تعریف ۱۷.۱ . زیر مجموعه ی $K \subseteq X$ محدب است، اگر برای $x, y \in K$ و $\circ \leq t \leq 1$ داشته باشیم:

$$tx + (1 - t)y \in K.$$

گزاره ۱۸.۱ . فرض کنید K مجموعه ای محدب باشد. اگر $x_1, ..., x_n \in K$ و $\lambda_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in K$. در اینجا $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ ترکیب محـدب از عناصـر x_i نامیـده می شود.

اثبات . به [۳۵] رجوع شود. ■

تعریف ۱۹.۱ . تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ، را در نظر می گیریم. دامنه ی موثر f را به صورت

$$Dom(f) = \{x \in X \mid f(x) \ < \ +\infty\},$$

تعریف می کنیم.

تعریف ۲۰.۱ . تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ، را سره [۸] گوئیم اگر دامنه آن غیر تهی باشـد.

تعریف ۲۱.۱ . تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ، را محـدب [۹] گوئیم اگر برای هر ترکیب محدب $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ ازعناصر $x_i \in X$ ، نامساوی زیر برقرار باشد

$$f(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

تعریف ۲۲.۱ . تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ را در نظر می گیریم. زیر مجموعه ی

$$\text{epi(f)} := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\},$$

اپی گراف f نامیده می شـود.

تعریف ۲۳.۱ . تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ در x_0 را نیم پیوسته پائینی [۱۰] گوئیم، هرگاه برای هـر $\lambda < f(x_0)$ ، $\eta > 0$ وجـود داشته باشـد، به طوری که برای هر $x \in B(x_0, \eta)$ ،

[۸] proper

[۹] convex

[۱۰] lower semi-continuous