بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد در ریاضی محض

گراف‌های لاپلاسین صحیح

توسط

میترا نعمتی اندواری

استاد راهنما

دکترحمید رضا میمنی

استاد مشاور

دکتر سیامک یاسمی

پاییز ۱۳۸۷

جمهوری اسلامی ایران
دانشگاه تهران

اداره کل تحصیلات تکمیلی

شماره ....
تاریخ ....
پیوست ....

باسمه تعالی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب میترا یحیی متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه / رساله حاصل کار پژوهشی اینجانب است وبه دستاوردهایپژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است ، مطابق مقررات ارجاع ودر فهرست منابع ومآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه / رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است .
در صورت اثبات تخلف (در هرزمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد .
کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به پردیس / دانشکده / مرکز دانشگاه تهران می باشد .

۱۳۸۸ /۴/ ۲۱

نام ونام خانوادگی دانشجو میترا یحیی اندواری
امضاء

آدرس : خیابان انقلاب اول خیابان فخر رازی ـ پلاک ٥ کد پستی : ١٣٠٤٥/٤٦٨
فاکس : ٦٤٩٧٣١٤

۱۳۸۸ /۴/ ۲۱

بنام خدا
دانشگاه تهران

پردیس علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

گواهی دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

هیات داوران پایان نامه کارشناسی ارشد خانم میترا نعمتی اندواری

در رشته **ریاضی محض**

با عنوان : **گراف های لاپلاسین صحیح**

را در تاریخ ۸۷/۹/۲۶

۱۳۸۸ /۱۲/ ۲۱

	به عدد	به حروف
با نمره نهایی :	۱۹/۵	نوزده‌ونیم
و درجه :	عالی	

ردیف	مشخصات هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه یا موسسه	امضاء
۱	استاد راهنما :	دکتر حمیدرضا میمنی	دانشیار	دانشگاه شهید رجائی	
۲	داور داخلی:	دکتر محمدرضا درفشه	استاد	دانشگاه تهران	
۳	استاد مشاور:	دکتر سیامک یاسمی	استاد	دانشگاه تهران	
۴	نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر:	دکتر هایده اهرابیان	دانشیار	دانشگاه تهران	

تذکر: این برگه پس از تکمیل توسط هیات داوران در نخستین صفحه پایان نامه درج می گردد.

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم

که هرگز نمی توانم جوابگوی لطف و محبت بی دریغ آن‌ها باشم.

قدردانی

پس از سپاس از پروردگار لازم می‌دانم که از زحمات استاد راهنمای گرامی‌ام آقای دکتر میمنی و استاد مشاور محترم آقای دکتر یاسمی تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از آقای دکتر درفشه که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند سپاسگزارم.

گراف‌های لاپلاسین صحیح

چکیده

یک گراف لاپلاسین صحیح است اگر طیف ماتریس لاپلاسین آن تنها شامل مقادیر صحیح باشد. در اینجا خانوادهٔ گراف‌های لاپلاسین صحیح و چند زیرخانواده از آن را درنظر می‌گیریم. مانند خانوادهٔ گراف‌های لاپلاسین صحیح قابل ساخت و گراف‌هایی که مقادیر ویژهٔ لاپلاسین آنها صحیح و متمایز باشند. این دو زیرخانواده را دسته‌بندی می‌کنیم و بیشتر به بحث در مورد گراف‌های لاپلاسین صحیح قابل ساخت می‌پردازیم. بگونه‌ای که‌در مورد مقادیر ویژهٔ این گراف‌ها بحث می‌کنیم و همچنین تعداد گراف‌های لاپلاسین صحیحی که از طریق افزودن یک یال مناسب به این گراف‌ها بدست می‌آیند را درنظر می‌گیریم.

واژه‌های کلیدی : مقدارویژه، لاپلاسین صحیح، قابل ساخت، گراف تجزیه‌شدنی، الحاق

پیشگفتار

در چند دههٔ اخیر جبر و جبرخطی به کمک نظریهٔ گراف آمده و نتایج جالب و با ارزشی در مورد گراف‌ها حاصل شده است. مخصوصاً مطالعهٔ گراف با استفاده از ماتریس‌هایی که به آن نسبت داده می‌شوند، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. بررسی این ماتریس‌ها و مقادیر ویژهٔ آن‌ها بخصوص، نتایج شگفت‌انگیزی در رابطه با ویژگی‌های ساختاری گراف‌ها درپی داشته است.

ماتریس مجاورت و ماتریس لاپلاسین از جمله ماتریس‌هایی هستند که به گراف نسبت داده می‌شوند. تاکنون ماتریس مجاورت و مقادیر ویژهٔ آن بسیار مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. اگرچه اکنون در نظر برخی از نویسندگان، طیف لاپلاسین بسیار طبیعی‌تر و مهم‌تر از طیف مجاورت است.

ماتریس لاپلاسین یک گراف و مقادیر ویژهٔ آن در زمینه‌های مختلفی از ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند و دارای تعابیر فیزیکی در نظریه‌های مختلف فیزیک و شیمی می‌باشند. ماتریس لاپلاسین را ماتریس کیرشهف نیز می‌نامند. این عنوان به دلیل نقش مهم ماتریس گفته شده در قضیهٔ معروف ماتریس—درخت، که معمولاً به کیرشهف نسبت می‌دهند، به آن نسبت داده شد.

گرافی که طیف ماتریس مجاورت آن تنها شامل مقادیر صحیح باشد، گراف صحیح نامیده می‌شود. در سال ۱۹۷۳ هراری [۱] و شوینک [۲] سوالی را در مورد این که کدام گراف‌هاصحیح‌اند، مطرح کردند. گراف‌هایی با این خاصیت به‌طور مفصل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به موازات آن تعدادی از مقالات در زمینهٔ ماتریس لاپلاسین، خانوادهٔ گراف‌های لاپلاسین صحیح را مورد بررسی قرار دادند.

---

۱ Harary

۲ Schwenk

گرون [3] و مریز [4] مشاهده کردند که‌از ۱۱۲ گراف همبند ٦ رأسی، ۳۷ تای آن ها لاپلاسین صحیح می‌باشند در حالی که تنها ٦ تای آن ها صحیح‌اند. این مشاهده محرکی برای کار بر روی گراف‌هایی با طیف لاپلاسین صحیح شد.

در این میان، مقاله‌ای از سو [5] که راهبردی برای ساختن گراف‌های لاپلاسین صحیح پیشنهاد می‌کند، قابل ملاحظه است. با استفاده از آن، مفهوم گراف‌های لاپلاسین صحیح قابل ساخت، توسط کرکلند [6] مطرح شد. گراف‌های لاپلاسین صحیح، گراف‌هایی هستند که از گراف تهی هم‌مرتبه با خود، با افزودن دنباله‌ای از یال‌ها بدست می‌آیند، به طوری که در ازای افزودن هر یال، گراف حاصل نیز لاپلاسین صحیح باشد. این گراف‌ها به طور کامل دسته‌بندی شده‌اند و زیرخانواده‌ای از خانوادهٔ گراف‌های تجزیه‌شدنی، گراف‌های فاقد زیرگراف رأس القایی P_4، می‌باشند.

در فصل ۱ به بیان مفاهیم و قضایای مقدماتی پرداخته شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت. فصل ۲ به گراف‌های لاپلاسین صحیح قابل ساخت اختصاص یافته که به طور کامل دسته‌بندی شده‌اند و روشی برای یافتن مقادیر ویژهٔ لاپلاسین آن‌ها ارائه شده‌است. در فصل ۳ به بحث در مورد گراف‌هایی با مقادیر ویژهٔ لاپلاسین صحیح و متمایز پرداخته و ساختار گراف‌هایی با این خاصیت نیز مشخص شده است.

همچنین تمامی گراف‌های لاپلاسین صحیح که شامل n دور، $1 \leq n \leq 5$، می‌باشند، در فصل ۴ دسته‌بندی شده‌اند.

---

۳ Grone

۴ Merris

۵ So

٦ Kirkland

فهرست مندرجات

فصل ۱

ماتریس لاپلاسین

۱.۱ مقدمه

در این فصل ضمن تعریف ماتریس لاپلاسین وابسته به گراف، به بیان برخی از قضایا و نتایج گرفته شده در مورد آن می‌پردازیم. این نتایج برای شناخت گراف‌هایی که ماتریس لاپلاسین متناظر با آن‌ها، تنها دارای مقادیر ویژهٔ صحیح‌اند، در این فصل و فصل‌های بعدی به کار گرفته خواهند شد.

۲.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱ فرض کنید $G=(V(G),E(G))$ یک گراف ساده، یعنی گرافی بدون جهت و بدون طوقه و یال چندگانه، با مجموعه رئوس $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{e_1,e_2,...,e_m\}$ باشد. ماتریس مجاورت G با $A(G)=(a_{i,j})$ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$a_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{اگر } v_j \text{ و } v_i \text{ مجاور باشند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف ۲.۱ برای گراف G یک جهت دلخواه در نظر می‌گیریم به صورتی که برای هر یال $e_j=\{v_i,v_k\}$، یکی از رئوس v_i یا v_k سر مثبت آن و دیگری را سر منفی درنظر می‌گیریم. ماتریس تلاقی رأس—یال $Q=(q_{i,j})$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$q_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i \text{ سر مثبت } e_j \text{ باشد} \\ -1 & \text{اگر } v_i \text{ سر منفی } e_j \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف ۳.۱ ماتریس لاپلاسین[1]. گراف G که آن را با $L(G)$ نمایش می‌دهند ماتریس $Q\,Q^T$ است. با ضرب Q و Q^T مشاهده می‌شود که $L(G)=D(G)-A(G)$ است به طوری که $D(G)$ ماتریس قطری درجات رئوس است.

[1] Laplacian Matrix

چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس $L(G)$، $\det(\lambda I - L(G))$، را با $\mu(G,\lambda)$ نمایش می‌دهیم. ریشه‌های این چند جمله‌ای، مقادیر ویژهٔ لاپلاسین G نامیده می‌شوند و آن‌ها رابه صورت $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \ldots \leq \lambda_n(G)$ با ترتیب صعودی $S(G) = (\lambda_1(G), \lambda_2(G), \ldots, \lambda_n(G))$ نمایش می‌دهیم. $S(G)$ طیف لاپلاسین گراف G نامیده می‌شود.اگر مقدار ویژهٔ $\lambda_i(G)$ با تکرر m_i باشد، طیف G را به صورت $S(G) = (\lambda_1(G)^{m_1}, \ldots, \lambda_k(G)^{m_k})$ نمایش می‌دهیم.

دو گراف با طیف یکسان را گراف‌های هم‌طیف [۲] می‌نامند. اگر دو گراف طیف لاپلاسین یکسان داشته باشند، هم‌طیف نسبت به ماتریس لاپلاسین می‌باشند.

درجهٔ رأس v_i، تعداد رئوس مجاور به آن، را با d_{v_i} نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۱ [۸] فرض کنید G گراف سادهٔ n رأسی باشد. حقایق زیر در مورد ماتریس لاپلاسین برقرار است.

(۱) $L(G)$ دارای مقادیر ویژهٔ حقیقی است؛

(۲) این مقادیر ویژه نامنفی‌اند؛

(۳) کوچکترین مقدار ویژه صفر است و $(1, 1, \ldots, 1)^T$ یک بردار ویژهٔ متناظر با این مقدار ویژه است. همچنین تکرر صفر به عنوان یک مقدار ویژه از $L(G)$ برابر تعداد مولفه‌های همبندی G است؛

(۴) $\lambda_n(G) \leq n$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر متمم G ناهمبند باشد؛

(۵) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2 \mid E(G) \mid = \sum_{v\in V(G)} d_v$؛

(٦) اگر G دارای ماکسیمم درجهٔ $\Delta > 0$ باشد، آنگاه $\lambda_n(G) \geq \Delta + 1$، و اگر G همبند باشد تساوی برقرار است اگر وتنها اگر $\Delta = n - 1$.

λ_2 را همبندی جبری [۳] گراف G می‌نامند. رابطهٔ این کمیت با پارامترهای قدیمی آن، همبندی رأسی، $\nu(G)$، و همبندی یالی، $\eta(G)$، (به ترتیب مینیمم تعداد رئوس و یالی که با حذف آن‌ها گراف ناهمبند شود)، به صورت زیر است.

---

۲ Isospectral

۳ Algebraic Connectivity

قضیه ۲.۱ [۳] فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. آنگاه:

(۱) $\lambda_2(G) \leq \nu(G) \leq \eta(G)$؛

(۲) $\lambda_2(G) \geq 2\eta(G)(1-\cos\frac{\pi}{n})$.

قضیه ۳.۱ [۱۴] فرض کنید G یک گراف غیرکامل و همبند n رأسی باشد در این صورت $\lambda_2(G) = \nu(G)$ اگر و تنها اگر G را بتوان به صورت $G_1 \vee G_2$ نوشت، به طوری که G_1 یک گراف ناهمبند با $n-\nu(G)$ رأس و G_2 گرافی $\nu(G)$ رأسی و $\lambda_2(G_2) \geq 2\nu(G)-n$ است.

درخت فراگیر گراف n رأسی G، زیرگراف n رأسی G است که یک درخت نیز می‌باشد (گراف همبند بدون دور را درخت نامند).

قضیه ۴.۱ (ماتریس ـدرخت[۴])[۱۵]

تعداد درخت‌های فراگیر گراف n رأسی G که با $\kappa(G)$ نمایش می‌دهند، برابر است با:

$$\kappa(G) = \frac{1}{n}\lambda_2(G)...\lambda_n(G).$$

[۴] Matrix-Tree-Theorem

۳.۱ گراف‌های لاپلاسین صحیح

تعریف ۴.۱ گراف G را لاپلاسین صحیح[۵] می‌نامیم اگر تمامی مقادیر ویژهٔ لاپلاسین آن صحیح باشند.

گراف‌هایی که مقادیر ویژهٔ ماتریس مجاورت آن‌ها مقادیری صحیح‌اند، تحت عنوان گراف‌های صحیح، به طور مفصل مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به‌موازات آن، یک تعداد از مقالات در زمینهٔ ماتریس لاپلاسین، خانوادهٔ گراف‌های لاپلاسین صحیح را مورد بررسی قرار دادند. باید توجه داشت که در بسیاری از موارد برای یک مقدار ویژهٔ خاص، کران مطرح شده تنها زمانی می‌تواند رخ دهد که مقدار ویژهٔ مورد نظر صحیح باشد.
همچنین از ۱۱۲ گراف همبند ٦ رأسی، ۳۷ تای آن ها لاپلاسین صحیح می‌باشند در حالی که تنها ٦ تای آن ها صحیح‌اند. بنابراین پرداختن به گراف‌های لاپلاسین صحیح می‌تواند سودمند باشد.

مثال ۱.۱ چند مثال از گراف‌های لاپلاسین صحیح را می‌توان در زیر مشاهده کرد:

(۱) گراف‌های کامل n رأسی که با K_n نمایش می دهیم؛

(۲) گراف‌های کامل دوبخشی که با $K_{n,m}$ نمایش می‌دهیم، برای هر n, m؛

(۳) مسیرهای n رأسی، P_n، برای $n \leq ۳$؛

(۴) دورهای n رأسی، C_n، برای $n \leq ۴$؛

(۵) چرخ‌ها، W_n، برای $n \leq ۵$.

قضیه ۵.۱ اگر G یک گراف r−منظم باشد، یعنی هر رأس آن از درجهٔ r باشد، آنگاه رابطهٔ بین مقادیر ویژهٔ $L(G)$ و $A(G)$ به صورت زیر داده می‌شود.

$$\lambda_i(G) = r - \mu_i(G) \quad ; \quad i = ۱, ۲, ..., n$$

به طوری که $\mu_i(G)$ مقادیر ویژهٔ ماتریس $A(G)$ می‌باشند.

۵ Laplacian Integral

برهان. در این حالت ماتریس قطری درجات برابر rI است که I ماتریس همانی می‌باشد. لذا $L(G) = D(G) - A(G) = rI - A$ و بنابراین $\det(\lambda I - L(G)) = \det((\lambda - r)I + A)$. □

بنا به این قضیه گراف r−منظم G صحیح است اگر و تنها اگر لاپلاسین صحیح باشد. بنابراین نتایج مربوط به گراف‌های صحیح و منظم را می‌توان به این مبحث منتقل کرد.

قضیه ۶.۱ [۹][۱۰] فرض کنید G گرافی n رأسی و $\bar{G}$ گراف متمم آن، گرافی با مجموعهٔ رئوس $V(G)$ و مجموعهٔ یال‌های $\overline{E(G)}$، باشد.

. رابطهٔ بین چندجمله‌ای‌های مشخصهٔ این دو گراف به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu(\bar{G}, \lambda) = (-1)^{n-1} \frac{\lambda}{n-\lambda} \mu(G, n-\lambda).$$

بنابراین مقادیر ویژهٔ $\bar{G}$ عبارتند از $\lambda_1(\bar{G}) = 0$ و $\lambda_{i+1}(\bar{G}) = n - \lambda_{n-i+1}(G)$ برای $i = 1, 2, ..., n-1$.

به راحتی از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود که یک گراف لاپلاسین صحیح است اگر و تنها اگر متمم آن چنین باشد. این خاصیتی است که لزوماً در مورد گراف‌های صحیح صدق نمی‌کند.

قضیه ۷.۱ درخت T لاپلاسین صحیح است اگر و تنها اگر یک ستاره باشد.

برهان. از آنجا که هر درخت حداقل یک رأس از درجهٔ یک دارد نتیجه می‌شود که همبندی رأسی هر درخت یک است. لذا $\nu(T) = 1$ از طرفی با توجه به قضیهٔ (۲.۱) $\lambda_2(T) \leq \nu(T) = 1$. لذا اگر T لاپلاسین صحیح باشد آنگاه لزوماً $\lambda_2(T) = 1$. با توجه به تساوی همبندی رأسی و همبندی جبری، از قضیهٔ (۳.۱) نتیجه می‌شود که $T = G_1 \vee G_2$ به طوری که G_1، $\nu(T) = 1$ رأسی است. لذا $T = K_1 \vee G_2$ و چون T یک درخت است G_2 باید بدون یال باشد. از مطالب گفته شده نتیجه می‌شود که T یک ستاره است. □

۱.۳.۱ اعمال روی گراف‌ها

تعریف ۵.۱ برای گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ داده شده، اجتماع این دو گراف را با $G_۱ \cup G_۲$ نمایش می‌دهیم. این گراف، گرافی با مجموعهٔ رئوس $V(G_۱) \cup V(G_۲)$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G_۱) \cup E(G_۲)$ تعریف می‌شود. همچنین الحاق این دو گراف که آن را با $G_۱ \vee G_۲$ نمایش می‌دهیم، گراف بدست آمده از $G_۱ \cup G_۲$ با افزودن تمامی یال‌های ممکن بین $G_۱$ و $G_۲$ می‌باشد. در واقع $G_۱ \vee G_۲ = \overline{\overline{G_۱} \cup \overline{G_۲}}$.

قضیه ۸.۱ فرض کنید G اجتماع گراف‌های $G_۱, ..., G_k$ باشد. آنگاه:

$$\mu(G, \lambda) = \prod_{i=۱}^{k} \mu(G_i, \lambda).$$

بنابراین اجتماع گراف‌های لاپلاسین صحیح، یک گراف لاپلاسین صحیح خواهد بود.

نتیجه ۱.۳.۱ [۹][۱۰] فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف به ترتیب با تعداد رئوس $n_۱$ و $n_۲$ باشند. چندجمله‌ای مشخصهٔ لاپلاسین الحاق این دو گراف به صورت زیر خواهد بود.

$$\mu(G_۱ \vee G_۲, \lambda) = \frac{\lambda(\lambda - n_۱ - n_۲)}{(\lambda - n_۱)(\lambda - n_۲)} \mu(G_۱, \lambda - n_۲) \mu(G_۲, \lambda - n_۱).$$

بنابراین اگرمقادیر ویژهٔ لاپلاسین $G_۱$ و $G_۲$ به ترتیب $\circ, \alpha_۲, ..., \alpha_{n_۱}$ و $\circ, \beta_۲, ..., \beta_{n_۲}$ باشند، آنگاه مقادیر ویژهٔ لاپلاسین الحاق این دو گراف عبارتند از:

$$\circ, n_۱ + n_۲, \alpha_۲ + n_۲, ..., \alpha_{n_۱} + n_۲, \beta_۲ + n_۱, ..., \beta_{n_۲} + n_۱.$$

از این قضیه نیز نتیجه می‌شود که دو گراف لاپلاسین صحیح‌اند اگر و تنها اگر الحاقشان چنین باشد.

تعریف ۶.۱ فرض کنید G و H دو گراف باشند. ضرب دکارتی $G \times H$ گرافی است با مجموعهٔ رئوس $V(G) \times V(H)$ و دو رأس $(v_۱, u_۱)$ و $(v_۲, u_۲)$ در $G \times H$ مجاورند اگر و تنها اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

(۱) در G، $v_۱ = v_۲$ و دو رأس $u_۱$ و $u_۲$ در H مجاور باشند؛

(۲) در G دو رأس $v_۱$ و $v_۲$ مجاور باشند و در H داشته باشیم $u_۱ = u_۲$.

اگر $A = (a_{i,j})$ ماتریس مرتبهٔ k و $B = (b_{i,j})$ ماتریس مرتبهٔ n باشد، آنگاه ضرب کرونکر $A \otimes B$ ماتریس مرتبهٔ kn است که بلوک (i,j)ام آن برای $۱ \leq i, j \leq k$ برابر $a_{i,j}B$ است.

می‌توان دید که ماتریس لاپلاسین $G \times H$ برابر است با $I_k \otimes L(G) + L(H) \otimes I_n$، که k تعداد رأس‌های گراف H و n تعداد رأس‌های G است. همچنین مقادیر ویژهٔ گراف $G \times H$ عبارتند از $\lambda_i(G) + \lambda_j(H)$ به ازای $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq k$.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $G \times H$ لاپلاسین صحیح است اگر و تنها اگر هر یک از دو گراف G و H لاپلاسین صحیح باشند.

مثال ۲.۱ طیف لاپلاسین $K_۳$، $(۰, ۳^{(۲)})$ و طیف $K_۲$ نیز $(۰, ۲)$ می‌باشد. از مطالب گفته شده در فوق نتیجه می‌شود که $S(k_۲ \times k_۳) = (۰, ۲, ۳^۲, ۵^۲)$. و به‌طور کلی $S(k_۲ \times k_n) = (۰, ۲, n^{n-۱}, (n+۲)^{n-۱})$.

۲.۳.۱ گراف خطی و زیرتقسیم و نیم‌منظم

تعریف ۷.۱ گراف خطی[۶] G گرافی است که رئوس آن متناظر با یال‌های G می باشند و دو رأس از آن مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های نظیرشان در G انتهای مشترک داشته باشند.

ماتریس مجاورت گراف خطی G که با A_l نمایش می‌دهیم در رابطهٔ $Q^TQ = ۲I + A_l$ صدق می کند. می‌دانیم که $L(G) = QQ^T$ واینکه دو ماتریس QQ^T و Q^TQ دارای مقادیر ویژهٔ غیر صفر یکسان

[۶] Line Graph