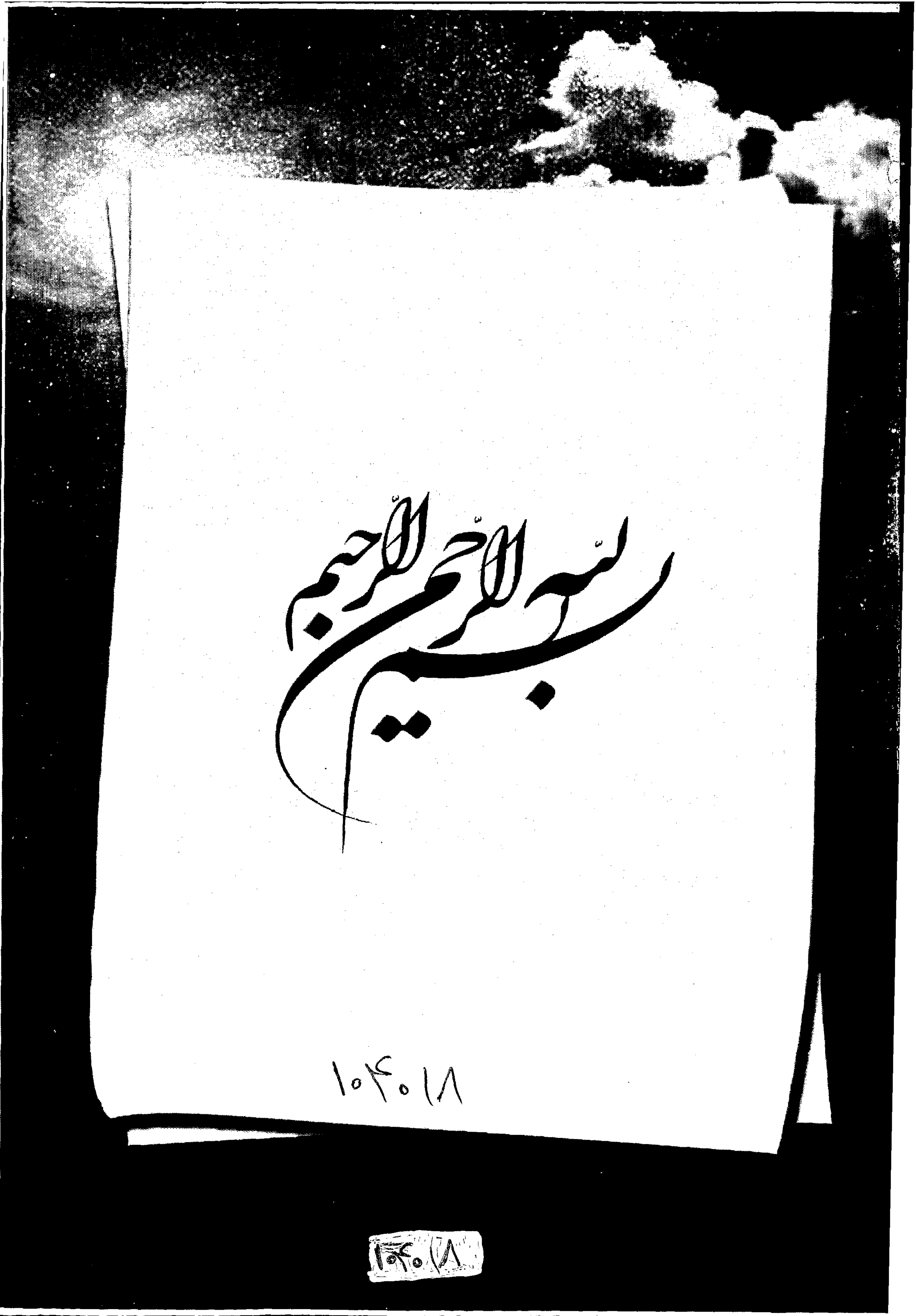
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور مرکز مشهد

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :

دوگان ماتلیس و مدولهای کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

استاد راهنما :

جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش

نگارش :

یاسر صداقت

بهمن ۱۳۸۵

پدر و مادر عزیزم

نیک می دانم افق توفیق را چگونه بر من تابانید و نیک می دانم طوفانهای سهمگین زندگی را چگونه برایم به نسیمی عطرآگین مبدل نمودید آری شما روشنی بخش مسیر زندگیم بودید تا به مقصد باور دارم تا به همیشه محتاج این نور ارزشمند خواهم بود. بوسه بر دستان مهربانتان کمترین تقدیر است.

در این رهگذر، همسر باگذشت و فداکارم نقش بسزا و همراهی خوشنوا بود او کسی است که شادیهایش همواره با موفقیت من اجین بود پس حق این است که او را نیز قدر بدانم و به همراه این یار باوفا از محبت های پدر بزرگوار او نیز سپاسگزار باشم.

صمیمانه ترین قدرشناسی ها نثارتان باد.

سپاس فراوان از:

استاد ارجمند، یاوری توانا و راهنمایی ارزشمند جناب آقای دکتر خشیارمنش

که علم و عملش بس راهگشایم بود، باشد تا به مدد یزدان افتخاری باشم بر نام جاویدانش

،همچنین اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر عباسی و جناب آقای دکتر جلیلیان

که نام این بزرگان، همواره بر تارک علمی که آموختم خواهد درخشید.

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم و تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ۱۳۸۵/۱۱/۲۶
شماره: ۲۲۰۸۵/۰۸۱۰
پیوست:

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: **دوگان ماتلیس و مدولهای کو همولوژی موضعی تعمیم یافته**

که توسط **یاسر صداقت** تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد.

تاریخ دفاع: **۸۵/۱۱/۱۹** نمره ۱۹,۲۵ نوزده و بیست و پنج صدم درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیئت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
آقای دکتر کاظم خشیار منش	استاد راهنما :	دانشیار	
آقای دکتر احمد عباسی	استاد ممتحن :	استادیار	
آقای دکتر علی جلیلیان عطار	نماینده گروه امور آموزشی :	استادیار	

۱۳۸۷/۲/۱۳

فهرست

به نام خدا

این پایان نامه در ۶ فصل تنظیم شده است . در فصل صفر با مفاهیم و تعاریفی از جبر پیشرفته و جبر جابجائی مانند ایده آل اول مینیمال ، حلقه های نوتری و آرتینی ، کتگوری ، مدولهای تصویری و انژکتیو ، فانکتورهای مشتق شده و تعاریف حد مستقیم ومعکوس آشنا می شویم .

سپس در فصل اول ، ایده آلهای اول وابسته و ارتباط آنرا با پوچساز و تکیه گاه یک مدول تعریف و قضایای مربوط به آنرا بررسی می کنیم .

در فصل دوم که شامل دو بخش می باشد ابتدا فانکتور تاب را تعریف نموده ، سپس فانکتور مشتق شدهٔ راست فانکتور تاب که همان فانکتور کوهمولوژی موضعی نامیده می شود را در بخش دوم و بخش اصلی این فصل معرفی و خواص آنرا بیان می کنیم . در انتهای این بخش تعاریف حد مستقیم و حد معکوس را بیان و ارتباط آنرا با مدولهای کوهمولوژی موضعی بررسی می کنیم .

فصل سوم نیز شامل دو بخش می باشد ، بخش اول شامل تعاریف مقدماتی برای بیان دوگان ماتلیس از قبیل تعاریف توسیع اساسی ، توسیع انژکتیو مینیمال ، پوش انژکتیوی و ... می باشد و در بخش دوم دوگان ماتلیس ، مدول بازتابی ، هم مولد انژکتیوی و قضایای مربوط به آنها توضیح و تفسیر داده شده است .

فصل چهارم ایده آل مبدلهاست . در این فصل با مفهوم ایده آل مبدل آشنا می شویم و ارتباط آنرا با فانکتور تاب و زوایای گوناگون این مفهوم جدید را بررسی می کنیم .

فصل پنجم که قسمت اصلی پایان نامه و بررسی مقالهٔ مطرح شده با مفهوم مدولهای کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته وایده آلهای اول هم وابسته می باشد ابتدا با تعریفی از مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته آغاز و سپس با تعریف ایده آل اول هم وابسته پیگیری و در نهایت با تعریفی از بعد کوهمولوژیکی پایان می پذیرد .

فصل صفر

پیش نیازها

این فصل شامل مباحثی از جبر جابجائی و جبر همولوژیک است که این مطالب به طور عمده از [۶] و [۸] و [۹] انتخاب شده اند . همچنین در این فصل R حلقه ای جابجائی و یکدار است .

۰-۱ : حلقه ها و مدولها

تعریف ۰-۱-۱ : مجموعهٔ ایده آلهای اول حلقهٔ R را با نماد $Spec(R)$ نشان می دهیم و آن را طیف R می نامیم .

تعریف ۰-۱-۲ : $\phi \neq S \subseteq R$ زیر حلقه است اگر و تنها اگر به ازای هر $r,s \in S$ داشته باشیم :

$$rs \in S \quad \text{و} \quad r-s \in S \quad \text{و} \quad 1_R \in S$$

برای دو حلقهٔ R,S نگاشت $f:R \to S$ همریختی حلقه ها نامیده می شود هرگاه به ازای هر $r,s \in R$ داشته باشیم :

$$f(r+s)=f(r)+f(s)$$
$$f(rs)=f(r)f(s)$$
$$f(1_R)=1_S$$

فرض کنید I,J دو ایده آل R باشند و $a \in R$ ، در اینصورت :

$$(I :_R J)=\{x \in R : xJ \subseteq I\}$$

همچنین $I \subseteq (I :_R J)$

بعلاوه تعریف می کنیم :

$$Ann_R(a)=(0 :_R a)=\{x \in R : xa=0\}$$
$$Ann_R(I)=(0 :_R I)=\{x \in R : xI=0\}$$

تعریف ۰-۱-۳ : فرض کنید R یک حلقه باشد و $S \subseteq R$ ، در اینصورت S را زیر مجموعهٔ بستهٔ ضربی گوئیم هرگاه : (الف) $1_R \in S$ (ب) برای هر $r,s \in S$ ، $r.s \in S$

تعریف ۰-۱-۴: مجموعهٔ تمام ایده آلهای اول R را که شامل I باشند را با نماد $V(I)$ نشان می دهیم.

تعریف ۰-۱-۵ : فرض کنیم I یک ایده آل و $P \in Spec(R)$ و $I \subseteq P$ ، P را ایده آل اول مینیمال I گوئیم هرگاه وجود نداشته باشد $Q \in Spec(R)$ به قسمی که $I \subset Q \subset P$.

لم ۰-۱-۶ (پنج کوتاه) : فرض کنید R حلقه بوده و

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \to & 0 \end{array}$$

یک نمودار جابجائی از R- مدولها و R- همریختی ها باشد به قسمی که هر سطر آن یک رشتهٔ دقیق کوتاه است ، در این صورت :

(الف) اگر α,γ تکریختی باشند آنگاه β تکریختی است .

(ب) اگر α,γ بروریختی باشند β بروریختی است .

(ج) اگر α,γ یکریختی باشند β یکریختی است .

قضیه ۰-۱-۷ : فرض کنید N یک زیر مدول از R- مدول M باشد ، در این صورت تناظری یک به یک بین زیر مدولهای M که شامل N هستند و زیر مدولهای $\frac{M}{N}$ وجود دارد . بنابراین اگر L زیر مدولی از M شامل N باشد آنگاه متناظر با $\frac{L}{N}$ است .

۰-۲ : شرایط زنجیری

تعریف ۰-۲-۱ : R – مدول M نوتری (آرتینی) نامیده می شود هرگاه هر زنجیر افزایشی (کاهشی) از زیر مدولهای M سرانجام توقف کند .

قضیه ۰-۲-۲ : R – مدول M نوتری است اگر و تنها اگر هر زیر مدول آن با تولید متناهی باشد .

قضیه ۰-۲-۳ : حلقهٔ R را نوتری (آرتینی) گوئیم هرگاه R به عنوان R – مدول نوتری (آرتینی) باشد .

قضیه ۰-۲-۴ : اگر R نوتری باشد آنگاه هر R – مدول با تولید متناهی یک R – مدول نوتری است .

قضیه ۰-۲-۵ : فرض کنید $0 \to K \to M \to N \to 0$ یک رشتهٔ دقیق از R – مدولها باشد ، در اینصورت M نوتری (آرتینی) است اگر وتنها اگر K و N نوتری (آرتینی) باشند .

تعریف ۰-۲-۶ : فرض کنید M یک R – مدول غیر صفر باشد ، در این صورت M را ساده گوئیم هرگاه M هیچ زیرمدولی غیر از خودش و صفر نداشته باشد .

تعریف ۰-۲-۷ : یک زنجیر از زیرمدولهای M بصورت :

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$$

را یک زنجیر اشباع از M گوئیم هرگاه برای هر i ، R – مدول $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ ساده باشد . n را طول این زنجیر اشباع گوئیم و آنرا با نماد $L(M)$ نشان میدهیم .

قضیه ۰-۲-۸ : R – مدول M دارای طول متناهی است اگر و تنها اگر M آرتینی نوتری باشد .

لم ۰-۲-۷ (آرتین – ریس) : فرض کنید R حلقه ای نوتری ، M یک R – مدول با تولید متناهی ، N زیر مدول M و I یک ایده آل باشد ، در اینصورت عدد صحیح مثبت c وجود دارد به قسمی که به ازای هر $n \rangle c$ داریم :

$$I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N)$$

۰-۳ : حلقه و مدول کسرها

تعریف ۰-۳-۱ : فرض کنید $S \subseteq R$ یک زیر مجموعهٔ بستهٔ ضربی باشد ، در اینصورت در $R \times S$ رابطهٔ $\sim$ را به شرح زیر تعریف می کنیم : برای هر $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$ داریم :

$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $t \in S$ به قسمی که $t(s_2 r_1 - s_1 r_2) = 0$.

به سادگی می توان نشان داد که این رابطه یک رابطهٔ هم ارزی است . در اینصورت کلاس هم ارزی (a, s) که $a \in R$ و $s \in S$ را با نماد $\frac{a}{s}$ نشان می دهیم و مجموعهٔ $S^{-1}R$ را به صورت $S^{-1}R = \{\frac{a}{s} : a \in R, s \in S\}$ در نظر می گیریم .

در $S^{-1}R$ ، برای هر $a, b \in R$ و هر $s, t \in S$ داریم :

$\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $u \in S$ به قسمی که $u(ta - sb) = 0$ ، حال در $S^{-1}R$ دو عمل جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می کنیم :

برای هر $r_1, r_2 \in R$ و هر $s_1, s_2 \in S$ ،

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$$

$$\frac{r_1}{s_1} . \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

به سهولت می توان بررسی کرد که $S^{-1}R$ با اعمال جمع و ضرب بالا یک حلقهٔ جابجائی و یکدار است که در آن برای هر $s \in S$:

$$0_{S^{-1}R} = \frac{0}{s}$$

$$1_{S^{-1}R} = \frac{1}{1}$$

حال $S^{-1}R$ را حلقهٔ کسرهای R نسبت به مجموعهٔ ضربی S گوئیم .

قضیه ۰–۳–۲ : فرض کنید M,N دو R– مدول باشند و S یک زیر مجموعهٔ بستهٔ ضـربی باشـد ، در اینصورت داریم :

(الف) $$S^{-1}(M \cap N) = S^{-1}M \cap S^{-1}N$$

(ب) به عنوان $S^{-1}R$– مدول داریم : $$S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$$

۰-۴ : فانکتور (تابعگون)

تعریف ۰-۴-۱ : گردایهٔ C را کتگوری یا رسته گوئیم هرگاه

(الف) شامل کلاسی از اشیا باشد که با $Obj\mathrm{C}$ نشان می دهیم .

(ب) برای هر جفت $A,B \in Obj\mathrm{C}$ ، C شامل مجموعه مورفیسمهای از A به B که با نماد $Hom_{\mathrm{C}}(A,B)$ نشان می دهیم باشد با این ویژگی که برای هر زوج $(A,B) \neq (A',B')$ داشته باشیم :

$$Hom(A,B) \cap Hom(A',B') = \phi$$

اگر $F \in Hom(A,B)$ آنگاه می نویسیم $F : A \to B$ و می خوانیم F مورفیسمی از A به B است .

(ج) برای هر $A,B,C \in Obj\mathrm{C}$ ترکیب

$$Hom(B,C) \times Hom(A,B) \to Hom(A,C)$$

با ضابطهٔ $(g,f) \mapsto gof$ در دو شرط زیر صدق می کند :

(۱) برای هر $A \in Obj\mathrm{C}$ ، مورفیسم همانی $id_A \in Hom(A,A)$ وجود دارد به قسمی که برای هر $B \in Obj\mathrm{C}$ و $f \in Hom(A,B)$ ،

$$foid_A = id_B of = f$$

(۲) برای هر $f \in Hom(A,B)$ و $g \in Hom(B,C)$ و $h \in Hom(C,D)$

$$ho(gof) = (hog)of$$

تعریف ۰-۴-۲ : فرض کنید C,D دو کتگوری باشند . فانکتور همورد $F : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ یک تابع است که در شرایط زیر صدق می کند :

(۱) اگر $A \in Obj\mathrm{C}$ آنگاه $F(A) \in Obj\mathrm{D}$.

(۲) اگر $f:A\to B$ یک مورفیسم C باشد آنگاه $F(f):F(A)\to F(B)$ یک مورفیسم در D است.

(۲) اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ مورفیسمهائی در C باشند آنگاه

$F(gof)=F(g)oF(f)$.

(۳) برای هر $A\in Obj\mathrm{C}$ ، $F(1_A)=1_{F(A)}$.

تعریف ۰-۴-۳ : فرض کنید $\mathrm{C,D}$ دو کتگوری باشند ، یک فانکتور پادورد $F:\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ دو تابع است (که هر دوی آنها را با نماد F نمایش می دهیم) و در شرایط زیر صدق می کند :

(الف) اگر $A\in obj\mathrm{C}$ آنگاه $F(A)\in obj\mathrm{D}$

(ب) اگر $f:A\to B$ ریختی از C باشد آنگاه $F(f):F(B)\to F(A)$ ریختی در D است.

(ج) اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ ریختهایی در C باشند آنگاه $F(gof)=F(f)oF(g)$

(د) برای هر $A\in obj\mathrm{C}$ ، $F(1_A)=1_{F(A)}$

تعریف ۰-۴-۴ : فرض کنید $\mathrm{C,D}$ دو کتگوری جمعی باشد و $F:\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ یک فانکتور باشد در اینصورت F را جمعی گوئیم اگر برای هر $A,B\in obj\mathrm{C}$ و هر $f,g\in Hom_R(A,B)$:

$$F(f+g)=F(f)+F(g)$$

و هرگاه $\mathrm{C,D}$ کتگوریهای R – خطی باشند در اینصورت F را R – خطی گوئیم برای هر $r\in R$ و هر $f\in Hom_R(A,B)$

$$F(rf)=rF(f)$$

تعریف ۰-۴-۵ : فرض کنید $\mathrm{C,D}$ کتگوری R – مدولها و $F:\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ فانکتوری هموردِ باشد در اینصورت F را دقیق چپ گوئیم اگر برای هر رشتهٔ دقیق کوتاه $0\to A\to B\to C\to 0$ در C رشتهٔ $0\to F(A)\to F(B)\to F(C)$ در D دقیق باشد و F را دقیق راست گوئیم اگر $F(A)\to F(B)\to F(C)\to 0$ در D دقیق باشد.

اگر F پادورد باشد ، F را دقیق چپ گوئیم اگر $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ در D دقیق باشد و F را دقیق راست گوئیم اگر $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ در D دقیق باشد و F را دقیق گوئیم هرگاه دقیق چپ و راست باشد .

تعریف ۰-۴-۶ : فرض کنید C, D دو کتگوری و $S : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ و $T : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ دو فانکتور همورد باشند ، اگر برای هر $C \in obj\mathrm{C}$ ریخت $\alpha_C : S(C) \to T(C)$ که متعلق به ریختهای D است موجود باشد به قسمی که برای هر $f : C \to C'$ در C دیاگرام زیر در D جابجائی باشد

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{\alpha_c} & T(C) \\ S(f)\downarrow & & \downarrow T(f) \\ S(C') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & T(C') \end{array}$$

در اینصورت α را یک تبدیل طبیعی می نامیم .

اگر برای هر $C \in obj\mathrm{C}$ ، α_C یکریختی باشد آنگاه α یک هم ارزی طبیعی از دو فانکتور همورد S,T است . در حالتی که S,T پادورد باشند آنگاه

$$\begin{array}{l} \beta : S \to T \\ C \mapsto \beta_C : S(C) \to T(C) \end{array}$$

یک تبدیل طبیعی است اگر برای هر $f : C \to C'$ دیاگرام زیر در D جابجائی باشد .

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{\beta_c} & T(C) \\ S(f)\uparrow & & \uparrow T(f) \\ S(C') & \xrightarrow{\beta_{c'}} & T(C') \end{array}$$

و اگر برای $C \in obj\mathrm{C}$ ، β_C یکریختی باشد آنگاه β یک هم ارزی طبیعی بین دو فانکتور پادورد S,T می باشد .

تعریف ۰-۴-۷ : فرض کنید M,N دو R– مدول باشند ، در اینصورت :

$$Hom_R(M,N) = \{ f : M \to N \mid \text{همریختی بین مدولهاست } -R \text{ ، } f \}$$

همچنین $Hom_R(M,N)$ دارای ساختار R- مدولی است .

قضیه ۰-۴-۸ : فانکتور دو متغیره $Hom_R(-,-) : C(R)\times C(R) \to C(R)$ یک فانکتور همورد روی مؤلفهٔ دوم و پادورد روی مؤلفهٔ اول است ، همچنین جمعی و R- خطی و دقیق چپ است .بعلاوه فانکتور $-\otimes- : C(R)\times C(R) \to C(R)$ فانکتوری همورد روی هر دو مؤلفه ، جمعی و R- خطی و دقیق راست است .

۰-۵ : مدولهای تصویری و انژکتیو

تعریف ۰-۵-۱ : مدول P را تصویری گوئیم اگر برای هر R- مدول B و هر رشته دقیق $A \to B \to 0$ ، بتوان هر $f : P \to B$ را به نگاشت $h : P \to A$ توسعه داد به قسمی که دیاگرام مقابل جابجائی شود .

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

تعریف ۰-۵-۲ : مدول E را انژکتیو گوئیم اگر برای هر R- مدول B و هر زیر مدول A از B ، بتوان هر $f : A \to B$ را به نگاشت $g : B \to E$ توسعه داد به قسمی که دیاگرام زیر جابجائی شود :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

قضیه ۰-۵-۳ : R- مدول P تصویری است اگر و تنها اگر فانکتور هموورد $Hom_R(P,-)$ دقیق باشد .

قضیه ۰-۵-۴ : R- مدول E انژکتیو است اگر و تنها اگر فانکتور پادورد $Hom_R(-,E)$ دقیق باشد .

قضیه ۰-۵-۵ : هر R- مدول نگارهٔ همریختی ای از مدول تصویری P می باشد .

قضیه ۰-۵-۶ : هر R- مدول را می توان در یک R- مدول انژکتیو نشاند .

قضیه ۰-۵-۷ : فرض کنید P ، R- مدول باشد ، در اینصورت احکام زیر معادلند :

(الف) P تصویری است .

(ب) هر رشتهٔ دقیق کوتاه به صورت

$$0 \to A \to B \to P \to 0$$

شکافته شده است .

(ج) مدول آزاد F و R- مدول دلخواه K وجود دارند به قسمی که F جمع مستقیم P, K باشد