بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

دانشگاه تربیت معلّم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

رساله دکتری ریاضی

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

پیوستگی خودکار n- همریختی ها ومدول همریختی ها روی جبرهای باناخ وجبرهای توپولوژیک

تدوین

حمید شایان پور

استاد راهنما

دکتر طاهر قاسمی هنری

تیر ۱۳۸۹

بسمه تعالی

تاریخ:..................
شماره:..................
پیوست:..................
واحد:..................

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی
و
کامپیوتر

صورت‌جلسهٔ دفاع از رسالهٔ دکتری ریاضی محض

به شکرانهٔ الهی جلسهٔ دفاعیهٔ رسالهٔ دکتری (Ph.D.) آقای حمید شایان‌پور دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی محض دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم تهران در تاریخ ۸۹/۴/۲ با حضور هیأت داوران به شرح ذیل تشکیل گردید:

۱ـ آقای دکتر طاهر قاسمی‌هنری (استاد راهنما)

۳ـ آقای دکتر اسماعیل انصاری (دانشگاه گیلان ـ داور خارجی)

۴ـ خانم دکتر فرشته سعدی (دانشگاه تربیت مدرس ـ داور خارجی)

۵ـ خانم دکتر حکیمه ماهیار (داور داخلی)

آقای حمید شایان‌پور نتایج اصلی رسالهٔ خود را با عنوان

Automatic Continuity of n-Homomorphisms and Module Homomorphisms on Banach Algebras and Topological Algebras

طی سمیناری ارائه و به سؤالات هیأت داوران پاسخ دادند. هیأت داوران با توجه به محتویات رساله و این که مقالات زیر از رسالهٔ ایشان استخراج شده است، صلاحیت نامبرده را برای احراز درجهٔ دکتری ریاضی محض گرایش (آنالیز) در سطح عالی مورد تائید قرار دادند.

- T. G. Honary and H. Shayanpour, Automatic continuity of n-homomorphisms between Banach algebras, Quaestiones Mathematicae, 33(2010).
- T. G. Honary and H. Shayanpour, Automatic continuity of n-homomorphisms between topological algebras, Bulletin of the Australian Mathematical Society, submitted.
- T. G. Honary, M. Najafi Tavani and H. Shayanpour, Automatic continuity of n-homomorphisms on Frechet algebras, Quaestiones Mathematicae, to appear.
- T. G. Honary and H. shayanpour, Automatic continuity of module homomorphisms from Frechet algebras, preprint.

دکتر طاهر قاسمی‌هنری

دکتر اسماعیل انصاری

دکتر فرشته سعدی

دکتر حکیمه ماهیار

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

:. خیابان طالقانی ، بعد از
. راه بهار ، شماره ۵۹۹ ،
ستی : ۱۵۶۱۸
۷۷۵۰۷۷۷۲:
ن : ۷۷۶۰۲۹۸۸
؛ خیابان شهید بهشتی ، میدان
گاه ، دانشگاه تربیت معلم ،
پستی : ۳۱۹۷۹ ـ ۳۷۵۵۱ ،
۰۲۶۱ ـ ۴۵۷۹۶۰۰ ،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،
به پاس قلب های بزرگشان، که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،
و به پاس ایثار و محبت های بی دریغشان، که هرگز فروکش نمی کند،
این مجموعه را به پدر و مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم.

قدردانی

اولین چکه ناودان بلندیک احساس را، در قالب کلامی از جنس تنفس با غنچه های معصوم یاس، به روی حجم سپید یک برگه می ریزم و آن را به لحجه های همه ی پروانه صفتهای این گیتی بی انتها به آستان نیلوفری دلهای زلال هدیه می کنم:

ای یزدان پاک تو را سپاس می گویم،

که به حکمت بی انتهایت مرا یاری کردی،

و به رحمت نعمتهایت را بر من تمام کردی،

خانواده ای خوب به من عطا کردی که در هر حال پشتیبانی ام کنند و استادانی سر راهم نهادی تا دانش و علمشان را بی ریا در اختیارم بگذارند.

بر خود لازم می دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این رساله مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم. مراتب قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر طاهر قاسمی هنری ابراز می نمایم. همچنین از استادان گرانقدر، دکتر اسماعیل انصاری، دکتر فرشته سعدی و دکتر حکیمه ماهیار، که داوری این رساله را بر عهده داشتند، قدردانی می نمایم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان

حمید شایان پور

تیر ۱۳۸۹

اظهار نامه

در این رساله کلیهٔ مطالب بدون مرجع در فصل‌های دوم، سوم و چهارم اصیل (Original) هستند.
ضمناً مقاله‌های

T. G. Honary and H. Shayanpour, Automatic continuity of n-homomorphisms between Banach algebras, Quaestiones Mathematicae, 33(2)(2010), 189-196.

و

T. G. Honary and H. Shayanpour, Automatic continuity of n-homomorphisms between topological algebras, Bulletin of the Australian Mathematical Society, submitted.

از فصل دوم و مقاله

T. G. Honary, M. Najafi Tavani and H. Shayanpour, Automatic continuity of n-homomorphisms on Fréchet algebras, Quaestiones Mathematicae, to appear.

از فصل سوم و مقاله

T. G. Honary and H. Shayanpour, Automatic continuity of module homomorphisms from Fréchet algebras, preprint.

از فصل چهارم استخراج شده‌اند.

چکیده

برای عدد طبیعی $n \leq 2$ یک نگاشت n-ضربی بین جبرهای باناخ A و B ، نگاشتی مانند $\theta : A \to B$ است که به ازای هر $a_1, a_2, ..., a_n \in A$، $\theta(a_1 a_2 \cdots a_n) = \theta(a_1)\theta(a_2)\cdots\theta(a_n)$. هرگاه θ یک نگاشت خطی و n-ضربی باشد آن را یک n-همریختی گوییم. مفهوم n-همریختی تعمیمی از مفهوم همریختی است. در این رساله نتایجی در زمینهٔ پیوستگی خودکار n-همریختی‌ها بین برخی جبرهای توپولوژیک، به خصوص جبرهای باناخ، به دست می‌آوریم که از آن جمله می‌توان به تعمیم قضیه جانسون برای n-همریختی‌های پوشا و قضیه ریکارت برای n-همریختی‌های با برد چگال اشاره کرد. همچنین قضیه‌هایی را که پارک و تروت در سال ۲۰۰۹ برای پیوستگی خودکار n-همریختی‌های $*$-پایا روی C^*-جبرها ثابت کرده‌اند، تعمیم داده و آنها را برای هر n-همریختی $*$-پایا روی lmc $*$-جبرها ثابت می‌کنیم.

در ادامه نشان می‌دهیم هرگاه $(A, \{p_r\})$ یک جبر فرشهٔ منظم جابه‌جایی باشد آنگاه برای هر $m \in \mathbb{N}$ که $\pi_m^{-1}(\mathrm{Rad} A_m) \subseteq \ker p_m$، فضای $A/\ker p_m$ یک Q- جبر فرشه است، که A_m تکمیل شدهٔ $A/\ker p_m$ تحت نرم p'_m است، که به ازای هر $x \in A$ با ضابطهٔ $p'_m(x + \ker p_m) = p_m(x)$ تعریف می‌شود و در آن $\pi_m : A \to A/\ker p_m \subseteq A_m$ نگاشت خارج قسمتی است. همچنین نشان می‌دهیم، هرگاه $(A, \{p_r\})$ یک جبر فرشهٔ منظم جابه‌جایی باشد به طوری که از مرتبه‌ای به بعد در شرط $\pi_m^{-1}(\mathrm{Rad} A_m) \subseteq \ker p_m$ صدق کند و $(B, \{q_r\})$ یک جبر فرشهٔ نیم ساده جابه‌جایی باشد، آنگاه هر n-همریختی $\theta : A \to B$ که از مرتبه‌ای به بعد در شرط $\theta(\ker p_m) \subseteq \ker q_m$ صدق کند، پیوسته است.

در پایان وقتی A یک جبر فرشه باشد، پیوستگی خودکار A-مدول همریختی‌ها از یک A- مدول فرشه به توی یک A- مدول باناخ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که هر جبر فرشه یکدار با دو نیم سازی مکرر یکه، پیوستهٔ تابعکی است.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 46H05، 46H40، 46K05، 46J05.

واژه‌های کلیدی: *پیوستگی خودکار، n- همریختی ،جبر توپولوژیک، lmc-جبر، Q-جبر، جبر فرشه، جبر فرشه منظم، نیم ساده، قوی نیم ساده، جبر تجزیه پذیر، مدول همریختی، n- برگشت، lmc $*$- جبر، A- مدول فرشه، دونیم سازی مکرر یکه، n- همریختی $*$- پایا.*

مقدمه

این رساله شامل چهار فصل است که در فصل اول برخی از تعریف‌ها و قضیه‌های مربوط به جبرهای توپولوژیک، به خصوص، جبرهای فرشه و باناخ را، که برای بیان مطالب فصل‌های بعدی مورد نیاز است، می‌آوریم و در ادامه مفهوم n-همریختی و ارتباط آن با مفهوم همریختی را بیان می‌کنیم. سپس مفهوم طیف و شعاع طیفی و جبرهای ساده، نیم ساده و قوی نیم ساده و بعضی از قضیه‌های مقدماتی، که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است، بیان می‌کنیم. در انتها مفهوم حد تصویری و دونیم سازی مکرر یکه و قضیه‌های مربوط به آنها را می‌آوریم و با توضیحاتی در مورد قضیه‌های اثبات شده در مباحث پیوستگی خودکار همریختی‌ها، فصل اول را به پایان می‌رسانیم.

نگاشت $\theta : A \to B$ بین جبرهای A و B را n-ضربی گوییم اگر به ازای هر $a_1, a_2, ..., a_n \in A$، $\theta(a_1a_2\cdots a_n) = \theta(a_1)\theta(a_2)\cdots\theta(a_n)$. هرگاه θ، n-ضربی و خطی باشد گوییم θ، n-همریختی است. در فصل دوم، پیوستگی خودکار n-همریختی‌ها بین جبرهای توپولوژیک را مورد بررسی قرار خواهیم داد. مفهوم n-همریختی برای جبرهای مختلط توسط حجازیان، میرزاوزیری و مصلحیان در [10] مورد مطالعه قرار گرفته است.

در سال ۱۹۶۷ جانسون [1] ثابت کرد که اگر A و B جبرهای باناخ باشند، به طوری که B نیم ساده باشد، آنگاه هر همریختی پوشا از A به B به طور خودکار پیوسته است [16].

این فصل مشتمل بر سه بخش است که در بخش اول با ذکر چند لم شرایط را برای اثبات قضیه جانسون در مورد n-همریختی فراهم کرده و نشان می‌دهیم هرگاه A و B دو جبر فرشه باشند به طوری که A، Q-جبر و B تجزیه‌پذیر و نیم ساده باشند، در این صورت هر n-همریختی پوشای $\theta : A \to B$ به طور خودکار پیوسته است. در انتهای این بخش چند نتیجه از این قضیه را می‌آوریم و آنها را در حالت خاص که جبرها، جبرهای باناخ باشند، ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم که حکم قضیه برای نگاشت‌های پاد n-همریختی نیز درست است. سرانجام نشان می‌دهیم که هر n-برگشت روی بعضی از جبرهای توپولوژیک پیوسته است.

1. B. E. Johnson

در سال ۱۹۵۰ ریکارت [1] ثابت کرد که اگر A و B جبرهای باناخ باشند، به طوری که B قوی نیم ساده باشد، آنگاه هر همریختی با برد چگال از A به B به طور خودکار پیوسته است [21, 6.18].

در بخش دوم نشان می‌دهیم قضیه ریکارت برای هر n-همریختی روی بعضی از جبرهای توپولوژیک برقرار است و ثابت می‌کنیم اگر A و B، Q-جبرهای فرشه باشند به طوری که B یکدار و قوی نیم ساده و $\theta : A \to B$ یک n-همریختی با برد چگال باشد و ضمناً $\theta(A)$ تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه θ به طور خودکار پیوسته است.

در بخش سوم، قضیه‌های ۲.۳ و ۳.۲ از مرجع [15] را، که برای C^*-جبرها اثبات شده‌اند، تعمیم داده و نشان می‌دهیم اگر A یک Q lmc $*$-جبر توپولوژیک باشد که توپولوژی آن توسط یک خانواده از نیم نرم‌ها مانند $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}$ تولید شده، همچنین B یک lmc C^*-جبر باشد که توپولوژی آن توسط یک خانواده از نیم نرم‌ها مانند $\mathcal{Q} = \{q_\alpha\}$ تولید شده و $\theta : A \to B$ یک n-همریختی $\star$-پایا باشد، آنگاه برای هر q_β ، p_αای وجود دارد به طوری که برای هر x در A، $q_\beta(\theta(x)) \leq p_\alpha(x)$. در این صورت θ روی A پیوسته است.

فصل سوم مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول نشان می‌دهیم که هرگاه $(A, \{p_r\})$ یک جبر فرشهٔ منظم جابه‌جایی باشد، به طوری که $\pi_m^{-1}(\mathrm{Rad} A_m) \subseteq \ker p_m$ آنگاه $A/\ker p_m$ یک Q-جبر فرشه است، که A_m تکمیل شدهٔ $A/\ker p_m$ تحت نرم p'_m است، که به ازای هر $x \in A$ با ضابطهٔ $p'_m(x + \ker p_m) = p_m(x)$ تعریف می‌شود و در آن $\pi_m : A \to A/\ker p_m \subseteq A_m$ نگاشت خارج قسمتی است.

در بخش دوم نشان خواهیم داد که هرگاه $(A, \{p_r\})$ یک جبر فرشهٔ منظم جابه‌جایی باشد به طوری که از مرتبه‌ای به بعد در شرط $\pi_r^{-1}(\mathrm{Rad} A_r) \subseteq \ker p_r$ صدق کند و $(B, \{q_r\})$ یک جبر فرشهٔ نیم سادهٔ جابه‌جایی باشد، آنگاه هر n-همریختی $T : A \to B$، که از مرتبه‌ای به بعد در شرط $T(\ker p_r) \subseteq \ker q_r$ صدق کند، پیوسته است.

در فصل چهارم پیوستگی خودکار مدول همریختی‌ها بین جبرهای فرشه را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در سال ۱۹۵۲ مایکل [2] این سؤال را مطرح کرد که آیا هر تابعک خطی ضربی روی یک جبر فرشهٔ جابه‌جایی، به طور خودکار پیوسته است [14]. این سؤال به مسئلهٔ مایکل مشهور شده است.

در سال ۲۰۰۱ لیونی [3] در مقاله‌ای [4] در بولتن بلژیک ثابت کرد که به مسئلهٔ مایکل پاسخ مثبت داده است. اما بعد از گذشت چند ماهی، اشکالی در برهان لیونی کشف شد و در نتیجه مسئلهٔ مایکل کماکان

---

1. C.E. Ricart, 2. E.A. Michael, 3. M. Laayouni, 4. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 8(2001), No. 1, 105-108.

مسئله‌ای باز است.

در سال ۱۹۷۴ سینکلَیر [1] پیوستگی مدول همریختی‌ها روی جبرهای باناخ را مورد مطالعه قرار داد و نتایج جالبی به دست آورد، که در [22] آمده است. ما به پیروی از کار ایشان پیوستگی مدول همریختی‌ها روی جبرهای فرشه را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

فصل چهارم مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول برای جبر فرشهٔ A، چند نامساوی برای A-مدول همریختی‌ها از یک فرشه A-مدول به توی یک باناخ A- مدول ثابت می‌کنیم.

در بخش دوم نشان خواهیم داد که اگر $(A, \{p_n\})$ یک جبر فرشه یکدار با دونیم سازی مکرر یکه $(\{r_n\}, \{s_n\})$ و $(X, \{q_n\})$ یک فرشه A-مدول باشد به طوری که برای یک زیر دنباله مانند $\{k_n\} \in \mathbb{N}$، $s_nX \nsubseteq \ker q_{k_n}$ و Y یک باناخ A-مدول باشد، آنگاه هر A-مدول همریختی از X به Y به طور خودکار پیوسته است. همچنین برای هر زیر مجموعه کراندار E از X و هر $m \in \mathbb{N}$، ثابت $M > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in E$ و هر $n \in \mathbb{N}$، $\|s_n\theta(x)\| \leq Mp_{k_n}(s_n)^2$.

در انتهای فصل چهارم نتیجه می‌گیریم که اگر $(A, \{p_n\})$ یک جبر فرشه یکدار با دونیم سازی مکرر یکه $(\{r_n\}, \{s_n\})$ باشد، آنگاه هر همریختی از A به توی یک جبر باناخ به طور خودکار پیوسته است و از آن نتیجه می‌گیریم که هر جبر فرشهٔ یکدار با دونیم سازی مکرر یکه، پیوستهٔ تابعکی است. لذا توانسته‌ایم در حالت‌های خاصی به مسئلهٔ مایکل پاسخ مثبت دهیم.

1. A. M. Sinclair

فهرست مطالب

فصل ۱

تعریف‌ها، نمادها و مقدمات

در این فصل تعریف‌ها و قضیه‌های مورد نیاز برای مطالب اصلی آورده شده است. منابع اصلی در این فصل مراجع [1]، [3]، [7]، [9] و [13] هستند.

۱.۱ جبرهای توپولوژیک، جبرهای فرشه و جبرهای باناخ

تعریف ۱.۱.۱. مجموعهٔ V را یک فضای برداری (خطی) [1] روی میدان F نامیم، هرگاه عمل جمع $+$ در V و عمل دیگری به نام ضرب اسکالر اعضای F در اعضای V طوری تعریف شوند که دارای خواص زیر باشند:

(الف) **خاصیت جمع:** $(V,+)$ یک گروه آبلی باشد.

(ب) **خواص ضرب اسکالر:**

(۱) به ازای هر $x \in V$ ، $1x = x$ $\quad (1 \in F)$

(۲) به ازای هر $\alpha, \beta \in F$ و هر $x \in V$ ، $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(۳) به ازای هر $\alpha, \beta \in F$ و هر $x, y \in V$ ،

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$

توجه شود که منظور از اسکالر، اعضای میدان F است. اگر V فضای برداری روی میدان F باشد و $F = \mathbb{R}$ یا $F = \mathbb{C}$، آنگاه V را به ترتیب فضای برداری حقیقی یا مختلط [2] می‌نامند.

1. Linear space, 2. Real and complex vector space

تعریف ۲.۱.۱. فضای برداری توپولوژیک [1] (TVS) عبارت است از یک زوج (A, τ) متشکل از فضای برداری A روی میدان F و توپولوژی τ روی A ، به گونه ای که در اصول موضوعه زیر صدق کند:

(الف) هر نقطه از A یک مجموعهٔ بسته باشد.

(ب) اعمال جبر (شامل جمع و ضرب اسکالر) تحت توپولوژی τ پیوسته باشند.

تعریف ۳.۱.۱. یک جبر [2] روی میدان F عبارت است از یک فضای برداری مانند A روی میدان F ، به انضمام نگاشتی از $A \times A$ به A با ضابطهٔ $(a, b) \mapsto ab$ که به ازای هر a, b, c در A و هر α در F در اصول موضوعهٔ زیر صدق کند:

(الف) $a(bc) = (ab)c$

(ب) $a(b+c) = ab + ac\ ,\ (a+b)c = ac + bc$

(ج) $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$

اگر به ازای هر $a, b \in A$، $ab = ba$، A را یک جبر جابه‌جایی گوییم. اگر A شامل عنصری مانند $e_A \neq 0$ باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$، $a = e_A a = a e_A$، آنگاه گوییم A یک جبر یکدار [3] است.

اگر جبر A یکدار نباشد، آنگاه می‌توان A را به یک جبر یکدار توسیع داد. برای این منظور فرض کنیم $A^+ = A \times \mathbb{C}$. اعمال زیر را برای هر $a, b \in A$ و $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم:

(الف) جمع: $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$

(ب) ضرب اسکالر: $\lambda(a, \alpha) = (\lambda a, \lambda\alpha)$

(ج) ضرب: $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$

به آسانی می‌توان نشان داد که A^+ با اعمال فوق یک جبر یکدار با یکهٔ (۱ ,0) است و همچنین جبر A یک ایده آل ماکسیمال در A^+ است. جبر A^+ را جبر یکدار شده A می‌نامند.

مجموعه‌ی $A^\#$ را A تعریف می‌کنیم اگر A یکدار باشد و $A^\#$ را A^+ تعریف می‌کنیم اگر A یکدار نباشد. اگر جبر A یکه داشته باشد آنگاه عنصر همانی $(0, 1)$ از جبر A^+ متفاوت با عنصر همانی e_A از جبر A است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر مختلط باشد. یک n-برگشت [4] روی A عبارت است از

1. Topological vector space, 2. Algebra, 3. Unital algebra, 4. n-Involution

نگاشت $* : A \to A$ با ضابطه $x \to x^*$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) $(x+y)^* = x^* + y^*$ $\quad (x, y \in A)$

(ب) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$ $\quad (\lambda \in \mathbb{C}, x \in A)$

(ج) $(x_1 x_2 \cdots x_n)^* = x_n^* x_{n-1}^* \cdots x_1^*$ $\quad (x_1, x_2, ..., x_n \in A)$

(د) $\underbrace{(((x^*)^*)^* \cdots)^*}_{n} = x^{n*} = x$ $\quad (x \in A)$

عنصر x^* را الحاقی x می‌گوییم. عنصر x خودالحاقی یا هرمیتی است اگر $x = x^*$. به هر 2-برگشت، یک برگشت گوییم.

تعریف ۱.۱.۵. یک n $*$-جبر [1] عبارت است از یک جبر مختلط که در آن یک n-برگشت هم وجود دارد. و به هر 2 $*$-جبر، یک $*$-جبر گوییم.

مثال ۱.۱.۶. فرض کنیم X فضای توپولوژیک باشد. جبر $C(X)$ متشکل از همهٔ توابع پیوسته روی X، با برگشت مزدوج توابع ، تبدیل به یک $*$-جبر می‌شود. جبرهای $C^\infty[0,1]$ و $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ نیز $*$-جبر هستند.

تعریف ۱.۱.۷. فضای توپولوژیک X را نیم فشرده [2] گوییم، هرگاه یک دنباله از زیرمجموعه‌های فشرده مانند $\{K_n\}$ در X وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $K_n \subseteq K_{n+1}$ و همچنین به ازای هر مجموعهٔ فشردهٔ K از X یک K_n وجود داشته باشد به طوری که $K \subseteq K_n$. دنبالهٔ $\{K_n\}$ را افنای پذیرفتنی [3] می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۸. جبر توپولوژیک [4] عبارت است از یک زوج (A, τ) متشکل از جبر A روی میدان F و توپولوژی τ روی A ، به گونه ای که در اصول موضوعه زیر صدق کند:

(الف) هر نقطه از A یک مجموعهٔ بسته باشد.

(ب) اعمال جبر (شامل جمع، ضرب اسکالر و ضرب) تحت توپولوژی τ پیوسته باشند.

یک جبر توپولوژی پذیر است اگر بتوان آن را با یک توپولوژی تبدیل به یک جبر توپولوژیک کرد. جبر توپولوژیک A کامل است اگر هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد.

1. n $*$-algebra, 2. Hemicompact, 3. Admissible exhaustion, 4. Topological algebra

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر باشد و $a, b \in A$. شبه ضرب [1] دو عنصر a و b را با نماد $a \diamond b$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a \diamond b = a + b - ab$$

عنصر a از A شبه وارون پذیر چپ(راست) [2] است هرگاه عنصر $b \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $b \diamond a = 0$ $(a \diamond b = 0)$. عنصر $a \in A$ را شبه وارون پذیر [3] گویند هرگاه شبه وارون پذیر چپ و راست باشد. عمل شبه ضرب یک عمل شرکت پذیر با عنصر همانی 0 است. اگر $a \diamond b = 0 = c \diamond a$، به آسانی دیده می‌شود که $b = c$. بنابراین a شبه وارون پذیر است اگر یک عنصر یکتا مانند b یافت شود به طوری که $a \diamond b = 0 = b \diamond a$، در این صورت b را شبه وارون a گوییم و با a^q نشان می دهیم.

مجموعهٔ همه عناصر شبه وارون پذیر A را با نماد $q - \mathrm{Inv}A$ نشان می‌دهیم.

واضح است که اگر $a \diamond b = 0$، آنگاه $(e_{A^\#} - a)(e_{A^\#} - b) = e_{A^\#}$ و بر عکس، که در آن $e_{A^\#}$ یکهٔ $A^\#$ و به علاوه $\mathrm{Inv}A^\# = e_{A^\#} + q - \mathrm{Inv}A$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر توپولوژیک باشد. گوییم A یک Q-جبر [4] است هرگاه $q - \mathrm{Inv}A$ یک مجموعهٔ باز در A باشد.

لم ۱۱.۱.۱. [13, I. Lemma 6.4] *فرض کنیم A یک جبر توپولوژیک باشد. در این صورت احکام زیر با هم معادل هستند:*

(الف) A *یک Q-جبر است،*

(ب) $q - \mathrm{Inv}A$ *دارای درون ناتهی است،*

(ج) $q - \mathrm{Inv}A$ *یک همسایگی صفر در A است.*

مثال ۱۲.۱.۱. فرض کنیم $C_c(\mathbb{R})$ همهٔ توابع $f \in C(\mathbb{R})$، با محمل فشرده باشد. حال $C_c(\mathbb{R})$ را با اعمال نقطه‌ای تبدیل به جبرمی‌کنیم و نرم یکنواخت $\|\cdot\|_\infty$ را روی آن در نظر می‌گیریم. و $C_c(\mathbb{R})$ یک جبر نرمدار است که کامل نیست زیرا دنباله کوشی

1. Quasi-product, 2. Left(right) quasi-invertible, 3. Quasi-invertible, 4. Q-algebra

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ x & x \in [0,1) \\ \frac{1}{x} & x \in [1,n) \\ \frac{n+1-x}{n} & x \in [n, n+1] \\ 0 & x \in (n+1, \infty) \end{cases}$$

در $C_c(\mathbb{R})$ همگرا نیست. فرض کنیم $f \in C_c(\mathbb{R})$ به طوری که $\|f\|_\infty < 1$. در این صورت برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) \neq 1$. می‌توانیم تابع g را بر $\mathbb{R}$ به صورت $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$ تعریف کنیم. واضح است که $g \in C_c(\mathbb{R})$ و $g \circ f = 0 = f \circ g$. پس $f \in q - \mathrm{Inv}(C_c(\mathbb{R}))$. بنابراین $C_c(\mathbb{R})$ یک Q-جبر است.

توجه کنید که $C(\mathbb{R})$ یک با توپولوژی فشرده، بازها، Q-جبر نیست [9, p.73].

تعریف ۱.۱.۱۳. جبر توپولوژیک A را عطفی کامل [1] گوییم هرگاه برای هر تور کوشی $\{x_\alpha\}$، عنصر $x \in A$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $x_\alpha \circ x \to 0$ و $x \circ x_\alpha \to 0$، آنگاه $\{x_\alpha\}$ در A همگرا باشد.

واضح است که هر جبر توپولوژیک کامل، عطفی کامل است.

قضیه ۱.۱.۱۴. [*13*, I. Theorem 6.4] *هر Q-جبر، عطفی کامل است.*

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم A فضای برداری مختلط باشد. نگاشت $p : A \to \mathbb{R}$ را یک نیم نرم [2] گوییم هرگاه در اصول زیر صدق کند:

(الف) برای هر $x \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

(ب) برای هر $x, y \in A$، $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

بنابر [17, 1.34] نیم نرم p به ازای هر $x \in A$ در نامساوی $p(x) \geq 0$ صدق می‌کند. نیم نرم p روی جبر مختلط A را نرم [3] گوییم هرگاه به ازای هر $x \in A$، اگر $p(x) = 0$ آنگاه $x = 0$.
نیم نرم p روی جبر مختلط A را زیر ضربی [4] گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in A$، $p(xy) \leq p(x)p(y)$.
نیم نرم p روی $*$-جبر مختلط A را C^*-نیم نرم گوییم هرگاه به ازای هر $x \in A$، $p(x^*x) = p(x)^2$.

تعریف ۱.۱.۱۶. جبر باناخ [5] عبارت است از یک جبر نرمدار به طوری که این نرم زیر ضربی یا جبری

1. Advertibly complete, 2. Semi-norm, 3. Norm, 4. Submultiplicative, 5. Banach algebra

باشد، به این مفهوم که برای هر $x, y \in A$، $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$ و به علاوه تحت این نرم جبر کامل باشد، یعنی هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد.

قضیه ۱.۱.۱۷. [3, 2.1.29(i)] *هر جبر باناخ Q-جبر است.*

به عنوان یک نتیجهٔ مهم می‌توان به قضیهٔ زیر اشاره کرد که در سال ۱۹۷۹ توسط سباستین [1] بدست آمده است.

قضیه ۱.۱.۱۸. [19] *هر C^*-نیم نرم روی یک $*$-جبر به طور خودکار $*$-پایا ($p(x^*) = p(x)$) و زیر ضربی است.*

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنیم $\mathcal{P}$ یک خانواده از نیم نرم‌ها روی فضای برداری A باشد. گوییم $\mathcal{P}$ جدا ساز [2] است هرگاه به ازای هر $x \in A$ که $x \neq 0$، $p \in \mathcal{P}$ وجود داشته باشد به طوری که $p(x) \neq 0$.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط باشد.

(الف) زیر مجموعهٔ $C \subset X$ را محدب [3] گوییم هرگاه به ازای هر $0 \le t \le 1$، $tC + (1-t)C \subseteq C$.

(ب) زیر مجموعهٔ $B \subset X$ را متعادل [4] گوییم هرگاه به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ که $|\alpha| \le 1$، $\alpha B \subseteq B$.

(ج) زیر مجموعهٔ $A \subset X$ را جاذب [5] گوییم هرگاه به ازای هر $x \in A$، $t > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in tA$.

لم ۱.۱.۲۱. [17, 1.35, 1.36] *فرض کنیم A یک جبر باشد.*

(الف) اگر p یک نیم نرم روی A باشد، آنگاه مجموعهٔ $U = \{x \in A : \ p(x) \le 1\}$ محدب، متعادل و جاذب است. اگر p زیر ضربی باشد آنگاه U زیر ضربی است ($UU \subseteq U$).

(ب) اگر U یک زیر مجموعهٔ جاذب، متعادل و محدب باشد، آنگاه به ازای هر $x \in A$ تابع مینکفسکی [6] $\mu_U(x) = \inf\{t > 0 : \ t^{-1}x \in U\}$ یک نیم نرم است و اگر U زیر ضربی باشد، آنگاه μ_U زیر ضربی است.

(ج) اگر A یک جبر توپولوژیک با پایهٔ موضعی $\mathcal{B}$ باشد به طوری که اعضای این پایه محدب و متعادل باشند، آنگاه مجموعه $\{\mu_U : \ U \in \mathcal{B}\}$ یک خانواده از نیم نرم‌های جدا ساز روی A هستند.

---

1. Z. Sebestyén, 2. Separating, 3. Convex, 4. Balanced, 5. Absorbing, 6. Minkowski functional

تعریف ۲۲.۱.۱. یک جبر موضعاً ضربی محدب یا lmc-جبر [1] عبارت است از یک جبر توپولوژیک که توپولوژی آن توسط یک خانواده از نیم نرم‌های زیر ضربی جدا ساز تولید شده باشد. به عبارت دیگر با استفاده از لم فوق می‌توان گفت lmc-جبر، یک جبر توپولوژیک است که اعضای پایهٔ توپولوژی آن متعادل، محدب و ضربی باشند.

حال یک مثال از جبری که عطفی کامل است ولی این جبر نه کامل است و نه Q-جبر در زیر می‌آوریم.

مثال ۲۳.۱.۱. (وارنر) فرض کنیم A_1 یک Q-جبر نرمدار ناکامل (مانند $(C_c(\mathbb{R})$) و $\{A_n\}_{n>1}$ یک خانواده از جبرهای باناخ یکدار باشد. فضای $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ را با توپولوژی ضربی در نظر می‌گیریم. با توجه به قضیه‌های [(1) 7, I.6.5 & I.6.10] A تبدیل به یک lmc-جبر عطفی کامل می‌شود که کامل نیست، زیرا A_1 کامل نیست. توجه کنید که اگر e_n عنصر همانی A_n برای $n > 1$ باشد آنگاه این عنصر شبه وارون پذیر در A_n نیست، زیرا در غیر این صورت برای هر $n > 1$، $e_n = 0$. بنابراین A، بنابر قضیه [(3) 7, I.6.10] Q-جبر نیست.

تعریف ۲۴.۱.۱. lmc Q- جبر [2] عبارت است از یک lmc-جبر که Q-جبر نیز می‌باشد.

متریک d روی فضای X ناوردا (پایا) [3] است اگر برای هر $x, y, z \in X$، $d(x+z, y+z) = d(x, y)$.

تعریف ۲۵.۱.۱. F-جبر [4] عبارت است از یک جبر توپولوژیک که توپولوژی آن توسط یک متریک پایا تولید شده باشد و با آن یک فضای متریک کامل باشد.

تعریف ۲۶.۱.۱. FQ-جبر [5] عبارت است از یک F-جبر که Q-جبر نیز باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. جبر فرشه [6] عبارت است از یک F-جبر که lmc-جبر نیز باشد.

باید به این نکته اشاره کرد که توپولوژی یک جبر فرشهٔ A توسط یک دنباله از نیم نرم‌های زیر ضربی جدا ساز مانند $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تولید می‌شود به طوری که این دنباله دارای ویژگی زیر است:

(الف) برای هر $x \in A$ و $n \in \mathbb{N}$، $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$.

(ب) اگر جبر فرشه A یکدار باشد آنگاه می‌توانیم p_n ها را به گونه ای انتخاب کنیم که $p_n(e_A) = 1$. برای این منظور می‌توانید به [9, 3.1.7] مراجعه کنید.

1. lmc-algebra, 2. lmc Q-algebra, 3. Invariant, 4. F-algebra, 5. FQ-algebra,
6. Fréchet algebra

تعریف ۲۸.۱.۱. Q-جبر فرشه [1] عبارت است از یک جبر فرشه که Q-جبر نیز باشد.

مثال ۲۹.۱.۱. فرض کنیم $p = (p_1, ..., p_n)$ یک چند اندیسی باشد، به این معنی که یک n تایی مرتب از اعداد صحیح نامنفی p_i $1 \leq i \leq n,$ باشد. حال فرض کنیم $|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i$ و $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. برای $m, k = 0, 1, 2, ...$ نیم نرم‌های $p_{m,k}(f)$ را به صورت

$$p_{m,k}(f) = \sup\{(1+|x|)^k |\partial^p f(x)| : \ x \in \mathbb{R}^n, \ |p| \leq m\},$$

تعریف می‌کنیم. حال قرار می دهیم

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : p_{m,k}(f) < \infty, \ m, k = 0, 1, 2, ...\}.$$

جبر $S(\mathbb{R}^n)$ یک Q-جبر فرشه است که جبر باناخ نیست [7, I.6.23(6)].

تعریف ۳۰.۱.۱. $*$-جبر توپولوژیک [2] عبارت است از یک جبر توپولوژیک به انضمام یک برگشت پیوسته.

مثال ۳۱.۱.۱. جبرهای $C^\infty[0,1]$ و $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ با برگشتی که همان مزدوج مختلط است تبدیل به $*$-جبر توپولوژیک می‌شوند.

اگر $(A, \{p_\alpha\})$ یک جبر توپولوژیک باشد که $*$-جبر نیز باشد و توپولوژی آن توسط خانواده‌ای از نیم نرم‌های $\{p_\alpha\}$ تولید شده باشد به طوری که به ازای هر $x \in A$ و هر α، $p_\alpha(x^*) = p_\alpha(x)$، آنگاه A یک $*$-جبر توپولوژیک است.

تعریف ۳۲.۱.۱. lmc $*$-جبر [3] عبارت است از یک lmc-جبر $(A, \{p_\alpha\})$ به انضمام یک برگشت $*$، به طوری که به ازای هر $x \in A$ و هر α، $p_\alpha(x^*) = p_\alpha(x)$.

واضح است که هر lmc $*$-جبر یک $*$-جبر توپولوژیک است.

تعریف ۳۳.۱.۱. Q lmc $*$-جبر [4] عبارت است از یک Q lmc-جبر که $*$-جبر توپولوژیک نیز باشد.

مثال ۳۴.۱.۱. [7, II.7.7(1)] جبر $C^\infty[0,1]$ یک Q lmc $*$-جبر است.

تعریف ۳۵.۱.۱. C^* lmc-جبر [5] عبارت است از یک lmc $*$-جبر $(A, \{p_\alpha\})$ به طوری که به ازای

1. Fréchet Q-algebra, 2. Topological $*$-algebra, 3. lmc $*$-algebra, 4. lmc Q $*$-algebra,
5. lmc C^*-algebra