وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

حل مساله مثلث‌بندی کمترین وزن با روش‌های اکتشافی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

ملیحه جهانی

استاد راهنما: دکتر بهرام صادقی بی‌غم

استاد مشاور: دکتر محسن افشارچی

آذر ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

هدیه

به عباس مهربانم که همواره با محبت
بی‌دریغش یاریم کرده

و

پدر و مادر عزیزم که وجود مقدسشان امید
فردای من است.

قدردانی و تشکر

سپاس پروردگار بلندمرتبه را که به هر کس بخواهد عزت دهد.

بدینوسیله از جناب آقای دکتر بهرام صادقی بی‌غم که در تمام مراحل انجام پایان‌نامه از راهنمایی‌های حکیمانه‌شان اینجانب را بهره‌مند نمودند کمال امتنان و سپاسگزاری را دارم.

چکیده

مثلث‌بندی مجموعه نقاط S در صفحه، برابر با بزرگترین گراف راست‌خط مجموعه رئوس S است بطوریکه گراف حاصل مسطح باشد. در مساله مثلث‌بندی با کمترین وزن به دنبال مثلث‌بندی هستیم که مجموع طول یال‌های آن کمترین باشد. حل‌پذیر بودن این مساله در زمان چندجمله‌ای در حدود ۴۰ سال بصورت مساله باز باقیمانده بود تا اینکه در سال ۲۰۰۶ میلادی NP—سخت بودن آن اثبات شد. در این پایان‌نامه روش‌های ارایه شده برای حل این مساله مورد بررسی قرار گرفته است و در انتها نیز روشی اکتشافی با استفاده از روش بهینه‌سازی تجمعی مورچه‌ها برای آن ارایه شده است.

فهرست

۳ بهینه‌سازی تجمعی مورچه‌ها

۴ روش‌های موجود برای حل مساله مثلث‌بندی با کمترین وزن

مقدمه

هندسه محاسباتی یکی از شاخه‌های علوم کامپیوتر است که برای حل مسایل هندسی از روش‌های الگوریتمی استفاده می‌کند.

یکی از شاخه‌های اصلی هندسه محاسباتی، هندسه محاسباتی ترکیبیاتی (هندسه الگوریتمی) است که در آن اشیاء هندسی به عنوان موجودیت‌های گسسته در نظر گرفته می‌شوند و هدف آن ارایه الگوریتم‌ها و ساختارهای داده‌ای مناسب برای حل مسایلی است که در زمینه اشیاء پایه هندسی (نقطه، خط، چندضلعی و ...) مطرح می‌شوند.

هندسه محاسباتی در زمینه‌هایی چون رباتیک، سیستم‌های اطلاعات جغرافیایی و طراحی مدارهای مجتمع کاربرد دارد و مشکل اصلی آن در اکثر مسایل هندسه محاسباتی کاربردی، حجم زیاد اطلاعاتی که با آن سر و کار دارند است. برای غلبه بر این مشکل می‌توان به جای نگهداری تمام اطلاعات موجود، فقط تعدادی از اطلاعات کلیدی را نگهداری کرد و از یکی از روش‌های تقریبی ارایه شده برای پردازش‌های سریع‌ترو کاراتر استفاده نمود.

یکی از مسایل هندسه محاسباتی مساله مثلث‌بندی است که در مواردی چون مثلث‌بندی چندضلعی و مثلث‌بندی نقاط در صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مساله مثلث‌بندی یال‌های راست خطی بین نقاط داده شده (چه روی رئوس چندضلعی و یا نقاطی در صفحه) طوری رسم می‌شوند که هیچ یالی، یال دیگری را قطع نکند. مساله مثلث‌بندی با کمترین وزن، از سال ۱۹۷۰ تا ۲۰۰۶ حل نشده باقی مانده بود و یکی از طولانی‌ترین مسایل حل نشده در حوزه هندسه محاسباتی به شمار می‌رود [۲۷]. یکی از مهم‌ترین کارهای انجام شده برای حل این مساله استفاده از الگوریتم اسکلت—ال ام تی است [۱۲]. مساله مثلث‌بندی با کمترین وزن سعی در محاسبه مثلث‌بندی مجموعه‌ای از نقاط داده شده در صفحه را دارد که مجموع طول یال‌های آن کمترین باشد.

در این پایان‌نامه، کلیات هندسه محاسباتی در فصل یک توضیح داده شده است. در فصل دو مثلث‌بندی و روش‌های مختلف آن به تفصیل آورده شده است. روش بهینه سازی تجمعی مورچه‌ها در فصل سه آمده است. در فصل چهار روش‌هایی که تاکنون برای محاسبه مثلث‌بندی با کمترین وزن ارایه شده است به طور مشروح بیان شده است. در پایان الگوریتمی با استفاده از روش بهینه سازی تجمعی مورچه‌ها در فصل پنج پیشنهاد شده است.

نتیجه انجام این پایان‌نامه ارایه سه مقاله با عنوان‌های زیر می‌باشد.

- الگوریتم کلونی مورچه‌ها برای مساله مثلث‌بندی با کمترین وزن، دهمین کنفرانس بین‌المللی علوم کامپیوتر و کاربردهای آن، ۲۰۱۰، ژاپن.
- مثلث‌بندی بهینه توسط یکی از الگوریتم‌های تکاملی، سومین کنفرانس بین‌المللی کاربردهای اطلاعات دیجیتال و تکنولوژی‌های وب ، ۲۰۱۰، ترکیه.
- استفاده از سیستم چندعامله مبتنی بر مورچه برای بهینه کردن مساله مثلث‌بندی با کمترین وزن، مجموعه مجلات DLINE، ۲۰۱۱، آمریکا.

ملیحه جهانی

آذر ۱۳۸۹

فصل اول

کلیات

هندسه محاسباتی یکی از شاخه‌های علوم کامپیوتر است که برای حل مسایل هندسی از روش‌های الگوریتمی استفاده می‌کند. انگیزه اصلی برای قلمداد کردن هندسه محاسباتی به عنوان یک رشته علمی، پیشرفت در زمینه‌هایی چون گرافیک کامپیوتری و طراحی و تولید بوسیله کامپیوتر[۱]، CAD/CAM، بود.

هندسه محاسباتی ترکیبیاتی (هندسه الگوریتمی) و هندسه محاسباتی عددی(هندسه ماشینی، طراحی با کمک رایانه، مدل‌سازی هندسی) شاخه‌های اصلی هندسه محاسباتی هستند. هندسه محاسباتی ترکیبیاتی، اشیاء هندسی را به عنوان موجودیت‌های گسسته در نظر می‌گیرد و هندسه محاسباتی عددی، اشیاء را به صورت ورودی‌های مناسب جهت انجام محاسبات در سیستم‌های CAD/CAM، تبدیل می‌کند و اغلب به عنوان یکی از شاخه‌های گرافیک کامپیوتری به حساب می‌آید. یکی از اهداف اصلی هندسه محاسباتی، که در این پایان‌نامه مورد توجه قرار دارد، ارایه الگوریتم‌ها و ساختارهای داده‌ای مناسب جهت حل مسایلی است که در زمینه اشیاء پایه هندسی (نقطه، خط، چندضلعی و ...) مطرح می‌شوند.

هندسه محاسباتی در زمینه‌هایی چون رباتیک[۲] (برنامه‌ریزی حرکت روبات‌ها)، سیستم‌های اطلاعات جغرافیایی[۳]،

---

[۱] CAD (Computer Aided Design)/CAM (Computer Aided Manufactoring)

[۲] Robotic

[۳] GIS (Geographic Information Systems)

GIS، جستجو و مکان‌یابی هندسی، نقشه‌کشی راه‌ها) و طراحی مدارهای مجتمع [۴] (طراحی و بازبینی هندسی مدارهای مجتمع) کاربرد دارد.

در گرافیک کامپیوتری، تمرکز بر روی نمایش عکس‌ها و مناظر است. از آنجا که مناظر در محیط‌های دو بعدی و سه بعدی شامل تعداد بسیار زیادی از اشیاء هندسی مانند خط و چندضلعی و منحنی هستند، الگوریتم‌های هندسی نقش مهمی در گرافیک کامپیوتری بازی می‌کنند.

یک سیستم اطلاعات جغرافیایی، اطلاعات جغرافیایی مانند ارتفاع کوه‌ها، مسیر رودخانه‌ها، تراکم جمعیت، گونه‌های مختلف گیاهی مناطق مختلف و محل آبشارها را نگهداری می‌کند. یک GIS، می‌تواند برای استخراج روابط بین داده‌های مختلف استفاده شود. برای مثال ممکن است یک زیست‌شناس از این اطلاعات برای یافتن رابطه بین رودخانه‌های یک منطقه و گونه‌های مختلف گیاهی آن استفاده کند یا فرض کنید یک سیستم هدایت خودرو طراحی کنیم تا به کاربر نشان دهد که در هر لحظه در کجا قرار دارد. برای این کار سیستم باید در هر لحظه قادر به تشخیص موقعیت خودرو روی نقشه باشد و بتواند به سرعت بخش‌های کوچک‌تر نقشه را به نمایش بگذارد و این نیازمند نگهداری حجم زیادی از اطلاعات جاده و سایر داده‌ها است. در واقع یک مشکل مهم در چنین سیستمی چگونگی نگهداری اطلاعات جغرافیایی است. برای غلبه بر مسایلی از این دسته، هندسه محاسباتی راه‌های بسیار عملی پیش روی کاربران قرار می‌دهد. مثلاً می‌توان به جای نگهداری تمام نقاط موجود در نقشه فقط تعدادی از نقاط کلیدی را نگهداری کرد و با بکارگیری یکی از روش‌های مثلث‌بندی، پردازش‌هایی سریع‌تر و کاراتر داشت.

ابزارهای مورد نیاز بشر مانند قطعات ماشین، مبلمان و ساختمان را می‌توان با استفاده از کامپیوتر طراحی نمود. در تمام موارد نتیجه، یک موجودیت هندسی است که شامل اشیاء هندسی زیادی می‌باشد. از مسایل موجود در این حوزه می‌توان به اشتراک و اجتماع اشیاء و مرز آنها اشاره کرد.

نمونه‌سازی از مولکول‌ها یکی دیگر از حوزه‌های کاربردی هندسه محاسباتی است که در آن غالباً مولکول‌ها با مجموعه‌ای از کره‌های درهم فرورفته نمایش داده می‌شوند که هر کره معرف یک اتم است. در مسایلی مانند محاسبه مساحت سطح مولکول‌ها و یا محل تماس آنها می‌توان از تکنیک‌های هندسه محاسباتی استفاده نمود.

[۴] IC (Integrated Circuit)

گونه‌های مختلف مثلث‌بندی می‌توانند در حل بعضی از مسایل این حوزه بکار روند.

در کاربردهای هندسه محاسباتی مانند استفاده از آن در محاسبات سیستم‌های اطلاعات جغرافیایی و طراحی مدارهای مجتمع که روزانه ده‌ها و صدها میلیون نقطه در نظر گرفته می‌شوند، تفاوت بین مرتبه‌های زمانی خیلی نزدیک، مانند $O(n^2)$ و $O(nlogn)$، می‌تواند تفاوت بین ساعت‌ها و روزها محاسبه باشد. از این‌رو در هندسه محاسباتی توجه بسیار زیادی به پیچیدگی محاسباتی می‌شود.

مساله‌های مهمی که عموماً در هندسه محاسباتی مورد توجه قرار می‌گیرند، دیاگرام ورونوی، رویه محدب، چیدمان و مثلث‌بندی هستند. در فصل بعد، مساله مثلث‌بندی و یکی از مهم‌ترین مثلث‌بندی‌ها به نام مثلث‌بندی با کمترین وزن آورده شده است.

فصل دوم

مثلث‌بندی

یکی از مسایل مطرح در هندسه محاسباتی مساله مثلث‌بندی است که در مواردی چون مثلث‌بندی چندضلعی و مثلث‌بندی نقاط در صفحه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مساله مثلث‌بندی، یال‌های راست خطی بین نقاط داده شده طوری رسم می‌شوند که هیچ یالی، یال دیگری را قطع نکند.

در مثلث‌بندی چندضلعی، یک چند ضلعی ساده[۱] به مجموعه‌ای از مثلث‌ها تقسیم می‌شود بطوریکه هیچ‌یک از پاره‌خط‌های رسم شده داخل چندضلعی که نقاط انتهایی آنها روی رئوس چندضلعی قرار دارند یکدیگر را قطع نمی‌کنند و هیچ دو مثلثی روی هم نمی‌افتند. به عبارت دیگر، اجتماع مثلث‌ها چندضلعی اولیه را تشکیل می‌دهند و هر نقطه از چند ضلعی فقط و فقط در یک مثلث قرار می‌گیرد.

چندضلعی‌های محدب به سادگی در زمان خطی، $O(n)$، با رسم تمام یال‌های واصل از یک رأس به سایر رئوس چندضلعی مثلث‌بندی می‌شود.

[۱] چندضلعی که اضلاعش یکدیگر را قطع نکنند.

۱.۲ مثلث‌بندی مجموعه‌ای از نقاط

مثلث‌بندی مجموعه نقاط S در صفحه، برابر با بزرگترین گراف راست‌خط با مجموعه رئوس S است بطوریکه گراف حاصل مسطح باشد.

تعریف ۱.۱.۲ مثلث‌بندی مجموعه نقاط S در فضای دوبعدی، بیشترین تعداد پاره‌خط‌هایی (یال‌هایی) است که توسط نقاط S رسم می‌شوند بطوریکه یال‌ها یکدیگر را قطع نکنند.

تعداد یال‌ها و مثلث‌های یک مثلث‌بندی به تعداد رئوس مستقر بر روی پوسته محدب[۲] وابسته است.

قضیه ۲.۱.۲ اگر n، تعداد نقاط مجموعه S در صفحه و h تعداد رئوس پوسته محدب آن باشد، تعداد مثلث‌های هر مثلث‌بندی از S برابر با $2n-h-2$ است و تعداد یال‌های مثلث‌بندی برابر با $3n-h-3$ خواهد بود.

برهان. اگر T یک مثلث‌بندی از S باشد و m تعداد مثلث‌های T باشد، تعداد وجه‌های مثلث‌بندی، n_f، برابر با $m+1$ است. هر مثلث شامل سه یال است و وجه نامتناهی شامل h یال است. از طرفی هر یال در دو وجه دیده می‌شود، پس تعداد یال‌های مثلث‌بندی، n_e، برابر با $(3m+h)/2$ است. با توجه به فرمول اویلر داریم:

$$n - n_e - n_f = 2.$$

با جایگذاری مقادیر n_e و n_f روابط مورد نظر بدست می‌آیند. $\square$

مثلث‌بندی دلونی یکی از مشهورترین مثلث‌بندی‌ها است که در آن هر دایره گذرنده از سه رأس هر مثلث شامل هیچ نقطه دیگری از S نمی‌باشد (خالی است). این مثلث‌بندی از دوگان[۳] دیاگرام ورونوی[۴] در زمان $O(nlogn)$ بدست می‌آید. یافتن بهترین مثلث‌بندی تحت شرایط خاص، همیشه مورد توجه بوده است. مثلث‌بندی دلونی از جهات زیادی یک مثلث‌بندی بهینه است و توابع هدف بسیاری را به صورت هم‌زمان بهینه می‌کند که یکی از

[۲] Convexhull
[۳] Dual
[۴] Voronoi Diagram

مهم‌ترین آنها اینست که کمترین زاویه در مثلث‌های این مثلث‌بندی بیشترین است. به عبارت دیگر مثلث‌بندی آن از سایر مثلث‌بندی‌ها پهن‌تر[5] است.

یکی از مشخصات مثلث‌بندی‌ها که به آن توجه خاصی شده است، وزن مثلث‌بندی می‌باشد. منظور از وزن یک مثلث‌بندی مجموع وزن یال‌های آن است که وزن هر یال برابر با طول اقلیدسی آن در نظر گرفته می‌شود. مثلث‌بندی با کمترین وزن[6]، MWT، یکی از مسایل مهم در حوزه هندسه محاسباتی می‌باشد که تحقیقات زیادی روی آن صورت گرفته است که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

مثلث‌بندی مجموعه‌ای از نقاط، کاربردهای زیادی در حوزه‌های مختلف علم دارد. از آن جمله می‌توان به طراحی گرافیک، سیستم‌های اطلاعات جغرافیایی و بهینه‌سازی مدارها اشاره کرد.

۲.۲ مثلث‌بندی با کمترین وزن

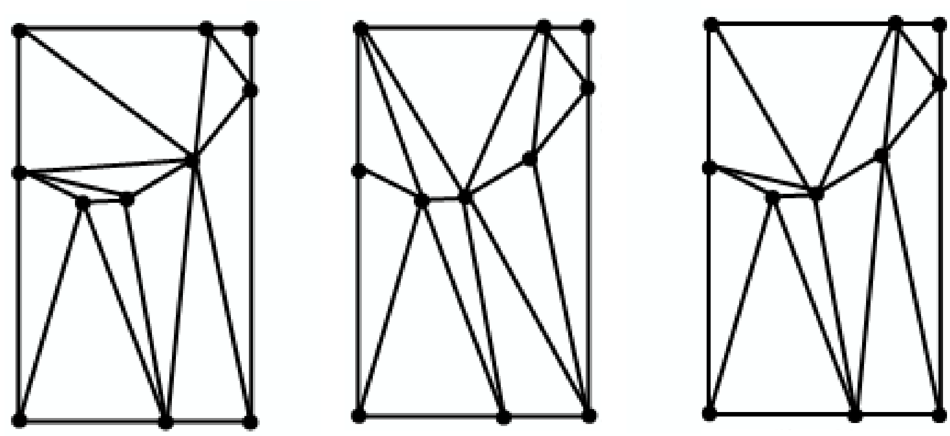
مثلث‌بندی با کمترین وزن مجموعه نقاط S، مثلث‌بندی است که مجموع طول یال‌های آن کمترین است و ممکن است منحصر به فرد نباشد. مساله محاسبه MWT در سال ۱۹۷۰ مطرح گردید و امکان محاسبه آن در زمان چندجمله‌ای تا سال ۲۰۰۶ به عنوان یک مساله باز باقی مانده بود.

اولین بار داپ[7] و گاتچاک[8] یک الگوریتم حریصانه[9] برای حل این مساله، جهت استفاده از آن در آنالیز عددی ارایه کردند [۱۴]. بعد از آن شاموس [10] و هوی [11] از مثلث‌بندی دلونی به عنوان مثلث‌بندی با کمترین وزن استفاده کردند [۲۸]. اما چندی بعد لوید [12] نشان داد که هر دو روش پیشنهادی همیشه MWT را محاسبه نمی‌کنند (شکل ۱.۱) [۲۵].

با توجه به حل‌ناپذیری مساله با روش‌های شناخته شده‌ای چون شاخه و حد و برنامه‌ریزی پویا، محققان

[5] Fat
[6] Minimum Weight Triangulation
[7] Duppe
[8] Gottschalk
[9] Greedy
[10] Shamos
[11] Hoey
[12] Lloyd

سعی کردند این مساله را در حالت‌های خاصی حل کنند. از این‌رو می‌توان الگوریتم‌های ارایه شده برای محاسبه MWT را به چند دسته تقسیم نمود. دسته‌ای از الگوریتم‌ها مساله را برای حالت‌های خاصی از مجموعه نقاط محاسبه می‌کنند. بعضی دیگر مثلث‌بندی‌هایی را محاسبه می‌کنند که MWT را تقریب می‌زنند. دسته‌ای دیگر از الگوریتم‌ها یال‌هایی را مشخص می‌کنند که لزوماً در MWT دیده می‌شوند و سعی می‌کنند با استفاده از این یال‌های MWT را بدست آورند. همچنین الگوریتمی وجود دارد که از آن برای تعیین یال‌هایی که قطعاً در MWT دیده نمی‌شوند استفاده می‌شود و در تسریع محاسبات و کم کردن فضای لازم بکار می‌رود.



$weight = 1291.86$ $weight = 1313.89$ $weight = 1287.92$

(a) (b) (c)

شکل ۱.۱. مجموعه‌ای از نقاط و روش‌های مختلف مثلث‌بندی آن. مثلث‌بندی حریصانه (a) همیشه کوتاهترین یال را به مجموعه یال‌های مثلث‌بندی اضافه می‌کند. در این مثال وزن مثلث‌بندی حریصانه از مثلث‌بندی دلونی (b) کمتر است. یک مثلث‌بندی با کمترین وزن برای نقاط داده شده (c).

۱.۲.۲ محاسبه MWT با استفاده از برنامه‌ریزی پویا

گیلبرت [۱۳] و کلینسک [۱۴] هر کدام به صورت مستقل الگوریتمی با استفاده از برنامه‌ریزی پویا ارایه کردند که MWT یک چندضلعی ساده را در زمان $O(n^3)$ محاسبه می‌کند [۲۲، ۱۵]. چنگ [۱۵] و همکارانش نیز

[۱۳] Gilbert
[۱۴] Klincsek
[۱۵] Cheng

الگوریتمی ارایه کردند که MWT مجموعه نقاطی که یک جزء k–هم‌بند از MWT آن مشخص است را با استفاده از این روش در زمان $O(n^{k+2})$ محاسبه می‌کند [۷].

۲.۲.۲ محاسبه MWT برای کلاس‌های محدودی از مجموعه نقاط

برای کلاس‌های محدودی از مجموعه نقاط، محاسبه MWT در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است. به عنوان مثال آناگنوستو[۱۶] و کرنیل[۱۷] یک الگوریتم زمان $O(n^{3k+1})$ برای محاسبه MWT مجموعه نقاطی که رئوس k چندضلعی محدب تودرتو هستند ارایه کردند [۱]. هافمن[۱۸] و اکاموتو[۱۹] نیز نشان دادند که MWT مجموعه نقاطی با k نقطه داخلی را می‌توان در زمان $O(6^k n^5 logn)$ بدست آورد [۱٦].

۳.۲.۲ روشهای تقریبی محاسبه MWT

مثلث‌بندی دلونی[۲۰] و مثلث‌بندی حریصانه[۲۱] از روش‌های معروف و اولیه برای تقریب زدن MWT هستند. همانطور که گفته شد لوید نشان داد که در حالت کلی مثلث‌بندی دلونی برابر با MWT نمی‌باشد. کرک‌پاتریک[۲۲] اثبات کرد که مثلث‌بندی دلونی با ضریب $\Omega(n)$ مساله MWT را تقریب می‌زند [۲۰] و لوکاپولس[۲۳] و کرزناریک[۲۴] نشان دادند مثلث‌بندی حریصانه نیز MWT را دقیقاً محاسبه نمی‌کند، بلکه آن را با ضریبی از $\Theta(\sqrt{n})$ تقریب می‌زند [۲۳] و همچنین الگوریتمی شبه حریصانه[۲۵] ارایه کردند که مثلث‌بندی را در زمان $O(nlogn)$ محاسبه می‌کند و MWT را با یک مقدار ثابت تقریب می‌زند[۲۴].

یکی از روش‌های استفاده شده برای تقریب MWT، استفاده از درخت پوشای کمینه[۲٦] است که یک مثلث‌بندی

[۱٦] Anagnostou
[۱۷] Corneil
[۱۸] Hoffmann
[۱۹] Okamoto
[۲۰] Delaunay Triangulation
[۲۱] Greedy Triangulation
[۲۲] Kirkpatrick
[۲۳] Levcopoulos
[۲۴] Krznaric
[۲۵] Quasi-Greedy
[۲٦] Minimum Spaning Tree

شامل یال‌های درخت پوشای کمینه و یال‌های پوسته محدب می‌سازد که یک گراف هم‌بند با حفره‌هایی چندضلعی‌گون است و می‌تواند با استفاده از الگوریتم MWT چندضلعی کامل شود. درخت پوشای حریصانه[۲۷] نیز روش دیگری است که از آن برای تقریب MWT استفاده می‌شود.

۴.۲.۲ زیرگراف‌های MWT

تعیین یال‌هایی از گراف کامل مجموعه‌ای از نقاط که قطعاً در MWT وجود دارند و یا یال‌هایی که قطعاً در MWT وجود ندارند به محاسبه سریع‌تر MWT کمک می‌کند. گیلبرت نشان داد که MWT همیشه شامل کوتاهترین یال است [۱۵]. یانگ[۲۸] و همکارانش نشان دادند که تمام یال‌هایی که رئوس همسایه دوبه‌دو نزدیک را به هم متصل می‌کنند در MWT دیده می‌شوند [۳۱].

یال‌های اجتناب ناپذیر[۲۹] یال‌هایی هستند که با هیچ یال دیگری از یال‌های مجموعه نقاط در تقاطع نیستند، این یال‌ها در هر مثلث‌بندی و درنتیجه در هر MWT مجموعه نقاط دیده می‌شوند. با توجه به این تعریف، تمام یال‌های رویه محدب [۳۰] اجتناب ناپذیرند. زو[۳۱] نشان داد که تعداد یال‌های اجتناب‌ناپذیر بیشتر از $2n-2$ نمی‌باشد و از مقایسه این تعداد با تعداد کل یال‌های مجموعه نقاط که از مرتبه $O(n^2)$ است می‌توان دریافت که این تعریف کمکی به حل سریعتر مساله نمی‌کند [۳۲].

یکی از بزرگترین زیرگراف‌های MWT، اسکلت—بتا[۳۲] نام دارد که توسط کرک‌پاتریک و راک [۳۳] معرفی شده است. به ازای دو نقطه x و y، برای $\beta \geq 1$ همسایگی ممنوعه[۳۴] x و y اجتماع دوایری با شعاع‌های $\beta|xy|/2$ است که از x و y می‌گذرند. برای مجموعه نقاط داده شده S و $x,y \in S$، یال xy متعلق به اسکلت—بتا S است اگر هیچ نقطه‌ای از S داخل همسایگی ممنوعه x و y قرار نگرفته باشد (شکل ۱.۲) [۲۱].

[۲۷] Greedy Spaning Tree
[۲۸] Yang
[۲۹] Unavoidable Edges
[۳۰] Convexhull
[۳۱] Xu
[۳۲] β-Skeleton
[۳۳] Radke
[۳۴] Forbbiden Neighborhood