[section] [section]

رادیکال ایده‌ال‌های به طور تصویری کامل در حلقه‌های توسیعی صحیح

توسط

عیسی دار

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ

کارشناسی ارشد ریاضیات محض

زیر نظر

دکتر محمد حسین حسینی

استاد مشاور:دکتر حسین فضائلی مقیمی

دانشکدهٔ ریاضی

دانشگاه بیرجند

بهمن ماه ۱۳۸۹

تقدیم به

دو گوهر گرانبهای زندگیم

غلامرضا

و

مریم

قدردانی

خدایم راسپاس

که مرا مادر و پدری بخشید که سپید موی گشتند تا سپید روی نشوم.

تقدیر و سپاس همسری مهربان را که حامی من شد تا در محضر اساتیدی بزرگوار همکلاس با دوستانی شوم که تا ابد خاطره شان در دلم باقی خواهد ماند.

از آقای دکتر حسینی که استاد راهنمای من در این پایان نامه بودند و همچنین از آقای دکتر فضائلی که مشاوره این پایان نامه بر عهده ی ایشان بود سپاسگذارم. از دیگر اساتید بزرگواری که در محضرشان کسب علم و تجربه کردم خصوصا آقای دکتر اقدامی و آقای دکتر نصرآبادی که داوری پایان نامه ام را نیز بر عهده داشتند تشکر وافر دارم.

رادیکال ایده‌ال‌های به طور تصویری کامل در حلقه‌های توسیعی صحیح

چکیده

فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی، نوتری و یکدار باشد و I را یک ایده‌ال سره‌ی منظم از آن در نظر می‌گیریم. سؤال اصلی مطرح شده در این پایان‌نامه این است که آیا یک توسیع صحیح متناهی A ازحلقه‌ی R موجود است که برای آن، رادیکال پوچ IA، ایده‌ال به طور تصویری کاملی باشد که هم ارز تصویری با خود IA شود؟ یک سؤال مرتبط و قویتری که مطرح می‌شود این است که آیا یک توسیع صحیح متناهی از حلقه R مانند A وجود دارد که برای آن رادیکال ایده‌ال پوچی مانند J از IA، هم ارز تصویری با خود IA بوده و تمام اعداد صحیح ریس J برابر یک باشند؟ دو نتیجه جالب به عنوان حالت خاصی از قضیه‌های اصلی موجود در پایان-نامه حاصل می‌شود. نتیجه اول این که اگر R یک حوزه صحیح نوتری باشد، آن گاه توسیع صحیحی از R مانند A موجود است به طوری که رادیکال ایده‌ال پوچ IA هم ارز تصویری با IA شود. نتیجه دوم عبارت از این که اگر R شامل یک میدان با مشخصه صفر باشد، آن گاه یک توسیع صحیح آزاد متناهی A از حلقه R موجود است که برای آن، رادیکال ایده‌ال پوچ IA یک ایده‌ال به طور تصویری کاملی است که هم ارز تصویری با IA شود.

واژه‌های کلیدی: *ایده‌ال‌های به طور صحیح بسته، ایده‌ال به طور تصویری کامل، ایده‌ال‌های به طور تصویری هم ارز، حلقه‌های ارزیابی ریس یک ایده‌ال، اعداد صحیح ریس، توسیع صحیح متناهی*

فهرست مطالب

پیشگفتار

مفهوم هم ارزی تصویری بین ایده‌ال‌ها و مطالعه در مورد ایده ال‌های به طور تصویری هم ارز، ابتدا توسط پیر ساموئل[۱] در سال ۱۹۵۱ در مقاله‌ای تحت عنوان

$''Some\ asymptotic\ properties\ of\ powers\ of\ ideals''$

مطرح شد و سپس توسط ناگاتا[۲] مورد گسترش قرار گرفت.

با معرفی شدن مفهوم ارزیابی ریس، ارتباط بین این دو مفهوم قوت گرفت. کارهای جالب ریس[۳]، در [۱۱]، مک آدام،[۴] راتلیف[۵] و سالی[۶] در [۶]، منجر به تعریف مفهوم جدیدی با عنوان ایده ال‌های به طور تصویری کامل گشت.

مقاله‌های زیادی تحت عنوان هم ارزی تصویری، در بین سال‌های ۱۹۵۱ تا به حال، در مجلات معتبر مختلفی منتشر شده‌اند. از جمله کارهایی که جدیداً در سه چهار سال اخیر توسط ویلیام جی. هینزر[۷]، لویس جی. راتلیف و دیوید ای.

[۱] P. Samuel

[۲] M. Nagata

[۳] D. Rees

[۴] S. McAdam

[۵] L. J. Ratlif

[۶] J.D. Sally

[۷] W.J. Heinzer

راش[8] چاپ شده‌اند، تماماً به موضوع ایده‌ال‌های به طور تصویری هم ارز و ارتباط آن‌ها با حلقه‌های ارزیابی ریس در یک حلقه نوتری پرداخته است. پایان‌نامه حاضر که تحت عنوان «رادیکال ایده ال‌های به طور تصویری کامل در حلقه‌های توسیعی صحیح» مشاهده می‌کنید حاصل کاری است که روی مقاله‌ای با همین عنوان انجام شده است و در سه فصل به صورت زیر تنظیم گردیده است.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی لازم از جمله دو مفهوم مهم حلقه کسرها و بستار صحیح ایده‌ال‌ها و حلقه‌ها مطرح شده و بعضی از خواص مربوط به بستار صحیح که در این پایان‌نامه کاربرد فراوان داشته‌اند یاد آوری گردیده است.

فصل دوم، مشتمل بر هفت بخش است. در بخش اول تا چهارم مفاهیم ارزیابی، حلقه ارزیابی، جبر ریس و حلقه ارزیابی ریس بیان شده‌اند و در بخش پنجم و ششم ارتباط بین حلقه‌های ارزیابی ریس و ایده‌ال‌های به طور تصویری هم ارز با یک ایده‌ال منظم دلخواه I از یک حلقه نوتری R مشخص شده است. در پایان این فصل نیز مطالبی در خصوص توسیع میدان و حلقه آورده شده است.که برای فهمیدن مطالب اصلی پایان‌نامه که در فصل سوم می‌آیند ضروری به نظر رسیده‌اند.

اما فصل سوم که مباحث اصلی پایان‌نامه در آن گنجانده شده، از دو بخش تشکیل شده است. در بخش اول اطلاعات و مفاهیمی مطرح شده‌اند که به واسطه‌ی آن‌ها قضیه زیر اثبات گردد.

قضیه : فرض کنید m عدد صحیحی باشد که $m \geq max(\{e_i | i = ۱, ..., n\})$. در این صورت

۱. $I_{(\frac{۱}{m})} = Rad(I)$،

[8] D.E. Rash

۲. برای تمام اعداد صحیح مثبت k، $({J_m}^k)_a \cap R = I_{(\frac{k}{m})}$،

۳. J_m هم ارز تصویری با IA_m است، $(J_m)_a = Rad(J_m)$ و $A_m \diagup (J_m)_a \cong R \diagup Rad(I)$،

۴. فرض کنید R، یک حوزه‌ی صحیح باشد و z یک ایده‌ال اول مینیمال در A_m، در این صورت $((J_m+z)\diagup z)_a$ رادیکال ایده‌الی است که، هم ارز تصویری با $(IA_m+z)\diagup z$ بوده و برای تمام اعداد صحیح مثبت k، $(((J_m+z)\diagup z)^k)_a \cap R = I_{\frac{k}{m}}$.

و در بخش دوم، قضایا و مفاهیمی مطرح گردیده‌اند که به کمک آن‌ها هدف اصلی پایان‌نامه که اثبات قضیه زیر است فراهم می‌گردد.

قضیه : فرض کنید I یک ایده‌ال سره منظم در یک حلقه نوتری R باشد و $b_1, ..., b_g$ عناصر منظمی باشند که I را تولید می‌کنند. $(V_1, N_1), ..., (V_n, N_n)$ حلقه‌های ارزیابی ریس I هستند که برای $i = 1, ..., g$ و $j = 1, ..., n$، $b_iV_j = IV_j(= N_j^{e_j})$ و e که ک.م.م $e_1, ..., e_n$ است در R یکه باشد. حال m را مضرب مثبتی از e در نظر می‌گیریم که در R یکه است. با نمادگذاری‌های ۴.۴.۲ قرار می‌دهیم، $A_m = R[x_1, ..., x_g]$ و $J_m = (x_1, ..., x_g)A_m$. فرض کنید $A = A_m$ و $J = J_m$. در این صورت

۱. A یک توسیع صحیح آزاد از حلقه R است، $J_a = Rad(IA)$ یک رادیکال ایده‌ال به طور تصویری کاملی است که هم ارز تصویری با IA است یعنی $(IA)_a = (J^m)_a$ و برای حلقه ارزیابی ریس U از J و برای $i = 1, ..., g$،

$JU = x_iU$ ایده‌ال ماکسیمال U است. سپس نتیجه بگیرید اعداد ریس J همگی برابر یک‌اند.

۲. فرض کنید R یک حوزه نوتری باشد، z یک ایده‌ال اول مینیمال در A و فرض کنید $\bar{A} = \frac{A}{z} = R[b_1^{\frac{1}{m}}, ..., b_g^{\frac{1}{m}}]$ و $\bar{J} = \frac{J}{z} = (b_1^{\frac{1}{m}}, ..., b_g^{\frac{1}{m}})\bar{A}$ در این صورت $\bar{A}$ یک حوزه صحیح نوتری است که توسیع صحیح و متناهی از حلقه R است، $Rad(I\bar{A}) = \bar{J}_a$ یک رادیکال ایده‌ال به طور تصویری کاملی است که هم ارز تصویری با $I\bar{A}$ است یعنی $(I\bar{A})_a = (\bar{J}^m)_a$ و اعداد صحیح ریس $\bar{J}$ همگی برابر یک می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ پیش نیازها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد. در این صورت زیرمجموعه‌ی S از R، بسته ضربی نامیده می‌شود هرگاه

۱. $1 \in S$،

۲. اگر $a, b \in S$ آن گاه $ab \in S$.

مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی S را یک $m.c.s$ از R نیز می‌نامیم.

مثال ۲.۱.۱. P را یک ایده‌ال اول از حلقه‌ی R در نظر می‌گیریم. پس $P \neq R$ و لذا $1 \in S = R \setminus P$. حال فرض کنید $x, y \in S = R \setminus P$ در این صورت $x, y \notin P$ و چون P اول است، $xy \notin P$، پس $xy \in R \setminus P = S$ و در نتیجه S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R است.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید S یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از یک حلقه‌ی R باشد. در این صورت ایده‌ال P از R را نسبت به S ماکسیمال گویند هرگاه $P \cap S = \varnothing$ و هر ایده‌ال از R که به طور سره شامل P است، S را قطع کند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید I یک ایده‌ال از حلقه‌ی R باشد. در این صورت ایده‌ال اول P از R را یک مقسوم علیه اول مینیمال از I می‌نامند هرگاه P در بین تمام ایده‌ال‌های اول شامل I، مینیمال باشد.

تعریف ۵.۱.۱. یک ایده‌ال Q از حلقه‌ی R $(Q \neq R)$ اولیه نامیده می‌شود اگر هر مقسوم علیه صفر R/Q پوچ توان باشد و یا به طور معادل اگر $a \notin Q$، آن گاه $ab \in Q$ ایجاب کند که به ازای nای، $b^n \in Q$.

اگر Pایده‌ال اولی از R باشد به طوری که $Rad(Q) = P$، آن گاه ایده‌ال Q از R را یک ایده‌ال P-اولیه از R می‌نامند.

مثال ۶.۱.۱. هر ایده‌ال اول P (ماکسیمال M) اولیه است. اگر M یک ایده‌ال ماکسیمال باشد هر توان طبیعی از M یک ایده‌ال M-اولیه است.

تعریف ۷.۱.۱. اشتراک تمام ایده‌ال‌های ماکسیمال حلقه R را رادیکال جیکوبسن R می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $(V, \preccurlyeq)$ مجموعه‌ای ناتهی و به طور جزئی مرتب باشد.

۱. می‌گوییم که $(V, \preccurlyeq)$ در شرط زنجیر صعودی صدق می‌کند اگر به ازای هر خانواده‌ای از عناصر V مانند $\{v_i\}_{i \in N}$ با ویژگی

$$v_۱ \preccurlyeq v_۲ \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq v_i \preccurlyeq v_{i+۱} \preccurlyeq \ldots$$

عددی طبیعی مانند k موجود باشد که به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$v_k = v_{k+i}.$$

۲. می‌گوییم $(V, \preccurlyeq)$ در شرط ماکسیمال صدق می‌کند اگر هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از V شامل عضوی ماکسیمال (نسبت به $\preccurlyeq$) باشد.

با استفاده از لم زیر نشان داده می‌شود که دو شرط بالا هم ارزند.

لم ۹.۱.۱. *فرض کنید $(V, \preccurlyeq)$ مجموعه‌ای ناتهی و به طور جزئی مرتب باشد. در این صورت $(V, \preccurlyeq)$ در شرط زنجیر صعودی صدق می‌کند اگر و تنها اگر در شرط ماکسیمال صدق کند.*

اثبات. به [۱۵] صفحه ۵۵ رجوع شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱. R حلقه‌ای تعویض‌پذیر است. مجموعه‌ی ایده‌ال‌های R را با نماد I_R نمایش می‌دهیم. گوییم R نوتری است اگر مجموعه‌ی به طور جزئی مرتب $(I_R, \subseteq)$ در یکی از شرایط تعریف ۸.۱.۱ صدق کند.

یا به عبارتی R نوتری است اگر و تنها اگر هر زنجیر صعودی از ایده‌ال‌های R تحت رابطه شمولیت به صورت

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \ldots$$

ایستا باشد و این وقتی ممکن است که هر مجموعه‌ی ناتهی از ایده‌ال‌های R نسبت به رابطه شمولیت، عضو ماکسیمال داشته باشد.

قضیه ۱۱.۱.۱. *حلقه‌ی R نوتری است اگر و فقط اگر هر ایده ال اول از R دارای یک پایه متناهی باشد.*

اثبات. به [۱۵] صفحه ۱۶۶ رجوع شود. □

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید R و W حلقه‌هایی تعویض‌پذیر و $f : R \longrightarrow W$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت

۱. اگر J ایده‌الی از W باشد، آن گاه $f^{-1}(J) = \{r \in R : f(r) \in J\}$ ایده‌الی از R است که آن را تحدید[1] J تحت همریختی حلقه‌ای فوق می‌نامند و گاهی به صورت J^c نمایش می‌دهند.

۲. به ازای هر ایده‌ال I از R ایده‌ال $f(I)W$ (ایده‌ال تولید شده توسط $f(I)$ در W) را توسیع[2] I تحت همریختی حلقه‌ای بالا می‌نامند و گاهی هم به صورت

[1] contraction

[2] extention

I^e نمایش می‌دهند.

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنید I_1 و I_2 ایده‌ال‌هایی از R و J_1 و J_2 ایده‌ال‌هایی از W باشند و $f : R \longrightarrow W$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند.*

۱. $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$،

۲. $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$،

۳. $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$،

۴. $(\sqrt{J_1})^c = \sqrt{(J_1^c)}$.

اثبات. به [۱۵] صفحه ۴۰ رجوع شود. $\square$

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنید I ایده‌الی از R و J ایده‌الی از W و $f : R \longrightarrow W$ یک همریختی حلقه‌ای باشد در این صورت داریم*

۱. $I \subseteq I^{ec}$،

۲. $J^{ce} \subseteq J$،

۳. $I^e = I^{ece}$،

۴. $J^{cec} = J^c$،

هم چنین اگر S زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد و قرار دهیم $W = S^{-1}R$ داریم.

۵. $(\sqrt{I})^e = \sqrt{(I^e)}$.

اثبات. به [۱۵] صفحه ۴۰ و ۱۰۴ رجوع شود. $\square$

تعریف ۱۵.۱.۱. حلقه R را نیمه موضعی می‌نامیم اگر تنها دارای تعدادی متناهی ایده‌ال ماکسیمال باشد. اگر R حلقه‌ای نیمه موضعی و $M_1, ..., M_r$ ایده‌ال‌های ماکسیمال آن باشند این حلقه را به صورت $(R, M_1, ..., M_r)$ نمایش می‌دهیم.

چنانچه حلقه R فقط یک ایده‌ال ماکسیمال مانند M داشته باشد این حلقه را موضعی می‌نامند و به صورت (R, M) نمایش می‌دهند.

مثال ۱۶.۱.۱. هر میدان یک حلقه موضعی است زیرا ایده‌ال $\{0\}$ تنها ایده‌ال ماکسیمال میدان است.

۲.۱ حلقه کسرها

فرض کنید S زیر مجموعه‌ی بسته ضربی از حلقه تعویض‌پذیر R باشد. رابطه $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به ازای $(a, s), (b, t) \in R \times S$

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u \in S : u(ta - sb) = 0$$

در این صورت $\sim$ رابطه‌ای هم ارزی روی $R \times S$ است.

به ازای $(a, s) \in R \times S$، کلاس هم ارزی شامل (a, s) را با a/s و مجموعه‌ی کلاس‌های هم ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ یا R_S نمایش می‌دهیم. در این صورت $S^{-1}R$ تحت عمل‌های

$$(a/s)(b/t) = (ab)/(st), \qquad a/s + b/t = (at + bs)/(st)$$

به ازای a و b های متعلق به R و t و s های متعلق به S، حلقه‌ای تعویض‌پذیر است که به حلقه کسرهای R نسبت به S معروف است. عضو صفر این حلقه $۱/۰$ و عنصر همانی آن $۱/۱$ می‌باشد.

یک همریختی حلقه‌ای چون $f: R \longrightarrow R_S$ با ضابطه نگاشت $f(r) = r/۱$ وجود دارد که آن را همریختی حلقه‌ای طبیعی می‌نامیم.

حال چنانچه S، مکمل یک ایده‌ال اول P باشد از نمادی متفاوت با نماد بالا استفاده می‌کنیم و آن را به صورت R_p نمایش می‌دهیم که حلقه کسرهای R نسبت به P نامیده می‌شود. این حلقه یک حلقه موضعی با ایده‌ال ماکسیمال

$$\{\frac{a}{s} | a \in P, s \in S\}$$

است. این حلقه را حلقه حاصل از موضعی سازی R در P می‌نامند.

توجه شود که

۱. اگر I یک زیر مجموعه از R باشد، آن گاه ایده‌ال R_S تولید شده بوسیله $f(I)$ را با نماد IR_S نمایش می‌دهند که همان I^e است.

۲. اگر J یک ایده‌ال از R_S باشد، آن گاه منظور از $J \cap R$ همان ایده‌ال

$$f^{-۱}(J) = f^{-۱}(J \cap f(R))$$

از R می‌باشد که قبلا به صورت J^c نمایش داده بودیم.

قضیه ۱.۲.۱. *I را یک ایده‌ال از R و S را یک زیر مجموعه بسته ضربی از R در نظر بگیرید به طوری که $I \cap S = \varnothing$. حال فرض کنید f یک همریختی طبیعی از R به توی R/I باشد. در این صورت*

$$f(R)_{f(S)} = R_S / IR_S.$$

اثبات. به [۱۵] صفحه ۱۱۱ رجوع شود. $\square$

از قضیه فوق نتیجه می‌گیریم که اگر P ایده‌ال اولی از R و $I \subseteq P$ باشد، آن گاه P/I ایده‌ال اولی از R/I بوده و

$$(R/I)_{P/I} \cong R_P / IR_P.$$

هم چنین با رعایت نمادگذاری‌های بالا فرض کنید P یک ایده‌ال اول از R باشد. در این صورت $PS^{-1}R$ ایده‌ال اولی از $S^{-1}R$ بوده و

$$(S^{-1}R)_{PS^{-1}R} \cong R_P.$$

قضیه ۲.۲.۱. *فرض کنید J یک ایده‌ال از R_S باشد. در این صورت $J = (J \cap R)R_S$ یا به عبارتی $(J^c)^e = J$.*

اثبات. به [۸] صفحه ۱۶ رجوع شود. $\square$

نتیجه ۳.۲.۱. *اگر R نوتری باشد R_S هم نوتری است.*

اثبات. به [۸] صفحه ۱۵ رجوع شود. $\square$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید P یک ایده‌ال اول از حلقه تعویض‌پذیر R بوده، $S = R \setminus P$ زیر مجموعه بسته ضربی از آن و $f : R \longrightarrow R_P$ یک همریختی حلقه‌ای طبیعی از R بروی R_P باشد. در این صورت برای $n \in \mathbb{N}$، توان نمادین n ام P را با $P^{(n)}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P^{(n)} = (P^n)^{ec}$$

که e و c نمادهای مربوط به توسیع و تحدید ایده‌ال‌ها می‌باشند که در۱. ۱. ۸ تعریف شده بودند.

لم ۵.۲.۱. *فرض کنید P یک ایده‌ال اول از حلقه تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت برای $n \in \mathbb{N}$، $P^{(n)}$ ایده‌الی P-اولیه از R است.*

اثبات . R_P حلقه‌ای موضعی با ایده‌ال ماکسیمال منحصر به فرد $PR_P = P^e$ است. حال بنا به قسمت ۲ قضیه ۱۳.۱.۱ داریم $(P^n)^{ec} = ((P^e)^n)^c$. از طرفی چون P^e ایده‌الی ماکسیمال در R_P است نتیجه می‌شود که $(P^e)^n$ ایده‌الی P^e-اولیه از R_P است و چون $P^{ec} = P$ نتیجه می‌شود که $((P^e)^n)^c$ ایده‌الی P-اولیه از R می‌-باشد. $\square$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید R یک حوزه‌ی صحیح و $S = R \setminus \{0\}$ زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این صورت $S^{-1}R$، میدان کسرهای حوزه‌ی صحیح R نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. عنصر r از یک حلقه‌ی دلخواه R را منظم گویند هرگاه مقسوم علیه صفر نباشد.

ایده‌ال I از حلقه‌ی R را منظم می‌نامیم هرگاه حداقل یک عنصر منظم داشته باشد.

تعریف ۸.۲.۱. یک ایده‌ال J در R کاهش یافته‌ی I نامیده می‌شود در صورتی که $J \subseteq I$ و برای $n \in \mathbb{N}$ ای، $JI^n = I^{n+1}$.