??????

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

روش‌های آنالیز مختلط برای حل مسائل مقدار مرزی-اولیه شامل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه اول و دوم ناهمگن

استاد راهنما
دکتر محمد جهانشاهی

پژوهشگر
زینب پورعلی

دی / ۱۳۹۰
تبریز / ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

و به پاس محبت های بی دریغ شان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می کنم.

سپاس‌گزاری...

خدایا، به من زیستنی عطا کن که در لحظه‌ی مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آن‌چنان که تو دوست می‌داری.
به مصداق "من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق" بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه، جناب آقای دکتر محمد جهانشاهی که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند، تقدیر و تشکر نمایم. هم‌چنین از آقایان دکتر ناصر آقازاده و دکتر علی خانی سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده‌اند و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

هم‌چنین لازم است مراتب تشکر و قدردانی خود را از خانواده‌ام که در طی مراحل مختلف تحصیل یار و یاور من بوده‌اند، ابراز نمایم.

زینب پورعلی

دی ۱۳۹۰

فهرست مطالب

چکیده

اعراب. – ۲۳ – ۵ – ۲۳۴ – ۱ – ۲ – ۱۱}

در ابتدا به مفاهیم اساسی و تعاریف اولیه پرداخته و سپس مسئله مقدار مرزی-اولیه شامل معادله موج ناهمگن با شرایط مرزی غیر کلاسیک که در یک حالت مقادیر ویژه مسئله اسپکترال حاصل تکراری و در حالت بعدی مقادیر ویژه مسئله اسپکترال مختلط است، می‌پردازیم و در آخر مسائل مقدار مرزی، شامل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه اول و دوم ناهمگن را بررسی می‌کنیم که این روش بر اساس روش‌های آنالیز مختلط می‌باشد. ابتدا قضیه فرم نمایشی کوشی-پمپیه را برای توابع تحلیلی آورده و سپس با استفاده از این قضیه، جواب‌های مسائل مقدار مرزی دیریکله، نویمان و شوارتز را با شرایط مرزی موضعی به‌دست می‌آوریم. در نهایت جواب‌های معادله دیفرانسیل لاپلاس ناهمگن(پواسون) با شرایط مرزی کلاسیک، دیریکله و نویمان، را با یک شرط حل‌پذیری به‌دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: مسئله مقدار مرزی-اولیه، تابع تعمیم یافته، جواب اساسی، معادله موج، فرم نمایشی انتگرال، مسئله مقدار مرزی شوارتز، مسئله مقدار مرزی دیریکله، مسئله مقدار مرزی نویمان.

پیشگفتار

نظریه مسائل مقدار مرزی و مسائل مقدار اولیه شامل معادلات دیفرانسیل از مباحث مهم ریاضیات کاربردی و فیزیک و مهندسی می‌باشند. این مسائل به‌طور کلی انگیزه‌ها و خواستگاه‌های فیزیک و مهندسی داشته‌اند. بدین خاطر از طرف ریاضیدانان و فیزیکدانان و مهندسان روش‌های مختلفی، هم برای اثبات وجود و یگانگی جواب‌های مسائل فوق و هم برای رسیدن به جواب‌های تحلیلی و تقریبی این مسائل ارائه شده است.

در این پایان‌نامه ما در فصل نخست به ارائه مفاهیم اساسی و مقدماتی و تعاریف اولیه در خصوص معادلات دیفرانسیل و جواب‌های کلاسیک[۱] و تعمیم‌یافته[۲] می‌پردازیم . و در ادامه به مقایسه و تحلیل جواب‌های تعمیم‌یافته و با مقدمه‌ای از توابع آزمون و فضای توابع اساسی[۳] به کالکولوس(مشتق) این توابع می‌پردازیم.

در فصل دوم به معادلات ناهمگن ریاضی فیزیک از جمله معادله موج[۴] و نحوه ظاهر شدن آن در پدیده‌های فیزیکی پرداخته و این معادله را در حالت‌های غیرکلاسیک که دارای شرایط مرزی غیرموضعی[۵] و مقادیر ویژه[۶] مسئله اسپکترال، تکراری و مختلط هستند، می‌پردازیم. و در ادامه به محاسبه جواب‌های صوری و استدلال وجود این جواب و همگرایی سری‌های جواب می‌پردازیم.

در فصل سوم به معادله مرتبه اول کوشی-ریمان[۷] و معادله مرتبه دوم لاپلاس[۸] با روش‌های

[۱] Classical solutions
[۲] Generalized
[۳] Fundamental functions
[۴] Wave equation
[۵] Non-local boundary condition
[۶] Eigenvalues
[۷] Cauchy-Riemann
[۸] Laplace

آنالیز مختلط می‌پردازیم. از آن‌جا که روش‌های آنالیز مختلط نسبت به روش‌های جاری کلاسیک(روش جداسازی متغیرها و روش پتانسیل‌ها) مدرن‌تر و پیشرفته‌تر است، لذا در این فصل به محاسبه جواب‌های تحلیلی مسائل مقدار مرزی شامل معادلات کوشی-ریمان و لاپلاس ناهمگن پرداخته و در کنار ارائه جواب تحلیلی به شرط‌های حل‌پذیری این مسائل نیز می‌پردازیم.

این پایان‌نامه بیشتر بر اساس منابع [۹] ،[۵]، [۶] و [۱۵] می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی

معادله دیفرانسیل پاره‌ای یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که به اختصار PDE خوانده می‌شود، به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل گفته می‌شود که در آن‌ها توابع مجهول برحسب چند متغیر مستقل، به همراه مشتق پاره‌ای توابع نسبت به آن متغیرها شرکت داشته باشد.

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در موارد زیر ظاهر می‌شود:

۱. حذف تابع‌های اختیاری از منحنی‌ها و رویه‌های پارامتری.

۲. مدل ریاضی مسائل فیزیک در مهندسی.

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{yy}, \ldots) = ۰.$$

ملاحظه می‌کنیم که این معادله، شامل متغیرهای مستقل مانند y, x و متغیر وابسته u و مشتقات نسبی متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل y, x است، که به‌صورت u_{yy} و u_{xx} نمایش داده شده‌اند.

تعریف ۱.۱.۱. **مرتبه** یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی، بالاترین مشتق موجود در معادله است.

مثال ۱.۱.۱. *معادلات*

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

$$u_t - ku_{xx} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad c \in \mathbb{N}$$

که به ترتیب به معادله لاپلاس، انتشار حرارت و انتشار موج معروف‌اند، معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات نسبی مرتبه دوم هستند.

تعریف ۲.۱.۱. **معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم دو متغیره**، معادله‌ای است به فرم

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \tag{1.1}$$

که در آن ضرایب f, e, d, c, b, a و g می‌توانند ثابت یا توابعی معلوم از x و y باشند و

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

تعریف ۳.۱.۱. معادله‌ی(۱.۱) را برحسب این‌که مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ در تمام دامنه G مثبت، صفر یا منفی باشد به ترتیب **هذلولی** ، **سهموی** و **بیضوی** می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. مسئله **مقدار مرزی** عبارت است از یک معادله دیفرانسیل، به همراه یک یا چند شرط مرزی. یک جواب مسئله مقدار مرزی جوابی از معادله مذکور است که در شرایط مرزی صدق کند.

مثال ۲.۱.۱. *مسئله*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad x, y \in G$$

$$u(x, y) = f(x, y) \qquad x, y \in \Gamma$$

یک مسئله مقدار مرزی است، که در آن G نمایانگر دامنه و Γ مرز دامنه است.

تعریف ۵.۱.۱. مسئله **مقدار اولیه**، شامل یک معادله دیفرانسیل به همراه یک یا چند شرط اولیه است و هدف آن به‌دست آوردن تابعی است که در معادله دیفرانسیل و شرط‌های اولیه مربوطه صدق کند. شرط‌های اولیه، شرط‌های کوشی نیز نامیده می‌شوند.

مثال ۳.۱.۱. *مسئله*

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - c^{2} u_{xx} = 0 \qquad && t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\
&u(x, 0) = f(x) && \\
&u_t(x, 0) = g(x) &&
\end{aligned}
$$

یک مسئله مقدار اولیه می‌باشد.

تعریف ۶.۱.۱. اگر معادله دیفرانسیل به همراه یک یا چند شرط مرزی و اولیه به‌طور هم‌زمان باشد، مسئله را یک مسئله **مقدار مرزی - اولیه** می‌نامیم.

مثال ۴.۱.۱. *مسئله*

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - c^{2} u_{xx} = 0 \qquad && 0 < x < l, \quad t > 0 \\
&u(x, 0) = f(x) && 0 \le x \le l \\
&u_t(x, 0) = g(x) && 0 \le x \le l \\
&u(0, t) = u(l, t) = 0 && t \ge 0
\end{aligned}
$$

یک مسئله مقدار مرزی - اولیه می‌باشد.

مدل ریاضی خیلی از مسائل فیزیک و مهندسی که وابسته به زمان هستند، به‌صورت مسائل مقدار اولیه ظاهر می‌شود و در مقابل مسائل فیزیک و مهندسی که مستقل از زمان هستند، به‌صورت مسائل مقدار مرزی در می‌آیند. در این میان مسائل فیزیک و مهندسی که در قالب زمان و مکان مطرح می‌شوند، یعنی هم متغیرهای مکان و هم متغیرهای زمان در آن دخالت دارند، به‌صورت مسائل مقدار مرزی–اولیه در می‌آیند.

مسائل مقدار اولیه می‌توانند از نوع سهموی و هذلولی باشند، ولی مسائل مقدار مرزی به معادلات از نوع بیضوی مربوط می‌شوند.

تعریف ۷.۱.۱. یک مسئله **خوش‌طرح**، معادله دیفرانسیل پاره‌ای به همراه یک مجموعه از شرط های مرزی یا اولیه یا هر دو است که در خواص زیر صدق کند:

۱. **وجود** : حداقل یک جواب وجود داشته باشد.

۲. **یگانگی** : حداکثر یک جواب وجود داشته باشد.

۳. **پیوستگی** : جواب به ازای داده‌های مسئله به‌طور پیوسته تغییر کند.

برای مسئله‌های فیزیکی تنها اطمینان از وجود یک جواب منحصر بفرد کافی نیست. بنابراین شرط پیوستگی جواب، اساسی است. زیرا معمولا داده‌ها در مسئله‌های فیزیکی از راه آزمایش و تجربه به‌دست می‌آیند، و در این میان خطاهایی چون خطای ابزاری، خطای محاسباتی و تقریب زدن و ... موجودند و برقراری شرط پیوستگی، باعث می‌گردد که به‌کارگیری تقریب در داده‌ها، تنها تغییر جزئی در جواب مسئله را باعث گردد.

قضیه ۱.۱.۱. [۱] (***قضیه کوشی-کوالوسکی***) [1] : *فرض کنید معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی*

$$u_{yy} = F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 y}, \ldots, u_{x_n y}, u_{x_{11}}, \ldots, u_{x_{nn}})$$

همراه با شرایط اولیه‌ی

$$u = f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$u_y = g(x_1, \ldots, x_n)$$

داده شده باشد. اگر تابع F در همسایگی نقطه‌ی $(y^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, u^\circ, u_y^\circ)$ و f و g در همسایگی نقطه‌ی $(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ تحلیلی باشند، آن‌گاه مسئله مقدار اولیه در همسایگی نقطه‌ی $(y^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ)$ جواب یگانه دارد.

۲.۱ فضای توابع اساسی و تعمیم یافته

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $f \in C(\mathbb{R}^n)$ یک تابع پیوسته باشد. **تکیه‌گاه**($support$) f چون که به‌صورت $supp f$ نشان داده می‌شود، عبارت است از بستار مجموعه تمام نقاط x به‌طوری‌که $f(x) \neq 0$.

[1] Cauchy-Kowalewsky

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز باشد. تابع f در E متناهی است، هرگاه $suppf \subseteq E$. مجموعه‌ای از توابع متناهی در E از کلاس $C^k(E)$ با نماد $C^k_\circ(E)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $\alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n)$، برداری با مؤلفه‌های صحیح نامنفی α_j باشد. مشتق تابع $\varphi(x)$ از مرتبه $|\alpha| = \alpha_۱ + \alpha_۲ + \dots + \alpha_n$ را که با $D^\alpha\varphi(x)$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x_۱, x_۲, \dots, x_n)}{\partial x_۱^{\alpha_۱}\partial x_۲^{\alpha_۲}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad , D^\circ\varphi(x) = \varphi(x).$$

تعریف ۴.۲.۱. مجموعه‌ی توابع اساسی که با $D = D(\mathbb{R}^n)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از تمامی توابع متناهی،که در $\mathbb{R}^n$ بی‌نهایت بار مشتق پذیر باشد.

همگرایی در این مجموعه را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
دنباله $\{\varphi_k\}_{k=۱}^\infty$ از D را در نظر می‌گیریم. گوییم این دنباله به تابع $\varphi \in D$ همگراست هرگاه:

۱. ثابت مثبتی چون R موجود باشد، به‌طوریکه $supp\varphi_k \subseteq U_R$. که U_R گوی باز به مرکز مبدا مختصات و به شعاع R می‌باشد.

۲. برای هر $\alpha = (\alpha_۱, \dots, \alpha_n)$ داشته باشیم :

$$D^\alpha\varphi_k(x) = D^\alpha\varphi(x) \qquad k \to \infty \ , \ x \in \mathbb{R}^n$$

در این‌صورت می‌نویسیم $\varphi_k \to \varphi$.

مجموعه D را که مجهز به همگرایی فوق باشد با $D(\mathbb{R}^n)$ نشان داده و فضای توابع اساسی نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. یک تابعک خطی پیوسته روی فضای توابع اساسی، تابع تعمیم یافته نامیده می‌شود. که مقدار تابعک f (تابع تعمیم یافته) روی تابع اساسی φ با (f, φ) نمایش داده می‌شود.

مجموعه توابع تعمیم یافته را با $D' = D'(\mathbb{R}^n)$ نشان می‌دهیم. همگرایی روی این مجموعه، به‌صورت همگرایی ضعیف تابعک‌ها، مطابق زیر تعریف می‌گردد.

دنباله توابع تعمیم یافته $f_۱, f_۲, \dots$ همگرا به $f \in D'$ گوئیم، هرگاه

$$\lim_{k\to\infty}(f_k, \varphi) = (f, \varphi) \qquad k \to \infty\ ,\ \varphi \in D.$$

مجموعه‌ی D' که مجهز به همگرایی فوق باشد، فضای توابع تعمیم یافته نامیده می‌شود. بنابراین تابع تعمیم یافته f :

۱. یک تابعک روی D است. یعنی برای هر $\varphi \in D$ عدد (f, φ) را متناظر می‌کند.

۲. یک تابعک خطی روی D است. یعنی

$$\forall \varphi, \psi \in D \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad (f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

۳. یک تابعک پیوسته روی D است. یعنی

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty}(f, \varphi_k) = ۰$$

تذکر ۱.۲.۱. دنباله‌ای از عناصر $x_۱, x_۲, \dots$ از یک فضای توپولوژیک X به‌طور ضعیف همگراست، اگر دنباله $f(x_۱), f(x_۲), \dots$ به ازای هر تابعک خطی پیوسته f بر X همگرا باشد.

تعریف ۶.۲.۱. توابع تعمیم یافته g و f در $\mathbb{R}^n$ مساوی است، هرگاه تابعک‌های مساوی روی D' باشند. یعنی

$$\forall\ \varphi \in D \qquad (f, \varphi) = (g, \varphi).$$

هم‌چنین تابع تعمیم یافته $f \in D'$، تابع صفر نامیده می‌شود، هرگاه

$$\forall\ \varphi \in D \qquad (f, \varphi) = ۰.$$

تعریف ۷.۲.۱. توابع تعمیم یافته به دو نوع اساسی **منظم** و **منفرد** تقسیم می‌شود.

ساده‌ترین مثال برای تابع تعمیم یافته، تابعکی است که توسط تابع موضعا انتگرال‌پذیر $f(x)$ در $\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تولید می‌گردد:

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx \qquad \varphi \in D.$$

تابع تعمیم یافته‌ای را که مطابق فوق تعریف گردد، تابع تعمیم یافته منظم و در غیر این‌صورت تابع تعمیم یافته منفرد گوییم.

تذکر۱.۲.۲. تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر موضعی روی ناحیه‌ی $G \subseteq \mathbb{R}^n$ گفته می‌شود، هرگاه f تابعی انتگرال‌پذیر روی هر ناحیه کراندار E باشد که در آن $\overline{E} \subset G$ ($\overline{E}$ بستار مجموعه‌ی E است).

مثال ۱.۲.۱. *ساده‌ترین مثال برای تابع تعمیم یافته منفرد، تابع دلتای دیراک است که اثر آن روی تابع $\varphi \in D$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$(\delta, \varphi) = \varphi(\circ) \qquad \varphi \in D.$$

تعریف ۱.۲.۸. **تابع دلتای دیراک** که یک تابع تعمیم یافته منفرد است، اولین بار توسط فیزیکدان انگلیسی، پاول دیراک [۲] مطرح و به نام او نام‌گذاری گردید.

فرض کنید دنباله‌ی $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$، دنباله‌ی توابع اساسی با تکیه‌گاه فشرده و با خواص زیر باشد:

$$\int_R \varphi_k(x) = 1 \qquad \varphi_k \in C_\circ^\infty$$

تابع دلتای دیراک را می‌توان حد این توابع خوب(هموار و متناهی) دانست.یک ضابطه برای این توابع خوب، تابع $b(x,\varepsilon)$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b(x,\varepsilon) = \begin{cases} \circ & |x| > \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$lim_{\varepsilon \to \circ} b(x,\varepsilon) = \delta(x) = \begin{cases} \circ & x \neq \circ \\ \infty & x = \circ \end{cases}$$

از خواص تابع دلتای دیراک می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

.۱

$$\int_R \delta(x-t) f(t) dt = f(x)$$

که f تابع اختیاری و پیوسته در $\mathbb{R}$ است.

[۲] Paul Dirac

۲. تابع دلتای دیراک یک تابع زوج است. یعنی

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \delta(-t) = \delta(t)$$

۳. اگر تابع $f(x)$ تابعی پیوسته در $[a,b]$ باشد، آن‌گاه

$$\int_a^b f(t)\delta(x-t)dt = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ \frac{1}{2}f(x) & x=a \text{ یا } x=b \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۹. تابع هویساید[۳] به دو صورت معمولی و متقارن تعریف می‌شود، که شکل معمولی آن به‌صورت

$$e(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \geqslant 0 \\ \\ \frac{-1}{2} & x < 0 \end{cases}$$

و شکل متقارن آن به‌صورت

$$\theta(x-t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x > t \\ 0 & x = t \\ \frac{-1}{2} & x < t \end{cases}$$

می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۰. مشتق یک تابع تعمیم یافته مانند $f \in D'$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi) \qquad \varphi \in D$$

نتیجه ۱.۲.۱. *تابع دلتای دیراک، مشتق تابع هویساید است. زیرا*

$$\begin{aligned}(e',\varphi) = -(e,\varphi') = -\int_R e(t)\varphi'(t)dt &= -\left[\int_{-\infty}^{0} e(t)\varphi'(t)dt + \int_{0}^{\infty} e(t)\varphi'(t)dt\right] \\ &= -\int_{-\infty}^{0}(-\frac{1}{2})\varphi'(t)dt - \int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}\varphi'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}\varphi(t)\Big|_{0}^{\infty} \\ &= \varphi(0) = (\delta,\varphi)\end{aligned}$$

[۳] Heaviside

مثال ۱.۲.۲.

$$y = |x|sinx \quad \Rightarrow \quad y' = signxsinx + |x|cosx$$

توجه شود که تابع فوق مشتق معمولی ندارد.

مثال ۱.۲.۳. *مشتق αام تابع δ برابر است با*

$$(D^\alpha \delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\delta, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0).$$

در زیر به برخی از خواص عملگر دیفرانسیل تابع تعمیم یافته اشاره می‌کنیم.

۱. [۱۵]

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha (D^\beta f) = D^\beta (D^\alpha f)$$

که β و α عضو اعداد حقیقی و $f \in D'$ است.

۲. [۱۵]

$$suppD^\alpha f \ \subset \ suppf$$

۳. [۱۵] فرض کنید $f \in D'$ و $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. آن‌گاه فرمول لایب نیتز برای gf برقرار است. یعنی

$$D^\alpha(gf) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta g D^{\alpha-\beta} f$$

۱.۳ جواب اساسی و کلاسیک

تعریف ۱.۳.۱. تابع مجهول u را **جواب کلاسیک** معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی گوییم، هرگاه تابع مجهول برابر با مرتبه معادله دیفرانسیل دارای مشتقات نسبی پیوسته باشد. از طرفی هرگاه در معادله قرار دهیم، طرف راست متحد با صفر شود.

تعریف ۱.۳.۲. منظور از **جواب اساسی** (جواب تعمیم یافته) یک معادله دیفرانسیل، تابع تعمیم یافته‌ای است، که در معادله دیفرانسیل که طرف راست آن تابع دلتای دیراک می‌باشد،

صدق کند. یعنی هرگاه L، عملگر دیفرانسیلی با ضرایب ثابت به‌صورت زیر باشد:

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha$$

تابع تعمیم یافته $\xi \in D'$ که در معادله‌ی $L(D)\xi = \delta(x)$ در $\mathbb{R}^n$ صدق می‌کند، یک جواب اساسی عملگر $L(D)$ نامیده می‌شود.

تذکر ۱.۳.۱. جواب اساسی در حالت کلی منحصر بفرد نیست. زیرا اگر $\xi_0(x)$ جواب دلخواه معادله‌ی همگن $L(D)\xi_0 = 0$ و $\xi(x)$ جواب اساسی باشد، در این‌صورت داریم:

$$L(D)(\xi + \xi_0) = L(D)\xi + L(D)\xi_0 = \delta(x)$$

لذا $\xi(x) + \xi_0(x)$ نیز یک جواب اساسی عملگر $L(D)$ است.

مثال ۱.۳.۱. *معادله دیفرانسیل $y''(x) = 0$ را که $x \in (0, 1)$ در نظر می‌گیریم. جواب اساسی معادله دیفرانسیل فوق به‌صورت زیر می‌باشد:*

$$Y(x-\xi) = \frac{|x-\xi|}{2}$$

زیرا داریم :

$$Y(x-\xi) = \frac{|x-\xi|}{2} \Rightarrow Y'(x-\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x > \xi \\ 0 & x = \xi \\ \frac{-1}{2} & x < \xi \end{cases}$$

که این همان تابع هویساید متقارن می‌باشد. بنابراین

$$Y''(x-\xi) = e'(x-\xi) = \delta(x-\xi)$$

در نتیجه یک جواب اساسی برای معادله‌ی دیفرانسیل داده شده می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۱. معادله‌ی لاپلاس یکی از ساده‌ترین و در عین حال از مهم‌ترین معادلات در مسائل مقدار مرزی است، که در حالت دو بعدی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$