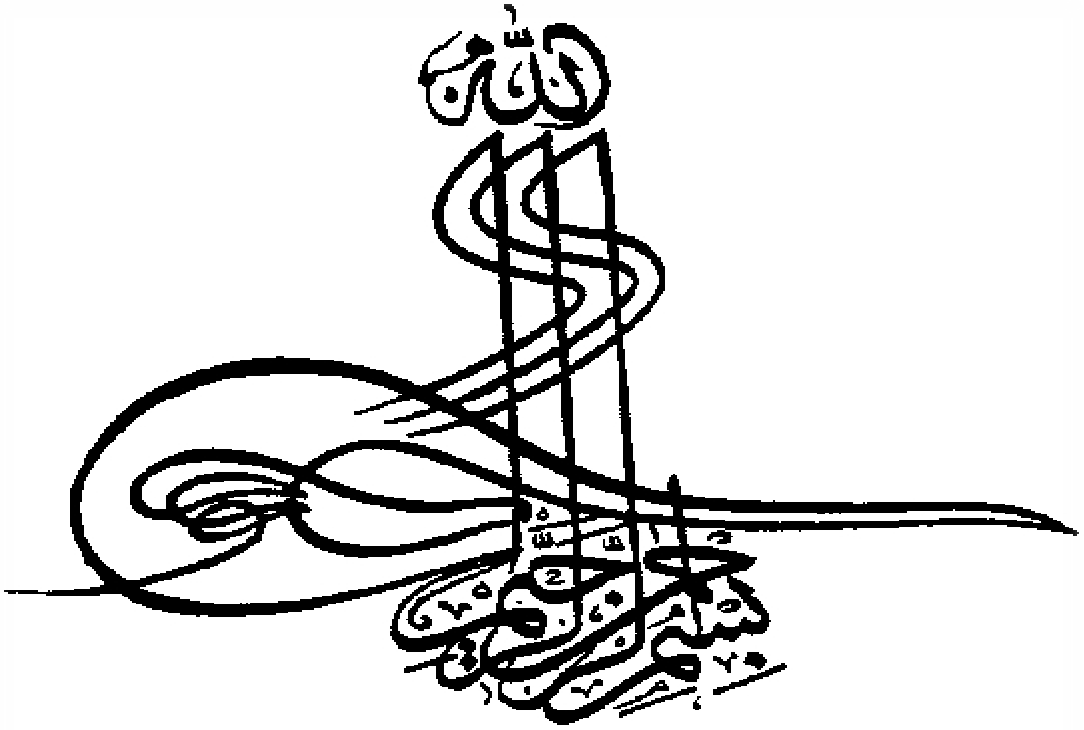

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه ، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

رشته ریاضی کاربردی ، گرایش آنالیز عددی

عنوان:

کاربرد اسپلاین نمایی برای حل مسائل پخش-واکنش غیر عادی ومختل

استاد راهنما :

دکتر جلیل رشیدی نیا

استاد مشاور :

دکترمجید امیر فخریان

پژوهشگر:

فاطمه احدی

اسفند 1390

ناقابلی اگر در خور تقدیم باشد به آنان که به من آموختند.

تقدیم به :

پدر ومادرم

دونازنینی که در سایه مهربانی شان جسورانه ترین گامهای زندگی ام را بر سنگفرش دیروز و امروز حک کرده ام.

همسرم

عزیزی که نگاه پر مهرش امیدبخش زندگی و دستان پرتوانش بهترین حامی من است.

فرزندم

زیباترین نعمتی که آهنگ عشق الهی را در جانم می نوازد.

تشکر وقدردانی

حمد وستایش خدای را سزد که یگانه و بی همتاست ...

بهترین و صمیمانه ترین قدردانی ها را نثار آنهایی می کنم که وقت و دانش خود را با نهایت سخاوت در اختیارم قرار دادند و همواره از لطف و مساعدت بی دریغ ایشان برخوردار بوده ام . با تشکر از اساتید محترم گروه ریاضی که در طول تحصیل از محضرشان بهره مند شدم ، مراتب سپاس و عمیقترین قدردانی خویش را به محضر استاد فرزانه جناب آقای دکتر جلیل رشیدی نیا ابراز می دارم که همواره با رهنمودهای ارزشمند و سازنده ، اینجانب را در تدوین و نگارش پایان نامه مورد محبت خویش قرار دادند .

فاطمه احدی

اسفند 1390

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب فاطمه احدی دولت سرا دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته به شماره دانشجویی 88083819700 در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی که در تاریخ 1390/12/ 02 از پایان نامه خود تحت عنوان : کاربرد اسپلاین نمایی برای حل مسایل پخش - واکنش غیر عادی و مختل با کسب نمره 17 و درجه بسیار خوب دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم :

1- این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه ، کتاب ، مقاله و ...) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه های موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام .

2- این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است .

3- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل ، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب ، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم ، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم .

4- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود ، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت .

نام و نام خانوادگی : فاطمه احدی

تاریخ و امضاء :

بسمه تعالی

در تاریخ 1390/12/02 دانشجوی کارشناسی ارشد خانم فاطمه احدی از پایان نامه خود دفاع نموده و با نمره 17 به حروف هفده و با درجه بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

فرم اطلاعات پایان نامه های کارشناسی ارشد

دانشکده علوم پایه

نام واحد دانشگاهی : تهران مرکزی **کد واحد** : 101	**کد شناسایی پایان نامه** :10130109901009
نام ونام وخانوادگی دانشجو : فاطمه احدی **شماره دانشجویی**: 88083819700	**سال و نیمسال اخذ پایان نامه** : 90-89 **رشته تحصیلی** : **ریاضی کاربردی**

عنوان پایان نامه کارشناسی ارشد :کاربرد اسپلاین نمایی برای حل مسائل پخش- واکنش غیر عادی مختل

نامونام خانوادگی استاد راهنما : دکتر رشیدی نیا	**نام و نام خانوادگی استاد مشاور**: دکتر امیر فخریان

تعداد واحد پایان نامه: 6واحد **تاریخ صدور کد شناسایی** :1390/11/9 **تاریخ دفاع از پایان نامه** :1390/12/02 **تاریخ ارائه مقاله** :	**نمره پایان نامه دانشجو(از 18 نمره)** **به عدد**: 17 **به حروف** : **هفده** **نمره مقاله دانشجو(از 2 نمره)** **به عدد**: **به حروف**:

چکیده پایان نامه (شامل خلاصه، اهداف، روش های اجرا و نتایج به دست آمده):

در این پایان نامه از تابع اسپلاین نمایی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی وجزئی استفاده شده است . اسپلاین غیرچندجمله ای کششی فرمولبندی شده است . با استفاده از اسپلاین غیرچندجمله ای، معادله غیرخطی ساین-گوردون تعمیم یافته با شرایط مرزی دیریکله ونیومن حل شده است ودسته ای از روشها ایجاد شده اند . پایداری وهمگرایی این روش عددی با استفاده از روشهای وان نیومن وانرژی بررسی شده است .همچنین مسئله مقدار مرزی دیریکله برای معادله پخش-واکنش شبه خطی مختل غیر عادی در نظر گرفته شده است . این مسئله با استفاده از روش تفاضلی اسپلاین نمایی که از اسپلاین در کشش روی افراز نوع Shishkin تکه ای یکنوا نتیجه شده است ، فرمولبندی می شود .همگرایی بررسی شده ونشان داده شده است که روش در مرتبه دوم همگراست .در پایان ، نتایج عددی داده شده است .

واژه های کلیدی : اسپلاین نمایی ، معادله ساین-گوردون ، مسئله مختل غیرعادی ، مسئله پخش-واکنش شبه خطی ، افراز Shishkin یکنوای تکه ای ، بررسی پایداری وهمگرایی.

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش نامه دانشگاه مناسب است تاریخ و امضا

مناسب نیست

فهرست مطالب

فصل اول : مقدمه

6-5- **مقدمه** 2

فصل دوم : پیشنیازها

2-1- **مقدمه** 7

2-2- **تعاریف ومفاهیم ریاضی** 7

2-3- **معادلات دیفرانسیل** 9

2-3-1- **روش عنصر متناهی** 12

2-3-2- **روش تفاضلات متناهی** 12

2-4- **پایداری روشهای عددی** 14

2-4-1- **روش سری فوریه** 15

2-4-2- **روش ماتریسی** 16

2-5- **حل عددی دستگاه معادلات خطی** 18

2-6- **اسپلاین** 21

2-7- **افراز** *Shishkin* **تکه ای – یکنواخت** 22

فصل سوم : استفاده از درونیاب اسپلاین نمایی در فضای تک بعدی برای حل معادله ساین –گوردون

3-1- مقدمه 24

3-2- معرفی معادله غیر خطی ساین – گوردون 24

3-3- روش ارائه شده برای حل معادله ساین – گوردون 25

3-4- آنالیز پایداری 37

3-5- نتایج عددی 41

پیوست 1 45

فصل چهارم : استفاده از درونیاب اسپلاین نمایی برای حل مسائل پخش-واکنش شبه خطی مختل غیر عادی

4-1- مقدمه 48

4-2- معرفی مسئله پخش-واکنش شبه خطی مختل غیر عادی 50

4-3- گسسته سازی اسپلاین نمایی 52

4-4- برآورد خطای برشی 57

4-5- وجود ، یکتایی وهمگرایی یکنواخت 61

4-6- نتایج عددی 70

پیوست 2 74

مراجع 76

چکیده انگلیسی 79

پیوست

پیوست 1

جدول 4-5-1..... 45

جدول 4-5-2..... 45

جدول 4-5-3..... 46

جدول4-5-4 46

پیوست 2

جدول 5-6-1.....74

جدول5-6-2 74

جدول 5-6-3.....75

جدول 5-6-4.....75

چکیده

در این پایان نامه از تابع اسپلاین نمایی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی وجزئی استفاده شده است . اسپلاین غیرچندجمله ای کششی فرمولبندی شده است . با استفاده از اسپلاین غیرچندجمله ای، معادله غیرخطی ساین-گوردون تعمیم یافته با شرایط مرزی دیریکله ونیومن حل شده است ودسته ای از روشها ایجاد شده اند . پایداری وهمگرایی این روش عددی با استفاده از روشهای وان نیومن وانرژی بررسی شده است .همچنین مسئله مقدار مرزی دیریکله برای معادله پخش-واکنش شبه خطی مختل غیر عادی در نظر گرفته شده است . این مسئله با استفاده از روش تفاضلی اسپلاین نمایی که از اسپلاین در کشش روی افراز نوع Shishkin تکه ای یکنوا نتیجه شده است ، فرمولبندی می شود .همگرایی بررسی شده ونشان داده شده است که روش در مرتبه دوم همگراست .در پایان ، نتایج عددی داده شده است .

واژه های کلیدی : **اسپلاین نمایی ، معادله ساین-گوردون ، مسئله مختل غیرعادی ، مسئله پخش-واکنش شبه خطی ، افراز Shishkin یکنوای تکه ای ، بررسی پایداری وهمگرایی.**

فصل اول

مقدمه

1-1- مقدمه

در جهان واقعی ، بسیاری از فرایندها و پدیده های فیزیکی توسط مدلهای ریاضی مورد مطالعه قرار می گیرند . حرکت اجسام ، انتقال گرما ، انحنا وترک خوردگی مواد ، ارتعاشات ، واکنشهای شیمیایی وهسته ای همگی به وسیله معادلات دیفرانسیل مدل بندی می شوند . مطالعه روشهای عددی برای بدست آوردن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل مورد توجه قرار گرفته است . ایجاد بهبود در این روشهای عددی وارتقای تکنولوژی رایانه حل بسیاری از این معادلات را در زمان محدود ممکن می سازد .

روشهای عددی که برای این گونه معادلات به کار برده شده اند ، در چهار دسته کلی تقسیم بندی می شوند :

1) روشهای تفاضل متناهی [1]
2) روشهای المان محدود [2]
3) روشهای تقریب با استفاده از توابع اسپلاین [3]
4) روشهای مبتنی بر حذف شبکه بندی [4]

در این پایان نامه کاربرد درونیاب اسپلاین برای حل معادله دیفرانسیل معمولی وجزئی را بیان می کنیم .

چون هدف اصلی ما توسعه روشهای دسته سوم می باشد ، لذا مختصر تاریخچه ای برای این دسته از روشها را بیان می کنیم .

1 Finite difference
2 Finite element
3 Spline function approximations
4 Meshless method

ریاضی دانان تلاش می کنند روشهایی برای حل مسائل ارائه می دهند که دقت را افزایش داده و خطا را کاهش دهد ، یعنی برای حل مسائلی که جواب ندارند یک جواب تقریبی با بیشترین دقت و کمترین خطا را بدست آورند .

یکی از مشکلات درونیابی با استفاده از چند جمله ایهای با درجه بالا ، نوسان آنهاست . این نوسان ممکن است باعث دور شدن چند جمله ای درونیاب از تابع درونیابی شده ، در بازه درونیابی می شود . یکی از راههای حل این مشکل تقسیم بازه درونیابی به چند زیربازه و سپس تشکیل چندجمله ایهای تقریب با درجه پایین روی هر یک از زیربازه ها است . این نوع تقریب را درونیابی تکه ای چندجمله ای می گویند .

درونیابی اسپلاین از بهترین نوع درونیابهای تکه ای چندجمله ای می باشد . با توجه به ویژگی تکه ای بودن آن ، بالا بردن دقت بدون افزایش درجه چند جمله ای امکان پذیر می باشد . این امر باعث افزایش و همینطور کاهش خطای محاسبات می گردد .درونیابی اسپلاین برای هر یک از درونیابهای چندجمله ای در فواصل معین است . در واقع در درونیابی اسپلاین برای هریک از بازه های افراز شده ، یک چندجمله ای بدست آورده می شود .وجود چند جمله ایهای متعدد از افزایش درجه چند جماه ای درونیاب جلوگیری می کند . این توابع چندجمله ای کاربرد فراوانی در تئوری تقریب ، گرافیک کامپیوتری (روشهای ترسیمی) و به طور گسترده روشهای عددی از جمله حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی ، حل عددی معادلات با مشتقات جزئی وحل عددی معادلات انتگرال و ... دارند . بویژه اسپلاین درجه سه دارای نقش مهمی در تحقیقات کاربردی است ، زیرا دارای سهولت در محاسبات ، همواری در درونیابی ، همگرایی سریع در تقریب ودارای خواص نرم حداقل است[1و5و10و19و17].

استفاده از توابع اسپلاین از ابتدای قرن گذشته شروع شد . در بیشتر متنهای علمی ، شوئنبرگ [5] را بوجود آورنده اسپلاین می دانند[23]. وی که ریاضیدان رومانیایی بود در مقاله ای در سال 1946 به معرفی اسپلاینها پرداخت و این اولین جایی بود که کلمه اسپلاین برای معرفی اتصال چندجمله ایهای تکه ای استفاده شد . از آن زمان تاکنون بطور قابل توجهی در زمینه های تئوری و کاربردی مورد توجه محققان قرار دارد . البته این ایده ریشه در هواپیماسازی و کشتی سازی دارد ، زیرا در طی سالهای قبل از جنگ جهانی دوم اشاره هایی به این موضوع در تکنیکهای ساخت بدنه کشتیها و هواپیماها شده است . در واقع در آن سالها از تکه های چوبی هموار برای مدلسازی بدنه آنها استفاده می شد . در صنعت خودروسازی نیز مهندسینی از شرکتهای رنو و سیتروئن جزء اولین استفاده کنندگان این تکنیک در طراحی بدنه خودروها بودند که سابقه استفاده آنها به سال 1960 برمی گردد . لازم به یادآوری است کلمه اسپلاین یک کلمه محلی در زبان انگلیسی می باشد .

از حدود سال 1960 توابع قطعه ای چندجمله ای به خصوص توابع اسپلاین به سرعت عمومیت پیدا کرد . توابع اسپلاین یک رابطه مستقیم بین مشتقات ومقادیر تابع درونیابی شده در نقاط گره ای برقرار می کنند . تعدادی از محققان روشهای تقریب توابع اسپلاین چندجمله ای و غیر چندجمله ای را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مورد توجه قرار دادند : از جمله دی بور[6] [6]، آلبرگ[7] و دیگران[1]و... .

در سال 1979 جین[13] یک اسپلاین درجه سه پارامتری ابداع کرد که اسپلاین در فشار [8] نامیده شد . این تابع اسپلاین به یک پارامتر $\tau \to 0$ به یک اسپلاین درجه سه تبدیل می شود .

5 Schoenberg
6 De Boor
7 Ahlberg
8 Spline in Compression

جین[13]و جین و عزیز[9][14]با به کار بردن تقریبهای اسپلاین در فشار ، روابط تفاضلی آزمایشی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی ساختند .اسپلاین در فشار بعدها توسط جین وعزیز به اسپلاین سازگار[10] واسپلاین کششی[11] تعمیم یافت .

فصل دوم به بیان تعاریف وقضایای مورد نیاز اختصاص یافته است .در فصل سوم به بررسی اسپلاین نمایی می پردازیم .در فصل چهارم با استفاده از اسپلاین کششی به حل عددی معادلات با مشتقات جزئی غیر خطی ساین – گوردون پرداخته و پایداری وهمگرایی این روش را بررسی می کنیم . درفصل پنجم با استفاده از اسپلاین نمایی به حل مسئله پخش – واکنش غیرعادی و مختل می پردازیم .

نتایج عددی با کمک نرم افزار $MATLAB$ محاسبه شده است .

9 Aziz
10 Adaptive Spline
11 Spline under Tension

فصل دوم

پیش نیازها

2-1- مقدمه

در این فصل ، برخی از تعاریف وقضایای اساسی آنالیز ریاضی ، جبر خطی و نظریه معادلات دیفرانسیل بیان شده است که در فهم و درک بهتر سایر فصل ها کمک می کنند .

2-2- تعاریف ومفاهیم ریاضی

تعریف (2-1) تابع $f : R^n \to R$ را هموار[12] گوییم هرگاه مشتقاتش از هر مرتبه ای موجود باشد .

تعریف(2-2) با فرض اینکه X یک فضای برداری باشد ، تابع $\|.\| : X \to R \geq 0$ یک نرم روی X است هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $a \in R$ داشته باشیم :

$\|x\| = 0 \iff x = 0$

$\|ax\| = |a|\|x\|$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

در این صورت فضای X را یک فضای نرم دار گویند .

تعریف (2-3) نرم اقلیدسی[13] روی فضای R^n برای $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ برابر است با :

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

12 Smooth function
13 Euclidian norm

نرم های مشابهی برای فضاهای تابعی وجود دارد . $C^k([a,b])$ **، فضای برداری همه توابع حقیقی مقدار تعریف شده روی بازه کراندار وبسته** $[a,b]\subset R$ **را که تا مشتق** $\boldsymbol{k}$ **- ام پیوسته اند ، در نظر بگیرید .برای** $f \in C^k([a,b])$ **،**

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{1/2}$$

تعریف(2-4) می گوییم تابع $f: I \subseteq R \to R$ **از رده** C^k **است هرگاه** $f^{(k)}, \dots f', f$ **روی** I **موجود وپیوسته باشند .به طور مشابه ،** $f: D \subseteq R^n \to R$ **از رده** C^k **است هرگاه تمام مشتقات جزئی آن ازمرتبه کوچکتر یا مساوی** k **روی** D **موجود وپیوسته باشند .اگر تابعی دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه ای باشد می گوییم از رده** C^∞ **است [30].**

تعریف (2-5) (مرتبه همگرایی) **اگر** f **و** g **دو تابع از** h **باشند وهمواره** $g \neq 0$ **وداشته باشیم :**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)} = 0$$

در این صورت می گوییم $f(h) = o\big(g(h)\big)$ **واگر** $g(h) = h^l$ **آنگاه :**

$$f(h) = o(h^l)$$

و $f(h)$ **سریعتر از** h^l **به صفر میل می کند و** l **را مرتبه همگرایی گویند[30] .**

تعریف (2-6) (ماتریس معین مثبت) **ماتریس** $A_{n\times n}$ **را معین مثبت گویند هرگاه به ازای هر بردار** $\mathbf{0} \neq x \in C^n$ **،**

$$x^*Ax > 0$$

($\boldsymbol{x}^*$ **ترانهاده مزدوج** $\boldsymbol{x}$ **است) .**