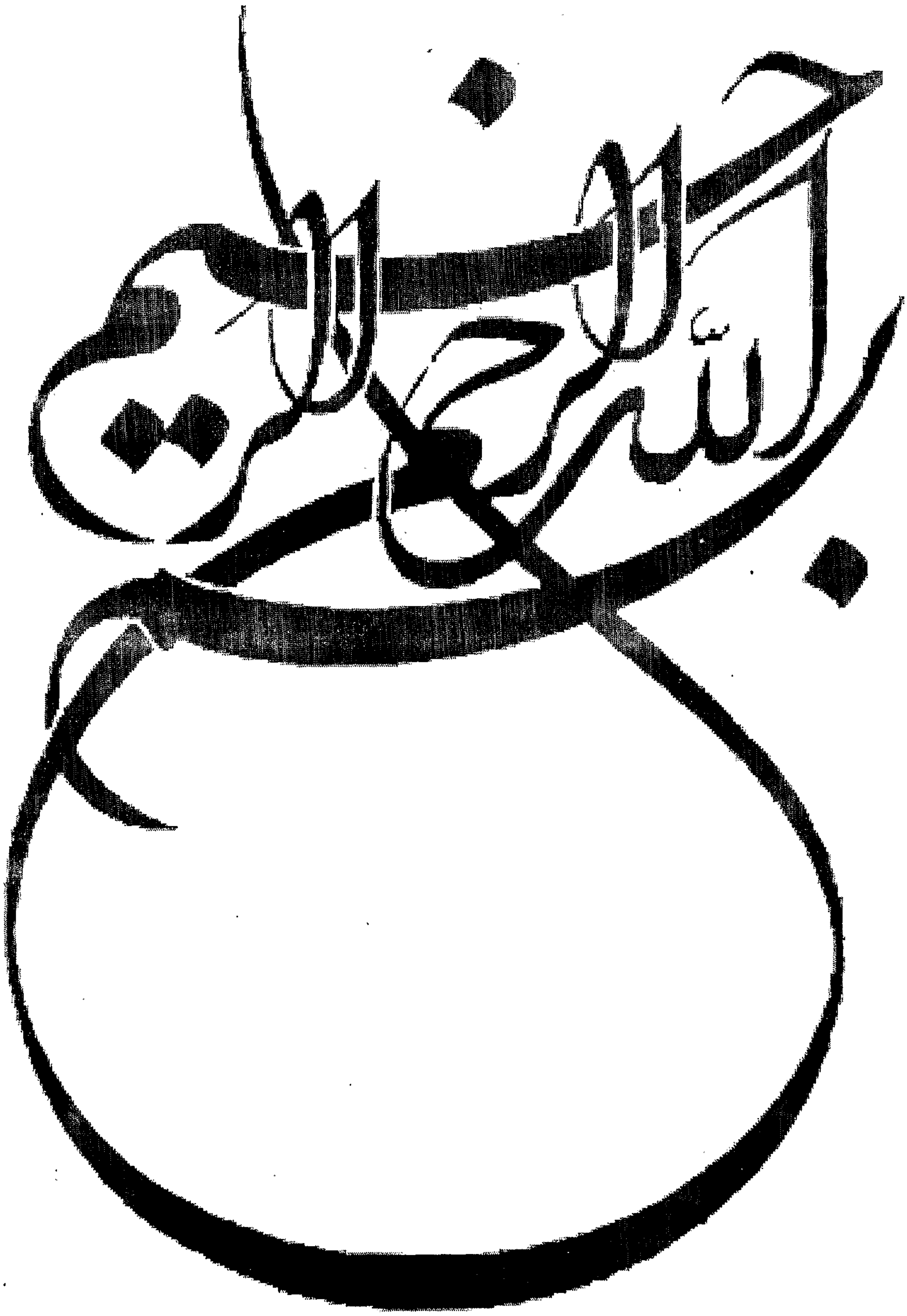
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بیرجند
دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض(جبر)

عنوان:

پوششهای زیرنرمال متناهی از گروههای حل پذیر خاص

استاد راهنما:

دکتر محمدمهدی نصرآبادی

استاد مشاور:

دکتر حسین اقدامی

۱۳۸۸/۱۲/۲۶

نگارنده:

سمیه هاشمی نژاد

شهریور ۱۳۸۷

به نام خدا

فرم شماره ۵

دانشگاه بیرجند

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تاییدات خداوند متعال جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد **خانم سمیه هاشمی نژاد**

به شماره دانشجویی: **۸۵۱۳۱۱۲۰۲۴** رشته: **ریاضی** گرایش: **جبر** دانشکده: **علوم** دانشگاه بیرجند

تحت عنوان :

"پوششهای زیر نرمال متناهی از گروههای حل پذیر خاص "

به ارزش: ٦ واحد درساعت: ۲۰ روز: **سه شنبه** مورخ: ۸۷/٦/۲٦

با حضور اعضای محترم جلسه دفاع و نماینده تحصیلات تکمیلی به شرح ذیل تشکیل گردید :

سمت	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی	استادیار	
استاد مشاور	آقای دکترحسین اقدامی	استادیار	
داور اول	آقای دکتر محمد حسین حسینی	استادیار	
داور دوم	آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر علیرضا جانفدا	استادیار	

نتیجه ارزیابی به شرح زیر مورد تایید قرار گرفت:

☑ قبول (با درجه: عالی و امتیاز: ۱۹٫۲۸) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱- عالی (۲۰-۱۸) ۲- بسیار خوب (۱۷/۹۹ - ۱٦) ۳- خوب (۱۵/۹۹ - ۱۴) ۴- قابل قبول (۱۳/۹۹ - ۱۲)

تقدیم به استاد گرامی

جناب آقای دکتر محمدمهدی نصرآبادی

که اولین رهنمون من در پیشبرد این هدف بوده اند.

و تقدیم به:

پدر عزیز و مادر بزرگوارم که هرچه دارم از دعای خیر ایشان است،

خواهران و برادران عزیزم که صمیمانه دوستشان دارم.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس به پیشگاه خداوند رحمان و رحیم که هرچه داریم از لطف و عنایت اوست و هر موفقیتی بر مدار مشیت و اراده آن دانای سبحان است.

در این جا بر خود واجب می دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را از همه کسانی که در به ثمر رسیدن این مجموعه یاری ام کرده اند، اعلام دارم.

سپاسگذاری بی پایان خود را به استاد راهنمای گرامی ام، **جناب آقای دکتر محمدمهدی نصرآبادی**، که همواره در نهایت صبر و شکیبایی، با اطلاعات ارزشمند خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده و از هیچ کمکی دریغ ننموده اند، تقدیم می دارم.

از مشاور بزرگوارم **جناب آقای دکتر حسین اقدامی** که در طول تحصیل در این دانشگاه، ارزش نظم، برنامه ریزی، اخلاق و فروتنی را به من یادآوری کرده اند و همواره الگوی من بوده اند، سپاسگذارم.

از داوران گرامی، **جناب آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی** و **جناب آقای دکتر حسین حسینی** به خاطر همکاری صمیمانه شان سپاسگذارم. همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی، **جناب آقای دکتر جانفدا** تشکر می کنم.

از خانواده خوبم، به خصوص دایی بزرگوارم و تمام دوستان و آشنایانی که مرا در انجام این کار تشویق و همراهی کرده اند بسیار ممنون و سپاسگذارم.

چکیده

گوییم هر گروه، توسط مجموعه ای از زیرگروهها پوشیده می شود، اگر هر عنصر از گروه، حداقل در یک زیرگروه از آن مجموعه، قرار داشته باشد. دراین حالت این مجموعه از زیرگروهها یک پوشش از گروه نامیده می شود. این پوشش غیربدیهی نامیده می شود، اگر مجموعه شامل زیرگروههای محض باشد.

در سال ۱۹۵۴، بی. اچ. نویمن[1] نشان داد، گروههای با پوشش متناهی از زیرگروههای محض، دقیقاً گروههایی هستند که تصویر یکریخت متناهی دارند. در فصل دو نشان خواهیم داد، یک گروه، پوششی متناهی از زیرگروههای آبلی نرمال دارد، اگروتنهااگر مرکزی به وسیله متناهی و ۲- انگل[2] باشد. هدف ما در فصل سه، تعمیم قضیه اخیر به پوششهای متناهی از زیر گروههای زیرنرمال می باشد.

کلمات کلیدی:

گروه انگل، گروه متاآبلی، پوشش متناهی، گروه آبلی، گروه ۳-آبلی و گروه ۲- مرکزی.

---

[1] B. H. Neumann

[2] Engel

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

مقدمه

در سال ۱۹۴۰ پی. جی. کنتورویچ[1] روی ساختار گروههای متناهی که پوششهای نرمال غیربدیهی دارند، بحث کرده است. همچنین، در سال ۱۹۵۴ بی. اچ. نویمن گروههایی با پوشش متناهی از زیرگروههای محض را مشخص کرد. بعلاوه، در سال ۱۹۸۸ مارک ای. برود[2]، آر. اف. چامبرلاین[3] و ال. سی. کیپ[4]، گروههایی با پوشش متناهی از زیرگروههای نرمال و نرمال آبلی را مورد بررسی قرار دادند.

این پایان نامه بررسی [۳]، از مارک ای. برود و روبرت فیتزگرالد مورس[5] است که مشتمل بر سه فصل می باشد. در فصل اول که شامل چهار بخش است، به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی می پردازیم. از اینرو نگاهی گذرا به مطالب خواهیم داشت و اغلب قضایا را بدون اثبات بیان خواهیم کرد.

فصل دوم شامل دو بخش است. در بخش اول PNS – گروهها معرفی می شوند، که در اثبات قضایای بخش دوم مورد استفاده قرار می گیرند. در بخش دوم شرایطی را بررسی می کنیم که تحت آن شرایط، یک گروه دلخواه، پوششهای متناهی غیربدیهی از زیرگروههای نرمال، آبلی و نرمال آبلی دارد.

فصل سوم شامل سه بخش است. در هر یک از این بخش ها، شرایط لازم و کافی برای آن که یک گروه دلخواه، پوششهای زیرنرمال متناهی از زیرگروههای حل پذیر به ترتیب، آبلی، ۳- آبلی و ۲- مرکزی دارد، را بررسی می کنیم.

---

[1] P. G. Kontorovic
[2] Mark A. Brodie
[3] R. F. Chamberlain
[4] L.-C. Kappe
[5] Robert Fitzgerald Morse

فصل اول

مقدمات و پیشنیازها

در این فصل که شامل چهار بخش است برخی نمادها، تعاریف، لم ها و قضایایی را ارائه می کنیم که برحسب نیاز در فصل های دیگر از آن ها استفاده خواهیم کرد. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۶]، [۱۳]، [۱۵]، [۱۹]، [۲۰] و [۲۱] مراجعه کنید.

۱-۱. خواص جابجاگرها

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنید G گروهی دلخواه و x و y عناصردلخواهی از G باشند. دراین صورت جابجاگر ساده[1] x و y که با نماد $[x,y]$ نشان داده می شود را به صورت $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$ تعریف می کنیم.

همچنین مزدوج[2] x توسط y را با نماد x^{y} نشان داده و به صورت $x^{y}=y^{-1}xy$ تعریف می کنیم.

$[x,y]$ را جابجاگر ساده از وزن دو نیزمی گوئیم و جابجاگرهای ساده از وزن $n\geq 2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n]=[[x_1,x_2\dots,x_{n-1}],x_n].$$

به طریق مشابه می توان مفهوم جابجاگرها را برای زیرگروهها نیز تعریف کرد.

اگر H_1 و H_2 زیرگروههایی از گروه G باشند، آنگاه زیرگروه جابجاگر[3] H_1 و H_2 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[H_1,H_2]=\langle [h_1,h_2];\, h_1\in H_1, h_2\in H_2\rangle.$$

همچنین می توان جابجاگر بیش از دو زیرگروه را تعریف کرد.

هرگاه H_1، H_2، ... و H_n زیرگروههایی از گروه G باشند، آنگاه جابجاگر این n زیرگروه، که زیرگروهی از G می باشد، به صورت زیر تعریف می شود:

---

[1] Commutator
[2] Conjugate
[3] Commutator subgroup

$$[H_1,H_2,...,H_{n-1},H_n]=[[H_1,H_2,...H_{n-1}],H_n].$$

جابجاگر $[x,y,y,...,y]$ که در آن y، n بار تکرار می شود را با نماد $[x,_n y]$ و به طور مشابه $[H,K,K,...,K]$ که در آن K، n مرتبه تکرار می شود، را با نماد $[H,_n K]$ نمایش می دهیم. همچنین

$$[x,_0 y]=x$$

$$[x,_{n+1} y]=[[x,_n y],y].$$

یادآوری می شود که مجموعه $\{g\in G \;;\; K^g=K\}$ را نرمالساز K در G می نامیم و با نماد $N_G(K)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱-۱-۲. فرض کنید $x,y,z\in G$ و $H,K\le G$. دراین صورت

۱) $x^y=x[x,y]$ ؛

۲) $[x,y]=[y,x]^{-1}$ ؛

۳) $[x,y]^z=[x^z,y^z]$ ؛

۴) $xy=yx[x,y]$ ؛

۵) $[x^{-1},y]=[y,x]^{x^{-1}}$ و $[x,y^{-1}]=[y,x]^{y^{-1}}$ ؛

۶) اتحادهای هال[1] :

$[xy,z]=[x,z]^y[y,z]=[x,z][x,z,y][y,z]$ ،

$[x,yz]=[x,z][x,y]^z=[x,z][x,y][x,y,z]$ ؛

۷) اتحادهای ویت[2] :

$[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1$ و $[y,x,z^y][z,y,x^z][x,z,y^x]=1$ ؛

[1] Hall identities
[2] Witt identities

۸) اگر $G \lhd H,K$، آنگاه $[H,K] \lhd G$؛

۹) $[H,K]=[K,H]$؛

۱۰) $H \subseteq N_G(K)$ اگر و تنها اگر $[H,K] \leq K$؛

۱۱) اگر $H,K \lhd G$، آنگاه $[H,K] \subseteq H \cap K$.

اثبات. به کمک تعریف، به راحتی اثبات می شود.■

لم ۱-۱-۳ . اگر $\varphi \in End(G)$ و $H,K \leq G$، آنگاه $[H,K]\varphi=[H\varphi,K\varphi]$. در حالت خاص اگر $H,K \overset{c}{\lhd} G$، آنگاه $[H,K] \overset{c}{\lhd} G$.

اثبات. به قضیه ۲-۲-۱، حکم ۱۰، از [۶] مراجعه شود.■

تعریف ۱-۱-٤ . فرض کنید X زیرمجموعه ای غیرتهی از گروه G باشد، در این صورت اشتراک تمام زیرگروههای نرمال G و شامل X را بستار نرمال[1] X در G می نامیم و با X^G نمایش می دهیم. به وضوح X^G کوچکترین زیرگروه نرمال از G و شامل X است.

قضیه ۱-۱-۵.

فرض کنید G یک گروه باشد و $x,y \in G$ به طوری که $[x,y,x]=[x,y,y]=1$. در این صورت

الف) برای هر $i,j \in \mathbb{Z}$، $[x^i,y^j]=[x,y]^{ij}$؛

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

اثبات. فرض کنید $z=[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$. در این صورت، بنا به فرض z با x و y، جابجا می شود و $xz=y^{-1}xy$.$(*)$

لذا برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $(y^{-1}xy)^i=(xz)^i$. از اینرو برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $y^{-1}x^i y = x^i z^i$.

[1]Normal clousre

در نتیجه با استفاده از تساوی (*)

$$y^{-2}x^i y^2 = y^{-1}x^i z^i y = y^{-1}x^i y z^i = x^i z^i z^i = x^i z^{2i}\,.$$

با ادامه این روند، خواهیم داشت $y^{-j}x^i y^j = x^i z^{ji}$. لذا $[x^i, y^j] = z^{ij} = [x,y]^{ij}$.

ب) به استقرا عمل می کنیم. اگر $n=1$ باشد، حکم بدیهی است. فرض کنید حکم برای n برقرار باشد. در این صورت

$$(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}}\,.$$

نشان می دهیم

$$(xy)^{n+1} = x^{n+1}y^{n+1}[y,x]^{\frac{n(n+1)}{2}}\,.$$

چون $[x,y,x]=[x,y,y]=1$، پس $[x,y]$ با x و y جابجا می شود. یعنی

$$[x,y]x = x[x,y] \text{ و } [x,y]y = y[x,y]\,.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
(xy)^{n+1} &= (xy)^n xy \\
&= x^n y^n [y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}} xy = x^n y^n xy [y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= x^n x y^n [y^n, x] y [y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}} = x^{n+1} y^n [y^n, x] y [y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= x^{n+1} y^{n+1} [y^n, x][y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}} = x^{n+1} y^{n+1} [y,x]^n [y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= x^{n+1} y^{n+1} [y,x]^{\frac{n(n+1)}{2}}\,.
\end{aligned}$$

تعریف ۱-۱-۶. گروه G را p-گروه نامیم، هرگاه مرتبه هر عنصرش توانی از عدد اول p باشد.

قضیه و تعریف ۱-۱-۷. هر p-گروه آبلی متناهی مانند G را می توان به صورت

$G = H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$ نوشت، که در آن $H_i = \langle x_i \mid x_i^{p^{e_i}} = 1 \rangle$ و $|H_i| = p^{e_i}$. این نمایش منحصر به فرد[1] است. پس برای هر p -گروه آبلی متناهی مانند G می توان یک نمایش به صورت $(p^{e_1}, p^{e_2}, ..., p^{e_n})$ در نظر گرفت، به طوری که $e_1 \le e_2 \le ... \le e_n$. در حالت خاص، اگر G دارای نمایشی به صورت $(p, p, ..., p)$ باشد، آنگاه G یک p -گروه آبلی مقدماتی[2] نامیده می شود.

اثبات. به قصیه ۱-۲-۱۴ از [۶]، مراجعه شود.■

[1] Unique
[2] Elementary abelian p-group

۱-۲. حل پذیری و پوچ توانی

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت یک سری[1] از G عبارت است از یک دنباله متناهی از زیرگروهها به صورت $\langle 1\rangle = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G$، به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $G_i \lhd G_{i+1}$. n طول سری[2]، گروههای G_i جمله های سری و گروههای خارج قسمتی G_i/G_{i-1} عاملهای سری[3] نامیده می شوند. در یک سری نرمال از G، جمله های آن زیرگروههای نرمال G هستند.

تعریف ۱-۲-۲. گروه دلخواه G، گروه حل پذیر[4] نامیده می شود، هرگاه دارای یک سری با عاملهای آبلی باشد. (این سری را سری حل پذیر نیز می نامند.)

مثال ۱-۲-۳. هر گروه آبلی حل پذیر است. گروه S_3 یک گروه غیرآبلی حل پذیر است، زیرا سری $S_3 \leq \langle(1,2,3)\rangle \leq \langle 1\rangle$ در S_3 وجود دارد که عاملهای آن دوری (و در نتیجه آبلی) هستند.

تعریف ۱-۲-٤. فرض کنید G یک گروه باشد. در نظر بگیرید:

$$G' = [G, G]$$

$$G'' = [G', G']$$

..

$$G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}].$$

$G^{(i)}$ را i-امین مشتق گروه[5] G می نامیم. با توجه به خاصیت زیرگروههای جابجاگر واضح است که $G^{(i)} \lhd G$. علاوه بر این سری نرمال $G \geq G' \geq G'' \geq \ldots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \ldots$ از گروه G را سری مشتق[1]

---

[1] Series
[2] Length of series
[3] Factor of series
[4] Solvable
[5] i-th derived group

می نامیم. به وضوح $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ آبلی است.

تعریف ۱-۲-۵. طول کوتاه ترین سری حل پذیر G، طول مشتق[2] G نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-٦. سری نرمال $\langle 1\rangle = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G$ یک سری مرکزی[3] نامیده می شود هرگاه به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $G_i/G_{i-1} \subseteq Z(G/G_{i-1})$.

گروه G یک گروه پوچ توان[4] نامیده می شود هرگاه دارای یک سری مرکزی باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی از G، رده پوچ توانی G نامیده می شود. به وضوح هر گروه پوچ توان، حل پذیر است. ولی عکس آن درست نیست. به عنوان مثال S_3 گروهی حل پذیر است که پوچ توان نیست. به راحتی می توان نشان داد که، گروه دلخواه G، پوچ توان از رده حداکثر c می باشد اگروتنها اگر به ازای $1 \leq i \leq c+1$ و $x_i \in G$، $[x_1, x_2, \ldots, x_c, x_{c+1}]=1$.(به تمرین ۱۶ در صفحه ۲۵ از [۱۹]، مراجعه شود.)

---

[1] Derived series
[2] Length dirived
[3] Central series
[4] Nilpotent group

۱-۳. زیرگروههای زیرنرمال

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنید G یک گروه و K، زیرگروهی از G باشد، در این صورت K را زیرنرمال[1] در G گویند، هرگاه یک سری به صورت $K=K_{\circ}\leq K_{1}\leq K_{2}\leq \dots \leq K_{n}=G$، وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\circ\leq i\leq n$، $K_{i}\lhd K_{i+1}$.

در این صورت زیرنرمال بودن K در G را با نماد $K\overset{n}{\lhd}G$ یا $K\lhd\lhd G$ نمایش می دهیم. به عنوان مثال، بنا به تعریف ۱-۲-۴، برای هر i، $G^{(i)}$ زیرگروهی زیرنرمال از G می باشد.

تعریف ۱-۳-۲. فرض کنید $H\leq G$. در این صورت سری بست نرمال متوالی[2] H در G به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dots \lhd H_{n}=H^{H_{n-1}}\lhd \dots \lhd H_{2}=H^{H_{1}}\lhd H_{1}=H^{G}\lhd H_{\circ}=G\,.$$

$H_{i}=H^{H_{i-1}}$، را $i-$امین بست نرمال H در G می نامیم و با نماد $H^{G,i}$ نشان می دهیم.

براساس تعریف اخیر می توان گفت، زیرگروه H را زیرنرمال با شاخص زیرنرمال n[3] یا $n-$زیرنرمال می نامیم، اگر n کوچکترین عدد صحیحی باشد که $H^{G,n}=H_{n}=H$. زیرا اگر $H\overset{n}{\lhd}G$، آنگاه یک سری به صورت $H=K_{n}\lhd\dots\lhd K_{1}\lhd K_{\circ}=G$ وجود دارد. اما چون $H\leq H_{n}\leq K_{n}=H$، پس $H^{G,n}=H_{n}=H$.

قضیه ۱-۳-۳. فرض کنید $H\leq G$. در این صورت $i-$امین بست نرمال H در G برابر $H[G,_{i}H]$ است.

اثبات. به استقرا روی i عمل می کنیم. فرض کنید $i=\circ$ و $i=1$. در این صورت

[1] Subnormal
[2] Successive normal closure
[3] Subnormal of defect n

$$H[G,_0H]=H[G]=HG=G=H_0 .$$

$$H[G,_1H]=H[G,H]=H^G=H_1 .$$

حال فرض کنید حکم برای i برقرار باشد، یعنی $H^{G,i}=H[G,_iH]$. نشان می دهیم $H^{G,i}=H[G,_{i+1}H]$. بنا به تعریف

$$H^{G,i+1}=H^{H^{G,i}}=H^{H[G,_iH]}=H^{[G,_iH]}=H[G,_iH,H]=H[G,_{i+1}H].\ \blacksquare$$

لم ۱-۳-۴.

الف) اگر H یک زیرگروه m-زیرنرمال در G باشد، آنگاه $[G,_mH]\leq H$.

ب) اگر $H\lhd\lhd G$ و $K\lhd G$، آنگاه $HK\lhd\lhd G$.

اثبات.

الف) اگر $m=1$، آنگاه $H\lhd G$ و بنابراین $[G,H]\leq H$. فرض کنید حکم برای تمام گروههایی با شاخص زیرنرمال کمتر از m برقرار باشد. در این صورت نشان می دهیم حکم برای G، با شاخص زیرنرمال m هم برقرار است. طبق فرض $H\overset{m}{\lhd}G$، لذا یک سری زیرنرمال به صورت $H=H_0\lhd H_1\lhd\ldots\lhd H_m=G$ وجود دارد. بنا به فرض استقرا

$$[G,_mH]=[[G,_{m-1}H],H]\leq[[G,_{m-1}H_1],H]\leq[H_1,H]\leq H .$$

ب) چون $H\lhd\lhd G$، پس سری زیرنرمال $H=H_0\lhd H_1\lhd\ldots\lhd H_n=G$ وجود دارد. سری زیرنرمال زیر را در نظر می گیریم

$$HK=H_0K\lhd H_1K\lhd\ldots\lhd H_nK=GK=G .$$

بنابراین HK، حداکثر n-زیرنرمال است.$\blacksquare$

۱-٤. گروههای اِنگل

عنصر x از G را عنصر انگل راست[1] می نامیم، هرگاه برای هر $g \in G$، عنصر $n = n(x,g) \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $[x,_n g] = 1$. اگر n به طور مستقل از g انتخاب شود، آنگاه x یک عنصر n-انگل راست، یا به طور خلاصه، عنصر انگل راست کراندار[2] از G نامیده می شود.

مجموعه تمام عناصر انگل راست و عناصر انگل راست کراندار از G را به ترتیب با $R(G)$ و $\overline{R(G)}$ نمایش می دهیم.

به طور مشابه، عنصر x از Gرا عنصر انگل چپ[3] می نامیم، هرگاه برای هر $g \in G$، عنصر $n = n(x,g) \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $[g,_n x] = 1$. اگر n به طور مستقل از g انتخاب شود، آنگاه x یک عنصر n-انگل چپ، یا به طور خلاصه، عنصر انگل چپ کراندار[4] از G، نامیده می شود.

مجموعه تمام عناصر انگل چپ و عناصر انگل چپ کراندار از گروه G، را به ترتیب با $L(G)$ و $\overline{L(G)}$ نمایش می دهیم.

اینکه آیا این چهار زیرمجموعه، همیشه زیرگروه هستند، یک مسئله حل نشده است. اگر چه بدیهی است که زیرمجموعه های نرمالی از G می باشند. قضیه زیر رابطه بین عناصر انگل راست و چپ را بیان می کند.

قضیه ۱-٤-۱. در گروه دلخواه G، معکوس هر عنصر انگل راست، یک عنصر انگل چپ است و معکوس هر عنصر n-انگل راست، یک عنصر $(n+1)$- انگل چپ است.

اثبات. به قضیه ۷-۱-۱ در[۲۰]، مراجعه شود. ■

تعریف ۱-٤-۲. اگر G یک گروه دلخواه و تساویهای $L(G) = G$ و $R(G) = G$ برقرار باشد، آنگاه G یک گروه انگل نامیده می شود.

---
[1] Right Engel element
[2] Bounded right Engel element
[3] Left Engel element
[4] Bounded left Engel element