دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

نشدنی بودن و تصحیح نشدنی در مسائل برنامه‌ریزی خطی

نگارش

حسین زارع مرزونی

استاد راهنما

دکتر محمدرضا صافی

استاد مشاور

دکتر جواد دمیرچی

مهرماه ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

و خواهران مهربانم

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی حالت نشدنی در مسائل برنامه ریزی خطی می‌پردازیم. الگوریتم‌هایی برای تشخیص قیود مؤثر در نشدنی بودن ارائه می‌شوند و به تصحیح نشدنی بودن در مسائل بهینه سازی به کمک برنامه‌ریزی آرمانی و روش‌های فازی می‌پردازیم. همچنین نشدنی بودن در برنامه‌ریزی آرمانی فازی را نیز بررسی قرار می‌دهیم.

کلیدواژه:

تصحیح نشدنی، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی خطی فازی، برنامه‌ریزی چندهدفه، برنامه‌ریزی آرمانی، برنامه‌ریزی آرمانی فازی.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

در مسائل برنامه‌ریزی خطی گاهی ممکن است که قیود با هم ناسازگار بوده و در نتیجه مسئله جواب شدنی نداشته باشد. در تئوری به سادگی می‌گوییم که مسئله جواب ندارد، ولی در دنیای واقعی نمی‌توان براحتی از این امر گذشته و باید به گونه‌ای مسئله حل شود. در این وضعیت مجبور هستیم که با تغییرات در قیود، یک فضای شدنی برای مسئله بیابیم تا مسئله دارای جواب باشد. آنالیز نشدنی در مسائل برنامه‌ریزی ریاضی از دو جنبه بررسی می‌شود: (۱) تشخیص نشدنی برای یافتن قیودی که با یکدیگر ناسازگار هستند. (۲) تصحیح نشدنی برای تغییرات در مدل تا شدنی شود. هر چند اغلب تألیفات در آنالیز شدنی، به جنبه اول اختصاص دارد[۲۸، ٦، ۵، ۷، ۱۸، ۱۹، ۱۰]، تعداد کمی هم از تحقیقات در مورد تصحیح نشدنی است [۱۴، ۱۳، ۲۰، ١٦]. تکنیکهای توسعه یافته برای شناخت نشدنی ممکن است برای تصحیح نشدنی بصورت عملی مفید نباشند. در بسیاری از مقالات، یک مجموعه قیود نشدنی که هر زیرمجموعه سره از آن شدنی است و **IIS** نامیده می‌شوند، مورد توجه قرار گرفته راه‌های عملی برای تشخیص **IIS** در این مقالات یافت می‌شود. یک مسئله نشدنی شامل یک یا چند **IIS** است و اگر بخواهیم این مسئله نشدنی را تصحیح کنیم، باید حداقل یک قید از هر **IIS** را حذف و یا تغییر دهیم.

این پایان نامه مشتمل بر هر دو جنبه در آنالیز نشدنی است، به این صورت که در فصل ۲ به مبحث **IIS** در شناخت نشدنی پرداخته شده و در فصل‌های ۳ و ۴و ۵ به تصحیح نشدنی می‌پردازد. در فصل ۳ یک روش فازی برای تصحیح نشدنی ارائه می‌شود. در فصل ۴ از برنامه‌ریزی آرمانی برای تصحیح نشدنی استفاده می‌شود. در فصل ۵ تصحیح نشدنی در برنامه‌ریزی آرمانی فازی بررسی می‌شود.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱—۱ برنامه‌ریزی خطی تک هدفه

برنامه‌ریزی خطی با مسائلی سروکار دارد که یک تابع را با یک سری از محدودیتها بیشینه یا کمینه می‌کند. برنامه‌ریزی تک هدفه بصورت کلی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min(\max) \quad & \{z = f(x)\} \\ s.t. \quad & x \in S \end{aligned} \tag{۱—۱}$$

که در آن $f(x)$ تابع هدف و S ناحیه شدنی است. در حالت خطی این مسئله به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ s.t. \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{۲—۱}$$

که در آن c بردار ضرایب هزینه تابع هدف، b بردار منابع، x بردار متغیرهای تصمیم و A ماتریس ضرایب تکنولوژیکی است.

دوگان مسئله (۱−۲) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ s.t. \quad & wA \leq c \\ & w \geq \circ \end{aligned} \qquad (۱-۳)$$

قضیه ۱−۱−۱ (**ضعیف دوگان**) فرض کنید مسئله اولیه و دوگان آن به ترتیب (۱−۲) و (۱−۳) باشد. اگر $x_\circ$ و $w_\circ$ به ترتیب جواب‌های شدنی دلخواه برای مسئله‌های اولیه و دوگان باشند، آنگاه $w_\circ b \leq cx_\circ$.

اثبات: به مرجع [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۱−۱−۲ (**قوی دوگان**) اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان جواب بهینه داشته باشد ، آنگاه هر دو مسئله جواب بهینه دارند و مقادیر تابع هدف بهینه‌ی آنها برابر هستند.

اثبات: به مرجع [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۱−۱−۳ (**مکمل زائد**) فرض کنید $x^\star$ و $w^\star$ جواب‌های شدنی دلخواه مسائل اولیه و دوگان بصورت (۱−۲) و (۱−۳) باشند. آنگاه این دو جواب بهینه هستند اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} (c_j - w^\star a_j)x_j^\star = \circ, \quad & j = ۱, \cdots, n \\ w_i^\star(a^i x^\star - b_i) = \circ, \quad & i = ۱, \cdots, m \end{aligned} \qquad (۱-۴)$$

اثبات: به مرجع [۱] مراجعه شود. □

یادآوری می‌شود مجموعه $S \subset \Re^n$ محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x^۲ \in S$ و $x^۱$ و همچنین $\lambda \in [\circ, ۱]$ داشته باشیم $x = \left(\lambda x^۱ + (۱-\lambda)x^۲\right) \in S$.در اینصورت x را یک ترکیب محدب $x^۱$ و $x^۲$

گویند. مجموعه تمام ترکیب‌های محدب x^1 و x^2 را با $\gamma(x^1, x^2)$ نشان می‌دهند. در واقع یک مجموعه محدب است هنگامیکه همه نقاط روی خط واصل بین دونقطه دلخواه مجموعه، بازهم در مجموعه باشد.

۱—۲ نرم و متریک

در این بخش به معرفی نرم و متریک می‌پردازیم. نُرم اندازه بردار و متریک اندازه فاصله بین نقاط در $\Re^n$ است.

۱—۲—۱ نرم L_p

تعریف ۱—۲—۱ یک نرم در $\Re^n$ تابعی است که به هر بردار $v \in \Re^n$ اسکالری مانند $\|v\|$ در $\Re$ نسبت می‌دهد با این شرط که این تابع برای هر $w \in \Re^n$ و هر $k \in \Re$ خواص زیر را داشته باشد:

۱) $\|v\| \geq 0$.

۲) $\|v\| = 0$ اگر و فقط اگر $v = \bar{0}$.

۳) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

۴) $\|kv\| = |k|.\|v\|$.

برای بردار دلخواه $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ در $\Re^n$ نرم l_p بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|v\|_p = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} & p \in \{1, 2, 3, \cdots\} \\ \max\{|v_i|\}\ (i = 1, 2, \cdots, n) & p = \infty \end{cases}$$

با تقسیم هر مؤلفه‌ی بردار به نرم بردار، بردار نرمال شده بدست می‌آید. طول بردار نرمال شده برابر یک است.

۱–۲–۲ متریک l_p

تعریف ۱–۲–۲ یک متریک در فضای $\Re^n$ تابعی فاصله‌ای است که به هر زوج بردار $x, y \in \Re^n$ یک اسکالر $\|x-y\| \in \Re$ نسبت می‌دهد، هرگاه خواص زیر را برقرار نماید:

۱) $\|x-x\| = ۰$.

۲) $\|x-y\| = \|y-x\|$.

۳) $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$.

۴) اگر $x \neq y$، آنگاه $\|x-y\| > ۰$.

برای دو نقطه $x, y \in \Re^n$ متریک l_p بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x-y\|_p = \begin{cases} \left[\sum_{i=۱}^{n} |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{۱}{p}} & p \in \{۱, ۲, ۳, \cdots\} \\ \max\{|x_i - y_i|\}\ (i = ۱, ۲, \cdots, n) & p = \infty \end{cases}$$

که در آن x_i ها و y_i ها بترتیب مؤلفه‌های x و y هستند.

۱–۲–۳ متریک وزنی l_p

برای دو بردار $x, y \in \Re^n$ متریک وزنی l_p بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x-y\|_p^w = \begin{cases} \left[\sum_{i=۱}^{n} w_i |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{۱}{p}} & p \in \{۱, ۲, ۳, \cdots\} \\ \max\{w_i |x_i - y_i|\}\ \ (i = ۱, ۲, \cdots, n) & p = \infty \end{cases}$$

که $w \in \Re^n$ یک بردار وزنی با عناصر نامنفی است.

مثال ۱−۲−۳ فرض کنید $x = (۱, ۴, -۳)$، $y = (۶, ۳, -۴)$ و $w = (۰/۲, ۰/۳, ۰/۵)$. آنگاه

$$\|x-y\|_{۱}^{w} = ۰/۲|۱-۶| + ۰/۳|۴-۳| + ۰/۵|-۳+۴| = ۱/۸$$

$$\|x-y\|_{۲}^{w} = \sqrt{(۰/۲|۱-۶|)^{۲} + (۰/۳|۴-۳|)^{۲} + (۰/۵|-۳+۴|)^{۲}} = ۱/۱۵۸$$

$$\|x-y\|_{\infty}^{w} = \max\{۰/۲|۱-۶| + ۰/۳|۴-۳| + ۰/۵|-۳+۴| = ۱$$

۱−۳ برنامه ریزی چندهدفه

برنامه‌ریزی تک هدفه بطور گسترده از بیش از ۶۰ سال گذشته مورد مطالعه قرار گرفته است. روشهای تصمیم گیری تک هدفه بازخورد دنیای قدیمی تر و ساده تر هستند ولی در جهان امروز مسائل پیچیده تر شده است و همواره به مسائلی بر می‌خوریم که بیش از یک هدف در آن دیده شود. مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه (MOP[۱]) بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{MOP}) & \max\{f_{۱}(x) = z_{۱}\} \\ & \max\{f_{۲}(x) = z_{۲}\} \\ & \vdots \\ & \max\{f_{k}(x) = z_{k}\} \\ & s.t. \qquad x \in S. \end{array}$$

که در آن S فضای جواب و f_i ها $i = ۱, ۲, \cdots, k$ توابع هدف یا معیارها هستند.

مثالی از توابع هدف در برنامه‌ریزی چند هدفه، تولید هات داگ است که به صورت زیر است:

min {هزینه}

min {چربی}

max {پروتئین}

min {میزان خشک نبودن محصول}

[۱] multiple objective problem

$\min$ {میزان گوشت}

که معیارها در این مثال بصورت صرفه اقتصادی (کمینه هزینه و گوشت) و ارزش غذایی (بیشینه پروتئین و کمینه چربی) و کیفیت (کمینه تر بودن هات داگ) در نظر گرفته شده است.

۱-۳-۱ مفاهیم پایه‌ای در برنامه‌ریزی خطی چند هدفه

در وضعیت خطی، مسئله (MOP) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = Cx \\ s.t. \quad & x \in S = \{x \in \Re^n | Ax \le b, \quad x \ge 0\} \end{aligned} \qquad (۱-۵)$$

که در آن $A \in \Re^{m\times n}$ ، $b \in \Re^m$ ، $x \in \Re^n$ ، $C = (c_1, \cdots, c_k)^T \in \Re^{k\times n}$ ، $c_j^T \in \Re^n (j = 1, \cdots, k)$ ، $z(x) = (z_1(x), \cdots, z_k(x))^T = (c_1 x, \cdots, c_k x)^T \in \Re^k$.

تعریف ۱-۳-۱ اگر $x^\star \in S$ وجود داشته باشد بطوری که همزمان تمام $z_j(x)$ ها $(j = 1, \cdots, k)$ را بهینه کند، $x^\star$ را جواب بهینه کامل [1] گویند.

معمولا در مسائل عملی چنین جوابی وجود ندارد. لذا جوابی موسوم به کارا را به عنوان جواب (۱-۵) در نظر می‌گیرند، که بصورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱-۳-۲ $x^\star \in S$ را یک جواب کارا [2]ی مسئله (۱-۵) گویند هرگاه $x \in S$ وجود نداشته باشد که برای بعضی $1 \le l \le k$ ، $z_l(x) < z_l(x^\star)$ و برای $j = 1, \cdots, k$ ، $z_j(x) \le z_j(x^\star)$.

تعریف ۱-۳-۳ $x^\star \in S$ را یک جواب کارای ضعیف [3] مسئله (۱-۵) گویند هرگاه $x \in S$ وجود نداشته باشد به طوری که $z_i(x) < z_i(x^\star)$ برای $i = 1, \cdots, k$.

---
[1] Complete Optimal Solution
[2] Efficient Solution
[3] Weak Efficient Solution

چند روش محاسباتی برای مشخص کردن جوابهای کارا وجود دارد که در زیر به نمونه‌ای از آنها اشاره شده است. برخی دیگر از این روشها را می‌توان در مرجع [۲۵] مشاهده نمود.

۱–۳–۲ روش وزنی–جمعی برای پیدا کردن جوابهای کارا

در این روش به هر تابع هدف z_j عدد $w_j \in \Re^+$ به عنوان وزن یا اهمیت آن تابع، توسط تصمیم گیرنده ارائه و منتهی به حل مسئله زیر می‌گردیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & wz(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i z_i(x) \\ s.t. \quad & x \in S \end{aligned} \tag{۱–۶}$$

که $w = (w_1, \cdots, w_k)$ بردار مضارب وزنی است و $w_i \geq 0 (i = 1, \cdots, k)$، $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$.

قضیه ۱–۳–۴ برای هر بردار $w = (w_1, \cdots, w_k) > 0$، جواب بهینه مسئله‌ی وزنی–جمعی (۱–۶)، یک جواب کارا برای مسئله (۱–۵) است.

اثبات: فرض کنیم $x^\star$ یک جواب بهینه مسئله‌ی وزنی–جمعی (۱–۶) باشد. ولی یک جواب کارا برای مسئله (۱–۵) نباشد، در اینصورت $x \in S$ وجود دارد بطوری که برای $i = 1, \cdots, k$، $z_i(x) \leq z_i(x^\star)$ و بعضی j ها $z_j(x) < z_j(x^\star)$ برای $i \neq j$. چون $w = (w_1, \cdots, w_k) > 0$، لذا $\sum_i w_i z_i(x) < \sum_i w_i z_i(x^\star)$ و این در تناقض با بهینه بودن $x^\star$ است. □

توجه کنید که‌در قضیه ۱–۳–۴، اگر $w \geq 0$ فرض شود باید شرط یکتایی برای جواب بهینه برقرار باشد.

قضیه ۱–۳–۵ برای هر جواب کارای $x^\star$ مسئله‌ی (۱–۵) ، یک بردار $w \geq 0$ یافت می‌شود که $x^\star$ جواب بهینه مسئله‌ی وزنی–جمعی نظیر w باشد.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم که $x^\star$ جواب بهینه مسئله‌ی برنامه ریزی خطی زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1}^T Cx \\ s.t. \quad & Cx \le Cx^\star \\ & Ax \le b, x \ge 0 \end{aligned} \tag{۱−۷}$$

که $\mathbf{1}^T$ بردار k بعدی با مؤلفه‌های ۱ است.

اگر $x^\star$ جواب بهینه مسئله‌ی (۱−۷) نباشد ، در این صورت $x \in S$ وجود دارد بطوری که $Cx \le Cx^\star$ و $\mathbf{1}^T Cx < \mathbf{1}^T Cx^\star$، یعنی $x \in S$ وجود دارد که

$$\mathbf{1}^T Cx = \sum_{i=1}^k c_i x < \sum_{i=1}^k c_i x^\star = \mathbf{1}^T Cx^\star, \quad c_i x \le c_i x^\star, \quad i = 1, \cdots, k$$

یا بطور معادل برای بعضی j ها $c_j x < c_j x^\star$ و $c_i x \le c_i x^\star$ برای $i = 1, \cdots, k$. که در تناقض با کارا بودن $x^\star$ است، لذا $x^\star$ جواب بهینه مسئله (۱−۷) است. حال دوگان مسئله اخیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \max \quad & (-b^T, -x^{\star T} C^T) y \\ s.t. \quad & (-A^T, -C^T) y \le C^T \mathbf{1} \\ & y \ge 0 \end{aligned} \tag{۱−۸}$$

با توجه به قضیه دوگان قوی، جواب بهینه $y^\star$ برای (۱−۸) وجود دارد و $(-b^T, -x^{\star T} C^T) y^\star = \mathbf{1}^T Cx^\star$. اگر $y^{\star T} = (y_1^{\star T}, y_2^{\star T})$ باشد آنگاه $(\mathbf{1}^T + y_2^{\star T}) Cx^\star = -b^T y_1^\star$.
حال اگر قرار دهیم $w := \mathbf{1} + y_2^\star$ آنگاه برای هر $x \in S$ داریم $\sum_{i=1}^k w_i c_i x = w^T Cx = (\mathbf{1} + y_2^\star)^T Cx$.
لذا مسئله (۱−۶) بصورت زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \min \quad & (\mathbf{1} + y_2^\star)^T Cx \\ s.t. \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{۱−۹}$$

و دوگان مسئله (۱−۹) بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T u \\ s.t. \quad & -A^T u \leq C^T(۱ + y_۲^\star) \\ & u \geq ۰ \end{aligned} \qquad (۱۰-۱)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $x = x^\star$ و $u = y_۱^\star$ به ترتیب جواب‌های شدنی برای مسائل (۱—۹) و (۱—۱۰) هستند و مقدار توابع هدف این دو مسئله با هم برابر هستند.

لذا برای هر $x \in S$ داریم

$$\sum_{i=۱}^k w_i c_i x^\star = (۱ + y_۲^\star)^T C x^\star \leq (۱ + y_۲^\star)^T C x = \sum_{i=۱}^k w_i c_i x.$$

بنابراین $x^\star$ جواب بهینه مسئله وزنی—جمعی برای $w = (w_۱, \cdots, w_k) \geq ۰$ است. □

۱—۴ برنامه‌ریزی آرمانی

اولین بار برنامه‌ریزی آرمانی [۱] (GP) توسط Charnes و Cooper ارائه شد [۴]. اگر تصمیم‌گیرنده در برنامه‌ریزی چندهدفه، به هر تابع هدف یک حد آرمانی (مقدار آستانه‌ای) اختصاص دهد و بعنوان مثال خواستار سود بیشتر از یک مقدار در یک تابع هدف، و هزینه‌ای کمتر از یک حد آرمانی یا برابر یک حد آرمانی در توابع هدف دیگر باشد، در اینصورت شاهد یک مسئله برنامه‌ریزی آرمانی می‌باشیم. ممکن است تصمیم‌گیرنده به هر تابع هدف مطابق زیر یک حد آرمانی اختصاص دهد:

آرمان $\{c^۱ x = z_۱\} \quad (z_۱ \geq t_۱)$

آرمان $\{c^۲ x = z_۲\} \quad (z_۲ \leq t_۲)$

آرمان $\{c^۳ x = z_۳\} \quad (z_۳ = t_۳)$

آرمان $\{c^۴ x = z_۴\} \quad (z_۴ \in [t_۴^l, t_۴^u])$

---

[۱] Goal Programming

که t_i ها حدود آرمانی هستند. در واقع هر تابع هدف یک آرمان در نظر گرفته شده و این آرمان‌ها با یک مقدار آستانه‌ای مشخص می‌شوند.

معمولاً نقطه‌ای که همه‌ی آرمان‌ها را برآورده می‌کند، نقطه‌ای شدنی نیست. از اینرو تلاش می‌کنیم که نقطه‌ای شدنی در نزدیک‌ترین حالت ممکن برای دستیابی به آرمان‌ها را بیابیم.

تذکر ۱—۴—۱ در مسائل چندهدفه به S ناحیه شدنی در فضای تصمیم و Z ناحیه شدنی در فضای معیار گویند.

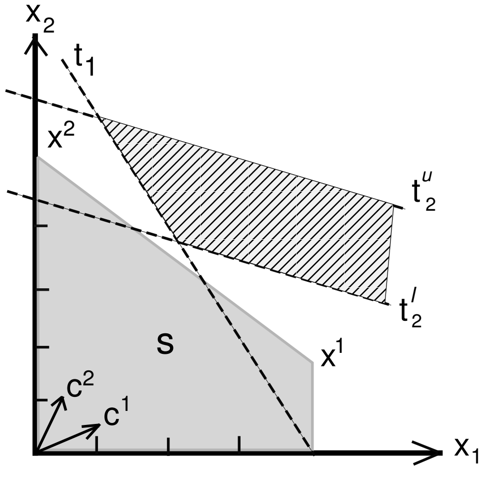
مثال ۱—۴—۲ GP زیر را در نظر بگیرید.

آرمان $\{c^{۱}x = z_{۱}\} \qquad (z_{۱} \ge t_{۱})$

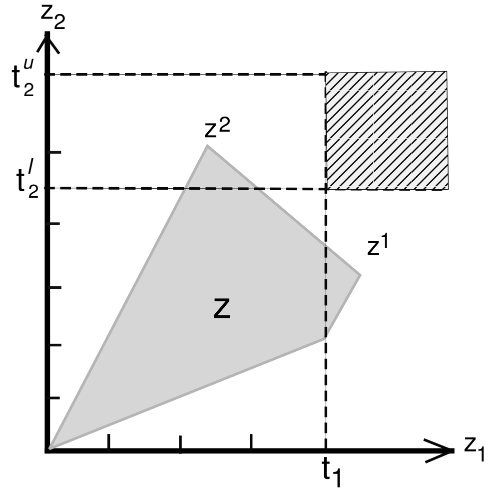
آرمان $\{c^{۲}x = z_{۲}\} \qquad (z_{۲} \in [t^{l}_{۲}, t^{u}_{۲}])$

$s.t. \qquad x \in S$

که در آن $c^{۱} = (۱, \frac{۱}{۲})$، $c^{۲} = (\frac{۱}{۲}, ۱)$ و محدودیت‌های مسئله برابر $x_{۱} + x_{۲} \le ۵$، $x_{۱} \le ۴$، $x_{۲} \ge ۰$ و $x_{۱}$ است. و نقاط رأسی فضای شدنی در فضای تصمیم برابر $x^{۱} = (۴, ۱)$، $x^{۲} = (۰, ۵)$ است. فضای تصمیم آن در شکل ۱—۱—۱ نشان داده شده است.



شکل ۱—۱—۱: فضای تصمیم مثال ۱—۴—۲



شکل ۱—۱—۲: فضای معیار مثال ۱—۴—۲

در شکل ۱—۱—۱، ناحیه هاشور خورده، مجموعه ایده‌آل در فضای تصمیم است. این مجموعه شامل