بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری (جهت اخذ درجه Ph.D)

ریاضی محض (جبر – نظریه حلقه و مدول)

عنوان:

بررسی مدول های δ–مکمل پذیر تعمیم یافته و کاربردهای آن در مدول های $D_{۱۱}$ و $D_{۱۱}^{+}$

استاد راهنما:

دکتر یحیی طالبی

اساتید مشاور:

پروفسور رضا عامری

دکتر علی اصغر طالبی

نگارش :

بهنام طلایی فیروزجایی

۱۳۹۰

قدردانی و تشکر

قبل از هر چیز از خداوند بزرگ سپاسگزارم که بنده را مورد لطف خودش قرار داده و توکل بر او همیشه قوت قلب بزرگی برای بنده حقیر بوده است .

سپس از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتریحیی طالبی صمیمانه و خالصانه تشکر می کنم که با راهنمایی های بجا و شایسته شان بنده را در تدوین این رساله یاری نمودند و در طول دوران تحصیل نه تنها به عنوان یک استاد علمی بلکه یک استاد اخلاق نیز برای بنده بوده اند.

همچنین از اساتید مشاورم جناب آقای پروفسور رضا عامری و جناب آقای دکتر علی اصغر طالبی کمال سپاسگزاری را دارم.

از گروه ریاضی دانشگاه مازندران نیز به خاطر فراهم کردن شرایط کار و تحقیقات تشکر می کنم .

در پایان از خانوادهٔ عزیزم که همواره حامی و پشتیبان بنده بوده اند، سپاسگزارم.

تقدیم به:

- پدر و مادر عزیزم که مشوقین اصلی من در تحصیل علم بودند؛

- و همسر گرامی ام که باعث دلگرمی بنده در کارم بودند.

چکیـده

فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. زیرمدول K از M را یک زیرمدول $\delta-$ناچیز از M گوییم هرگاه برای هر زیرمدول N از M به طوری که M/N یک مدول منفرد است داشته باشیم $N + K \neq M$. در این رساله نشان خواهیم داد هر جمعوند مستقیم از یک مدول در آن $\delta-$هم بسته ضعیف است. اگر K یک زیرمدول $\delta-$ناچیز از M بوده و N یک زیرمدول $\delta-$هم بسته ضعیف از M باشد به طوری که $K \subseteq N$، آنگاه نشان می دهیم K یک زیرمدول $\delta-$ناچیز از N نیز می باشد.
مدول های $\delta - GS$ را در این رساله تعریف کرده و خواصی برای این نوع از مدول ها بدست می آوریم. نشان می دهیم هر مدول $\delta - GS$ با دلتای صفر یک مدول نیمه ساده است. همچنین هر مدول $\delta - GS$ دارای تجزیه ای است که یکی از جمعوندها نیمه ساده و دیگری دارای دلتایی اساسی است.

کلمات کلیدی: مدول $Rad-$تصویری، زیرمدول $\delta-$ناچیز، مدول $\delta-$مکمل پذیر، مدول $\delta-$ بالابرنده، زیرمدول $\delta-$هم بسته، مدول $\delta - D_{11}$، مدول $\delta - D_{11}^{+}$، مدول $\delta-$مکمل پذیر تعمیم یافته، مدول $\delta-$مکمل پذیر تعمیم یافته ضعیف.

فهرست مندرجات

مقدمه

در بحث نظریه حلقه و مدول، مطالعه مدول های تزریقی و تصویری از اهمیت بسزایی برخوردار می باشد. در مطالعه این دو رده از مدول ها که به عنوان دوگان هم مطرح می باشند به دسته زیادی از مدول های وابسته به این دو رده برخورد می کنیم. به عنوان مثال به عنوان تعمیمی از مدول های تزریقی، مدول های پیوسته (مدول دارای شرط C_1 و C_2)، مدول های شبه پیوسته (مدول دارای شرط C_1 و C_3) و مخصوصاً مدول های توسیعی (مدول دارای شرط C_1) مطرح شده و بحث های مختلفی راجع به این رده از مدول ها مطرح شده و توسط افراد زیادی مورد مطالعه قرار گرفته اند. بدیهی است که هر مدول پیوسته یک مدول شبه پیوسته و هر مدول شبه پیوسته یک مدول توسیعی می باشد. در شاخه مدول های تزریقی ثابت شده است که هر مدول شبه تزریقی (خود تزریقی) یک مدول پیوسته می باشد. این حکم بسیار قوی که در واقع بیان می کند مدول های پیوسته و شبه پیوسته و توسیعی به عنوان تعمیمی از مدول های تزریقی مطرح می باشند، در شاخه مدول های تزریقی از اهمیت فراوان برخوردار است و با استفاده از آن نتایج جالب راجع به این رده ها از مدول ها بدست آمده است.

به عنوان دوگان شرایط C_1، C_2 و C_3، شرایط D_1، D_2 و D_3 مطرح می شوند و لذا مدول های بالابرنده (مدول دارای شرط D_1) به عنوان دوگان مدول های توسیعی، مدول های شبه گسسته (مدول دارای شرط D_1 و D_3) به عنوان دوگان مدول ها شبه پیوسته، و بالاخره مدول های گسسته (مدول دارای شرط D_1 و D_2) به دوگان مدول های پیوسته مطرح می شوند.

به دلایل مختلف کارهای تحقیقاتی در شاخه مدول های بالابرنده بیشتر از کارهای تحقیقاتی

در شاخه مدول های توسیعی است و در شاخه مدول ها بالابرنده تعمیم های مختلفی از این رده از مدول ها مطرح می شوند که در شاخه دوگان قابل تعریف نیستند. به عنوان مثال دوگان مطلب "هر مدول شبه تزریقی (خود تزریقی) یک مدول پیوسته می باشد" صادق نیست. حتی مدول تصویری وجود دارد که بالابرنده نمی باشد.

همچنین زیرمدول های متمم و بسته همواره موجود و یکسانند در حالیکه در مقابل زیرمدول های مکمل و هم بسته لزوماً موجود نمی باشند و یک زیرمدول هم بسته لزوماً مکمل نمی باشد. وجود نداشتن زیرمدول های مکمل سبب تعریف مدول های مکمل پذیر و تعمیم های مختلفی از آن شده است که همه آنها به عنوان تعمیمی از مدول های بالابرنده مطرح می باشند. در حالیکه تعریف مدول های متمم پذیر بی معناست.

از جمله دلایل دیگر گستردگی دامنه کارهای تحقیقات در شاخه مدول های تصویری این است که در شاخه مدول های تزریقی، **غلاف تزریقی** [1] برای یک مدول همواره موجود است اما در مقابل پوشش تصویری لزوماً موجود نمی باشد و این خود سبب تعریف حلقه های کامل (حلقه ای که مدول های آن دارای پوشش تصویری باشند) و حلقه های نیمه کامل (حلقه هایی که هر مدول متناهیاً تولید شده آن دارای پوشش تصویری باشد) و تعمیم های بسیار فراوان از این رده از حلقه ها شده است.

ما نیز در این رساله در شاخه مدول های تصویری و بالابرنده و مکمل پذیر و مفاهیمی در این ارتباط به مطالعه پرداخته و رده های جالبی از مدول ها و زیرمدول ها را مطرح کرده و به بررسی خواص آنها پرداختیم.

ابتدا در فصل دوم تعمیمی از مدول های تصویری تحت عنوان Rad—تصویری را مورد

---

[1] injective hull

مطالعه قرار داده و مدول هایی که نسبت به رادیکال یک مدول تصویری باشند را تحت عنوان مدول های به طور ضعیف Rad—تصویری مطرح می کنیم. از جمله نتایج بدست آمده در این فصل این است که برای یک مدول M، $Rad(M)$ یک جمعوند مستقیم از M است اگر وتنها اگر هر مدول به طور ضعیف $Rad-M$—تصویری باشد.

مرجع [٦] یکی از کتاب های بسیار جامع در زمینه مدول های بالابرنده و مکمل پذیر می باشد و اکثر تحقیقات مهم انجام شده راجع به این رده از مدول ها تا سال ٢٠٠٦ به طور مفصل در این کتاب آمده است که افراد علاقمند می توانند از این کتاب به عنوان یک مرجع کامل استفاده کنند.

ژو [٢] در سال ٢٠٠٠([٣٧]) زیرمدول های δ—ناچیز را به عنوان تعمیمی از زیرمدول های ناچیز با در گیر کردن زیرمدول منفرد از یک مدول مطرح کرد. وی در آن مقاله به معرفی و بررسی حلقه های δ—کامل و δ—نیمه کامل و δ—نیمه منظم پرداخت.

رده زیرمدول های δ—ناچیز سبب انجام تحقیقات فراوان در این راستا شده است که از جمله می توان به [١]، [١٦]، [١٧] و [٣٢] اشاره کرد.

در فصل های ٣ و ۴ و ۵ ما با استفاده از مفهوم زیرمدول δ—ناچیز رده های مختلفی از مدول ها و زیرمدول ها را معرفی کرده و خواص آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم.

در فصل سوم زیرمدول های δ—هم اساسی، δ—هم بسته و δ—هم بسته ضعیف را معرفی کرده و نتایجی جالب برای این دسته از زیرمدول ها بدست می آوریم. از جمله در این فصل نشان می دهیم:

---

[٢] Y. Zhou

۱) برای $K \leq L \leq M$ داریم K یک زیرمدول δ—هم اساسی از L در M است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول X از M به شرطی که M/X یک مدول منفرد باشد، از $L + X = M$ نتیجه شود $K + X = M$.

۲) هرگاه $X \leq N \leq M$ به طوری که $X \ll_\delta M$ و N یک زیرمدول δ—هم بسته از M باشد، آنگاه $X \ll N$.

۳) هرگاه $K \leq L \leq M$ و L یک زیرمدول δ—هم بسته از M باشد، آنگاه L/K یک زیرمدول δ—هم بسته از M/K است.

در فصل چهارم مدول های $\delta - D_{۱۱}$ و $\delta - D_{۱۱}^{+}$ مطرح خواهند شد. در این فصل خواصی جالب برای این رده از مدول ها بدست آورده و ارتباط این نوع از مدول ها را با زیرمدول های δ—هم بسته و δ—هم بسته ضعیف بررسی می کنیم. در این فصل نشان می دهیم که هر مدول $\delta - D_{۱۱}$ دارای تجزیه است که یکی از جمعوندها دارای دلتایی ناچیز و دیگری دارای دلتایی برابر با خودش می باشد.

همچنین در این فصل ثابت می کنیم که هر جمعوند از یک مدول $\delta - D_{۱۱}$ با خاصیت اشتراک جمعوند، یک مدول $\delta - D_{۱۱}$ می باشد.

ازجمله نتایج جالب دیگر بدست آمده در این فصل این است که هر کسری از مدول $\delta - D_{۱۱}$ به وسیله یک زیرمدول **کاملاً پایا** [۳] مجدداً یک مدول $\delta - D_{۱۱}$ است.

در انتها مدول های $\delta - D_{۱۱}^{+}$ را دراین فصل معرفی کرده و نشان می دهیم هر مدول $\delta - D_{۱۱}$ به همراه یکی از شرایط زیر یک مدول $\delta - D_{۱۱}^{+}$ می باشد:

---

[۳] fully invariant

(۱) یک مدول با شرط $D_۳$

(۲) یک مدول UC و توسیعی

(۳) یک مدول چند شکل و توسیعی

(۴) یک مدول چندشکل و به طورموضعی با بعد متناهی و شبه تزریقی

در فصل پنجم مدول های $\delta - GS$، $\delta - GAS$ و $\delta - GWS$ را معرفی می کنیم و به بررسی خواص این رده از مدول ها می پردازیم. در انتهای این فصل شرایط زنجیری روی مدول های $\delta - GS$ را مورد تحلیل قرار می دهیم. از جمله نتایج بدست آمده در فصل پنجم عبارتند از:

۱) هر مدول $\delta - GS$ با دلتای صفر یک مدول نیمه ساده است.

۲) هر مدول $\delta - GS$ دارای تجزیه ای است که یکی از جمعوند ها نیمه ساده بوده و دیگری دارای دلتایی اساسی است.

۳) مجموع تعداد متناهی مدول های $\delta - GS$ و همچنین هر کسری از یک مدول $\delta - GS$ مجدداً یک مدول $\delta - GS$ خواهد بود.

۴) هرگاه M یک مدول $\delta - GAS$ و متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه M آرتینی است اگر وتنها اگر M در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول های δ–ناچیز صدق کند.

۵) هرگاه M یک مدول متناهیاً تولید شده باشد، آنگاه M، $\delta - GWS$ است اگر و تنها اگر M یک مدول δ–مکمل پذیر ضعیف باشد.

در سر تا سر این رساله R نشان دهنده یک حلقه با عنصر همانی ضربی ناصفر است و منظور از مدول، یک $R-$ مدول راست یکانی می باشد. حلقه ها در حالت کلی ناجابجایی هستند، مگر این که خلاف آن تصریح شود. کتگوری $R-$ مدول های راست را با $Mod-R$ نمایش می دهیم. از نمادهای $J(R)$، $Rad(M)$، $Z(M)$ و $E(M)$ به ترتیب برای نشان دادن رادیکال جیکوبسن حلقه R، رادیکال مدول M، زیر مدول منفرد مدول M و غلاف تزریقی مدول M استفاده می کنیم. همچنن $N \subseteq^{\oplus} M$ به این معناست که N یک جمعوند مستقیم از M است.

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل به معرفی مفاهیم ابتدایی که در سراسر این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم. مفاهیم، تعاریف و قضایای این فصل از منابع [۲]، [٦]، [۱۹] و [۳۳] گرفته شده‌اند.

۱.۱ زیر مدول های کوچک و رادیکال جیکوبسن

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید M یک مدول باشد. زیر مدول N از M را کوچک (ناچیز) در M گوییم و با علامت $N \ll M$ نمایش می دهیم، هرگاه به ازای هر زیر مدول سره L از M داشته باشیم $N + L \neq M$ یا به طور معادل، به ازای هر زیر مدول L از M، از $N + L = M$ نتیجه شود $L = M$.

لم ۲.۱.۱ (لم ۴.۲ [۱۹])

فرض کنید $A \leq B$ زیرمدول های مدولی مانند M باشند. احکام زیر برقرارند:

۱) اگر $A \ll B$ آنگاه $A \ll M$؛

۲) اگر $A \ll M$ و B یک جمعوند مستقیم از M باشد آنگاه $A \ll B$؛

۳) اگر $A \ll M$ و $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی باشد آنگاه $f(A) \ll f(M)$.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید M یک مدول باشد. رادیکال جیکوبسن M را با $Rad(M)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Rad(M) = \bigcap\{N \mid \text{است } M \text{ زیر مدول ماکزیمالی از } N\} = \sum\{K \mid K \ll M\}$$

لم ۴.۱.۱ (نتیجه ۱۵.۴ [۲])

اگر R یک حلقه باشد آنگاه $Rad(_RR) = J(R) = Rad(R_R)$.

لم ۵.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد، آنگاه

$J(R) = \{r \in R|$ به ازای هر $s \in R$ ، $1 - rs$ از راست وارون پذیر است $\}$

$= \{r \in R|$ به ازای هر $s \in R$ ، $1 - sr$ از چپ وارون پذیر است $\}$

گزاره ۶.۱.۱ الف)(گزاره ۹.۱۴ [۲]) فرض کنید M و N دو مدول باشند و $f : M \longrightarrow N$ یک $R-$همریختی باشد آنگاه $f(Rad(M) \leq Rad(N)$.

ب) (نتیجه ۱۵.۱۸ [۲]) فرض کنید M یک مدول باشد. آنگاه $MJ(R) \leq Rad(M)$.

گزاره ۷.۱.۱ (گزاره ۹.۱۹ [۲])

اگر $(M_i)_{i \in I}$ یک مجموعه از زیر مدول های M باشد به طوری که $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$، آنگاه $Rad(M) = \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i)$.

تعریف ۸.۱.۱ حلقه R را موضعی نامند هرگاه به ازای هر $x \in R$، x یا $1 - x$ وارون پذیر باشد.

گزاره ۹.۱.۱ (گزاره ۱۵.۱۵ [۲]) موارد زیر برای حلقه R معادلند:

۱) R موضعی است؛

۲) R یک ایده آل منحصر به فرد بیشین راست دارد؛

۳) $J(R)$ ایده آل منحصر به فرد بیشین راست R است.

تعریف ۱۰.۱.۱ گوییم یک تجزیه $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ از مدول M، به عنوان جمع مستقیم زیر مدول های ناصفر $(M_i)_{i\in I}$، جمعوند های مستقیم را کامل می کند، هرگاه برای هر جمعوند مستقیم K از M، زیر مجموعه $J \subseteq I$ موجود باشد به طوری که $M = (\bigoplus_{j\in J} M_j) \oplus K$.

نتیجه ۱۱.۱.۱ (نتیجه ۱۲.۷ [۲]) اگر M دارای یک تجزیه متناهی به صورت $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ باشد به طوری که به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، حلقه درون ریختی $End(M_i)$ موضعی باشد، آنگاه این تجزیه از M جمعوندهای مستقیم را کامل می کند.

۲.۱ زیر مدول های اساسی، متمم و بسته وساکل یک مدول

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید M یک مدول باشد. یک زیر مدول A از M را اساسی (بزرگ) در M نامیده و با نماد $A \leq^e M$ نمایش می دهیم هرگاه به ازای هر زیر مدول نا صفر K از M، $A \cap K \neq 0$ برقرار باشد، در این حالت M را یک توسیع اساسی از A می نامیم. مدول نا صفر M را یکنواخت می نامیم هرگاه هر زیر مدول نا صفر از M در M اساسی باشد.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید M یک مدول باشد، ساکل M که با $Soc(M)$ نمایش داده می شود عبارتست از اشتراک همه زیرمدول های اساسی M.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید M یک مدول و $A = \{A_i\}_{i \in I}$ یک رده از مدول ها باشد. تریس مدول M نسبت به کلاس A عبارتست از مجموع تصویر مستقیم تمام همریختی ها از مدول های موجود در A به M و با $Tr_M(A)$ نمایش داده می شود.

در مرجع [۲] نشان داده شده است که $Soc(M)$ دقیقا برابراست با مجموع همه زیرمدول های کمین مدول M و بنابراین می توان گفت $Soc(M)$ عبارتست از تریس مدول M نسبت به کلاس مدول های ساده.

مدول M را نیمه ساده گوییم هرگاه بصورت مجموع مدول های ساده باشد. لذا ساکل یک مدول همواره یک مدول نیمه ساده می باشد.

همچنین در مرجع [۲] ثابت شده است که مدول M نیمه ساده است اگر و تنها اگر هر زیرمدول آن یک جمعوند مستقیم باشد.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید M یک مدول باشد و N و L زیر مدول های M باشند. N را یک متمم برای L می نامیم هرگاه $N \cap L = 0$ و N نسبت به این خاصیت بیشین باشد. توجه کنید که اگر N یک متمم برای L در M باشد، آنگاه $N \oplus L$ در M اساسی است. با به کارگیری لم زرن[۱] در می یابیم که برای هر زیر مدول L از M همواره یک متمم در M موجود است. در واقع اگر A و B زیر مدول های M باشند به طوری که $A \cap B = 0$ آنگاه B شامل یک متمم برای A در M خواهد بود.

[۱] Zorn's lemma

تعریف ۵.۲.۱ زیر مدول N از M را یک متمم می نامند هرگاه N متمم زیر مدولی از M مانند L باشد.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید M یک مدول باشد. زیر مدول N از M را در M بسته گوییم، هرگاه N هیچ توسیع اساسی سره ای در M نداشته باشد. در این حالت می نویسیم $N \leq^c M$.

لم ۷.۲.۱ (گزاره ۱.۱ [۸]) فرض کنید M یک مدول بوده و A، B، C و D زیر مدول های M باشند به طوری که $A \leq B$ و $C \leq D$.

۱) اگر $A \leq^e B$ و $C \leq^e D$ آنگاه $A \cap C \leq^e B \cap D$.

۲) $A \leq^e B$ و $B \leq^e M$ اگر و تنها اگر $A \leq^e M$.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید M یک مدول باشد و $A \leq B$ زیر مدول های M باشند. اگر $A \leq^e B$ و $B \leq^c M$، آنگاه B را یک بستار برای A در M می نامیم. بنا بر لم زرن هر زیر مدول از M دست کم دارای یک بستار در M است ولی لزومی ندارد که بستار یک زیر مدول منحصر به فرد باشد.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید M یک مدول باشد. M را یک $UC-$ مدول می نامیم هرگاه هر زیر مدول از M دارای یک بستار یگانه در M باشد.

گزاره ۱۰.۲.۱ (لم ٦ [۲۴]) احکام زیر برای مدول M معادلند:

۱) M یک $UC-$ مدول است.

۲) اگر N_1 و N_2 زیر مدول های بسته ای از M باشند، آنگاه $N_1 \cap N_2$ نیز در M بسته است.