دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

عنوان :

زیر جبرهای موروثی از جبرهای عملگرها

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

استاد راهنما :

دکتر علی جلیلیان عطار

استاد مشاور :

دکتر ثریا طالبی

مولف :

علی حسینی

تابستان ۱۳۸۸

چکیده :

در این پایان نامه زیر جبرهای موروثی از جبرهای عملگرها را مورد بررسی قرار می دهیم.
یک جبر عملگرها یک جبر بسته از عملگرها روی یک فضای هیلبرت است ، یا به بیان دیگر یک زیر جبر بسته از یک C^*–جبر است.
می گوییم یک جبر A از عملگرها ، یکدار است، اگر یک همانی از نرم یک داشته باشد و می گوییم یکه ی تقریبی دار است اگر یک همانی تقریبی انقباضی داشته باشد.
یک زیر جبر یکدار از یک C^*–جبر B ، یک زیر جبر بسته شامل 1_B است.
سپس رده ی r– ایده آل ها از جبر A از عملگرها را مورد بررسی قرار می دهیم و تناظر بین رده ی r– ایده آل ها و رده ی l– ایده آل ها را پیدا می کنیم. همچنین نشان می دهیم هر جبر عملگرها دارای یک همانی تقریبی انقباضی ، دارای خاصیت (ℓ) می باشد.
در فصل های سوم نتایج مطرح شده در فصل دوم را بکار خواهیم برد تا به یک تعمیم از نظریه ی C^*– مدول ها دست یابیم.
در فصل چهارم ارتباط بین زیر جبرهای موروثی ، صورت های بسته ی ضعیف* از فضای حالت و نیم پیوستگی پایینی را مطرح می کنیم ، سپس نشان می دهیم که زیر جبرهای موروثی از یک جبر یکه ی تقریبی دار A از عملگرها ، دقیقا شبه M– ایده آل های یکه ی تقریبی دار هستند .
سرانجام در فصل پنجم نظریه ی کلاسیک تصاویر قله ای و p– تصاویر را مورد بررسی قرار می دهیم.

واژگان کلیدی :

زیر جبرهای موروثی ، تصویر باز ، همانی تقریبی ، صورت ، فضای حالت ، ایده آل ، C^*– مدول ، M– ایده آل ، تصویر قله ای ، p– تصویر.

"فهرست"

مقدمه :

یک جبر عملگرها یک جبر بسته از عملگرها روی یک فضای هیلبرت است ، به بیان دیگر یک زیر جبر بسته از یک C^*– جبر است.

می گوییم یک جبر A از عملگرها ، یکدار است، اگر یک همانی از نرم یک داشته باشد و می گوییم یکه ی تقریبی دار است اگر یک همانی تقریبی انقباضی داشته باشد.

یک زیر جبر یکدار از یک C^*– جبر B ، یک زیر جبر بسته شامل 1_B است.

در این پایان نامه اغلب با ایده آل های راست بسته ی J از یک جبر A از عملگرها سروکار داریم که شامل یک همانی تقریبی انقباضی چپ برای J می باشند که این ها را برای اختصار r– ایده آل ها می نامیم.

رده ی مورد نظر از ایده آل های چپ با همانی تقریبی انقباضی راست ، رده ی l– ایده آل ها نامیده می شود. اما به دلیل تقارن موضوع لزومی ندارد که این رده را در نظر بگیریم.

برای C^*– جبرها ، r– ایده آل ها دقیقا ایده آل های راست هستند و یک تناظر دوسویی بین r– ایده آل ها و l– ایده آل ها برقرار است ، یعنی $J \to J^*$.

همانطور که در بخش ۵-۲ از مرجع[۱۳] نشان داده شده است یک تناظر دوسویی بین l– ایده آل های J و تصاویر مشخص p در دوگان دوم A^{**} وجود دارد. این تابع دوسویی ، J را به تصویر تکیه گاهی چپ اش ، یعنی حد ضعیف* از یک همانی تقریبی انقباضی چپ برای J می برد و برعکس p را به ایده آل راست $pA^{**} \cap A$ می برد.

قضیه ی اصلی در مرجع[۲۹] که به اختصار به عنوان قضیه ی **های** (Hay's theorem) به آن مراجعه خواهیم کرد بیان می کند که اگر A یک زیر جبر یکدار از یک C^*– جبر B باشد آنگاه تصاویر باز p می توانند به عنوان تصاویر در $A^{\perp\perp}$ که در B^{**} باز هستند مشخص شوند . اثبات این قضیه بسیار طولانی است و در آن از لم اوریسون غیر جابه جایی (noncommutative Urysohn lemma) که در مرجع[۲] بیان شده نیز استفاده می شود.

در این پایان نامه می گوییم یک زیر فضای J از یک جبر A ، یک ایده آل داخلی است اگر و تنها اگر $JAJ \subset J$.

نشان می دهیم که یک زیر فضا از یک جبر A از عملگر ها ، یک زیر جبر موروثی است اگر و تنها اگر یک ایده آل داخلی یکه ی تقریبی دار باشد.

اکنون محتوی پایان نامه را بطور خلاصه مورد بررسی قرار می دهیم :
در فصل اول به بیان برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز می پردازیم.
در فصل دوم به بیان تعریف یک زیر جبر موروثی از جبر عملگر ها می پردازیم و قضایایی در این رابطه ذکر می کنیم.
در مرجع [۱۱] یک جبر عملگرهای A دارای خاصیت (ℓ) نامیده می شود اگر یک همانی تقریبی انقباضی چپ (e_t) داشته باشد بطوریکه $e_s e_t \to e_s$ با t برای هر s . در این مرجع این پرسش مطرح می شود که آیا هر جبر عملگرهای دارای یک همانی تقریبی انقباضی ، دارای خاصیت (ℓ) می باشد یا خیر ؟ که در این فصل به این سوال پاسخ خواهیم داد.
در فصل های سوم نتایج مطرح شده در فصل دوم را بکار خواهیم برد تا به یک تعمیم از نظریه ی C^*- مدول ها دست یابیم.
در فصل چهارم ، ارتباط بین زیر جبرهای موروثی ، صورت های بسته ی ضعیف$*$ از فضای حالت و نیم پیوستگی پایینی را مطرح می کنیم ، سپس مطالبی را راجع به $M-$ ایده آل ها می آوریم و نشان می دهیم که زیر جبرهای موروثی از یک جبر یکه ی تقریبی دار A از عملگرها ، دقیقا شبه $M-$ ایده آل های یکه ی تقریبی دار هستند .
در فصل پنجم به بیان تعاریف و قضایای مربوط به تصاویر قله ای و $p-$ تصاویر می پردازیم. بخصوص سوال مطرح شده در مرجع[۲۹] یعنی این که آیا $p-$ تصاویر با تصاویر تکیه گاهی $r-$ ایده آل ها یکی هستند یا خیر را به صورت یک سوال ساده مهم زیر درباره ی همانی تقریبی تبدیل می کنیم :
سوال : اگر A یک جبر یکه ی تقریبی دار از عملگرها باشد آنگاه آیا A دارای یک همانی تقریبی به فرم $(1-x_t)$ با $x_t \in Ball(A)$ هست یا خیر ؟ که در اینجا 1 عنصر همانی یکدار شده ی A^1 از A است.

۱-۱ تعریف : فضای برداری X ، (روی میدان F) را یک فضای نرم دار گوییم هرگاه تابعی مانند $\|.\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ موسوم به نرم وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in F$ داشته باشیم :

$$\|x\| \geq 0 \ , \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (۱)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (۲)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ . \quad (۳)$$

اگر برای هر $x, y \in X$ تعریف کنیم $d(x,y)=\|x - y\|$ آنگاه X تبدیل به یک فضای متریک می شود که توپولوژی حاصل از آن را توپولوژی نرم می نامیم.

۲-۱ تعریف : یک فضای نرم دار که در آن ، متر حاصل از نرم کامل باشد فضای باناخ نامیده می شود.

۳-۱ فضای ضرب داخلی : یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری مختلط H یک نگاشت $\underset{(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle}{H \times H \rightarrow C}$ است بطوریکه:

(۱) برای هر $x, y, z \in H$ و هر $a, b \in C$

$$\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$$

(۲) برای هر $x, y \in H$ $\quad \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(۳) برای هر $0 \neq x \in H$ $\quad \langle x, x\rangle \geq 0$

دراینصورت $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی نامیده می شود و برای هر $x \in H$ تعریف می کنیم:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \ .$$

٤-۱ فضای هیلبرت : یک فضای ضرب داخلی که نسبت به نرم $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ کامل باشد یک فضای هیلبرت نامیده می شود.

۵-۱ نامساوی کشی- شوارتز (Cauchy-Schwartz inequality) : نا مساوی کشی- شوارتز بیان می کند که برای تمامی x, y ها در فضای ضرب داخلی رابطه ی زیر را داریم :

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle . \langle y, y\rangle \ .$$

که در آن $\langle .,. \rangle$ ضرب داخلی است . همچنین رابطه ی فوق با رابطه ی زیر معادل است :

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|.\|y\| \ .$$

۱-۶ فضای انعکاسی : فرض کنید X یک فضای برداری نرم دار روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد . اگر دوگان X (یعنی فضای تمام نگاشت های خطی و پیوسته از X به $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) را با نماد X^* و دوگان دوم آن را با X^{**} نمایش دهیم آنگاه یک تبدیل خطی پیوسته $J : X \to X^{**}$ تعریف شده توسط:

$$J(x)(\varphi) = \varphi(x) \qquad \forall\, x \in X \ , \ \varphi \in X^*$$

وجود دارد . بنابر نتیجه ای از قضیه ی هان – باناخ J حافظ نرم است یعنی $\|J(x)\| = \|x\|$ و لذا یک به یک است . فضای X یک فضای انعکاسی نامیده می شود هر گاه J ، یک به یک و پوشا باشد.

۱-۷ عملگر خطی : فرض کنید X, Y فضاهای برداری باشند. عملگر $T : X \to Y$ را یک عملگر خطی گوییم هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $\alpha \in F$ داشته باشیم :

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2) \quad .$$

۱-۸ الحاق یک عملگر خطی : الحاق یک عملگر خطی $T \in B(H)$ که با نماد T^* نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle x, Ty\rangle = \langle T^* x, y\rangle \qquad \forall \mathrm{x,y} \in \mathrm{H} \quad .$$

۱-۹ عملگر خود الحاق : یک عملگر خطی کراندار $T : H \to H$ روی یک فضای هیلبرت H خودالحاق است اگر $T^* = T$. یا به عبارت دیگر عملگر خطی کراندار T روی فضای هیلبرت H خودالحاق است اگر :

$$\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall\ \mathrm{x,y} \in \mathrm{H} \ .$$

۱-۱۰ مثال : نگاشت خطی روی $\mathbb{R}^n$ با ماتریس A خودالحاق است اگر و تنها اگر A متقارن باشد. یعنی $A = A^T$ که در آن A^T ترانهاده ی ماتریس A است.

۱۱-۱ عملگر تصویر: یک عملگر $\underset{x\mapsto y=P(x)}{P:H\to H}$ یک تصویر روی فضای هیلبرت H نامیده می شود، اگر یک زیر فضای بسته ی Y از H وجود داشته باشد بطوریکه Y برد P باشد و $Y^{\perp}$ فضای پوچ P باشدو $P\big|_Y$ عملگر همانی روی Y باشد. در اینصورت می توان نوشت $\underset{x=y+z}{H=Y\oplus Y^{\perp}}$ که $y\in Y\ ,z\in Y^{\perp}$ و با توجه به عملگر تصویر P می توان نوشت :

$$x=y+z=P(x)+(I-P)x\ .$$

این نشان می دهد که عملگر تصویر روی فضای $Y^{\perp}$، I-P می باشد.

مشخصه های دیگری نیز برای یک تصویر روی فضای هیلبرت H وجود دارد که معمولا به عنوان یک تعریف می توان از آنها استفاده کرد.

۱۲-۱ قضیه (تصویر) : یک عملگر خطی کراندار $P:H\to H$ روی یک فضای هیلبرت H یک تصویر است ، اگر و تنها اگر P خود الحاق و خود توان باشد (یعنی $P=P^*=P^2$).

برهان: فرض کنید که P یک تصویر روی فضای هیلبرت H باشد و P(H) را با نماد Y نمایش دهید. در اینصورت ، چون برای هر $x\in H$ و $Px=y\in Y$ داریم ، $P^2x=Py=y=Px$ لذا :

$$P^2=P\ .$$

بعلاوه فرض کنید $x_1=y_1+z_1\ ,\ x_2=y_2+z_2$ که $y_1,y_2\in Y\ \ ,\ z_1,z_2\in Y^{\perp}$.

دراینصورت چون $Y\perp Y^{\perp}$ پس $\langle y_1,z_2\rangle=\langle y_2,z_1\rangle=0$.

از طرفی چون :

$$\langle Px_1,x_2\rangle=\langle y_1,y_2+z_2\rangle=\langle y_1,y_2\rangle=\langle y_1+z_1,y_2\rangle=\langle x_1,Px_2\rangle$$

لذا P خودالحاق است.

بر عکس: فرض کنید که $P^2=P=P^*$ و P(H) را با Y نمایش دهید. در اینصورت برای هر $x\in H$:

$$x=Px+(I-P)x\ \ .$$

با توجه به این که :

$$\langle Px,(I-P)x\rangle=\langle x,P(I-P)x\rangle=\langle x,Px-Px\rangle=\langle x,0\rangle=0$$

نتیجه می شود که $Y=P(H)\perp(I-P)H$.

Y، فضای پوچ (I-P) می باشد، چون

$$(I-P)Px=Px-P^2x=0\ \Rightarrow\ Y\subset N(I-P)\ ,$$

اکنون فرض کنید $x \in N(I-P)$ لذا $(I-P)x=0$ پس $x-Px=0$ که نتیجه می دهد $x=Px$ لذا $x \in Y$ و داریم $N(I-P) \subset Y$. حال چون فضای پوچ بسته می باشد لذا Y یک فضای بسته است. حال اگر $Px=y$ ، داریم $Py=P^2x=Px=y$ لذا $P\big|_Y$ عملگر همانی روی Yاست.

۱۳-۱ قضیه : برای هر تصویر P روی یک فضای هیلبرت Hداریم:

(۱) $\langle Px,x\rangle = \left\|P^2x\right\|$

(۲) $P \geq 0$

(۳) $\|P\| \leq 1$ و اگر $P(H) \neq \{0\}$ آنگاه $\|P\|=1$.

اثبات : روابط (۱) و (۲) با توجه به روابط زیر حاصل می شوند :

$$\langle Px ,x \rangle = \langle \mathrm{P}^2\mathrm{x},\mathrm{x}\rangle = \langle Px ,Px \rangle = \|Px\|^2 \geq 0 \ .$$

بنابر نامساوی کشی شوارتز داریم $\|Px\|^2 = \langle Px ,x \rangle \leq \|Px\|\|x\|$ بنابراین برای هر $x \neq 0$ ، $\frac{\|Px\|}{\|x\|} \leq 1$ و $\|P\| \leq 1$. همچنین اگر $0 \neq x \in P(H)$ آنگاه $\frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1$ که نشان می دهد (۳) برقرار است.

۱٤-۱ قضیه : فرض کنید E یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H باشد و $P=P_E$ تصویر به روی E را نمایش دهد و $E^{\perp} = \{f \in H : \langle f ,g \rangle = 0 \ \ \forall g \in E\}$ دراینصورت گزاره های زیر با هم معادلند :

(۱) P یک عملگر خودالحاق است.

(۲) $P(f)=f$ برای هر $f \in E$ و$P(g)=0$ برای هر $g \in E^{\perp}$.

(۳) $P^2=P$.

(۴) $\langle P(f),f \rangle = \|P(f)\|^2 \leq \|f\|^2$.

(۵) E برد P است یعنی : $E = \{f \in H : P(f)=f\}$.

(۶) $E^{\perp}$ فضای پوچ P است یعنی : $E^{\perp} = \{f \in H : P(f)=0\}$

اثبات : [۱۴-۳۳,۷] .

۱-۱۵ تعریف : یک تصویر متعامد روی فضای هیلبرت H ، یک نگاشت خطی $P : H \rightarrow H$ است که در شرایط زیر صدق کند :

(۱) $P^2 = P$

(۲) برای هر $x , y \in H$ داشته باشیم $\langle Px , y \rangle = \langle x , Py \rangle$.

یک تصویر متعامد لزوما کراندار است.

۱-۱۶ قضیه : اگر P یک تصویر متعامد غیر صفر باشد آنگاه $\|P\| = 1$.

اثبات : اگر $x \in H$ و $Px \neq 0$ آنگاه بنابر نامساوی کشی- شوارتز داریم :

$$\|Px\| = \frac{\langle Px, Px\rangle}{\|Px\|} = \frac{\langle x, P^2 x\rangle}{\|Px\|} = \frac{\langle x, Px\rangle}{\|Px\|} \leq \|x\|$$

بنابراین $\|P\| \leq 1$. (۱)

چون $P \neq 0$ ، آنگاه یک $x \in H$ وجود دارد بطوریکه $Px \neq 0$ و $\|P(Px)\| = \|Px\|$

بنابراین $\|P\| \geq 1$. (۲)

بنابر (۱) و(۲) داریم : $\|P\| = 1$.

۱-۱۷ جبر: فضای برداری A را روی یک میدان F یک جبر روی میدان F گوییم (اگر $F =$ □، A را یک جبر حقیقی و اگر $F =$ □، A را یک جبر مختلط گوییم)، هرگاه نگاشت $(a,b) \rightarrow ab$ از $A \times A \rightarrow A$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $\alpha \in F$ و هر $a,b,c \in A$ داشته باشیم:

(۱) a(bc)=(ab)c

(۲) a(b+c)=ab+ac , (a+b)c=ac+bc

(۳) (αa)b=α(ab)=a(αb) .

جبر A را جابجایی گوییم هرگاه A نسبت به عمل ضرب جابجایی باشد یعنی به ازای هر a,b ∈ A داشته باشیم ab=ba .

جبر A را یکدار گوییم هرگاه عنصر $1 \in \mathrm{A}$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ داشته باشیم $1a=a1=a$.

زیر فضای خطی B از A را زیر جبر A گوییم هرگاه B نسبت به عمل ضرب بسته باشد.

۱-۱۸ جبر باناخ : جبر A روی میدان F همراه با نرم $\|.\|$ را یک جبر باناخ گوییم، هرگاه A با این نرم یک فضای باناخ بوده و برای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \le \|a\|\|b\|$.

۱-۱۹ C^*-جبر : یک C^*-جبر، جبر باناخ A همراه با نگاشت $x \to x^*$ بر A است که به ازای هر $x, y \in A$ و هر $a,b \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\left(x^*\right)^* = x$

(۲) $(ax+by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*$

(۳) $(xy)^* = y^*x^*$

(۴) $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

هر نگاشت $x \to x^*$ بر یک جبر که در شرایط (۱) و (۲) و (۳) صدق کند یک برگشت بر جبر نامیده می شود. عضو x^* را الحاق x می نامیم.

۱-۲۰ مثال هایی از C^*- جبر :

(۱) اعداد مختلط $\mathbb{C}$ همراه با $z^* = \bar{z}$ ساده ترین C^*- جبر است.

(۲) فرض کنید A یک C^*- جبر و B یک زیر جبر بسته (یکدار) باشد که تحت برگشت بسته است (یعنی شامل تمام الحاق های اعضای خود باشد). آنگاه B خود یک C^*-جبر با نرم، برگشت و ساختار جبری است که از A به ارث می برد. B را یک C^*-زیر جبر A می نامیم.

۱-۲۱ عناصر خاص در یک C^*- جبر :

فرض کنید A یک C^*- جبر و x در A باشد، دراینصورت:

(۱) x را خود الحاق گوییم اگر $x^* = x$.

(۲) x را یکانی گوییم اگر $xx^* = x^*x = 1$ ، یا بطور معادل $x^* = x^{-1}$.

(۳) x را نرمال گوییم اگر $x^*x = xx^*$.

(۴) x را تصویر گوییم اگر $x^* = x = x^2$.

(۵) x را مثبت گوییم اگر $x = y^*y$ برای عضوی مانند y در A .

(۶) عنصر x را مثبت اکید گوییم اگر برای هر تابعک خطی مثبت غیر صفر φ در A داشته باشیم $\varphi(x) > 0$.

بدیهی است که اعضای خودالحاق و یکانی نرمالند . همچنین واضح است که اعضای مثبت ، خودالحاقند و تصاویر، مثبت هستند. می نویسیم $x \geq 0$ اگر و فقط اگر x مثبت باشد.

۱-۲۲ C^*-جبر یکدار : یک C^*-جبر A یکدار نامیده می شود اگر یک همانی حاصلضربی $1 = 1_A$ داشته باشد که داریم: $1 = 1^*$ و $\|1\| = \|1^2\| = \|1\|^2$, $\|1\| = 1$.

۱-۲۳ C^*-جبر تولید شده توسط یک مجموعه : فرض کنید A یک C^*–جبر و S یک زیر مجموعه از A باشد. *C- جبر تولید شده توسط S که با نماد $A[S]$ نمایش داده می شود، کوچکترین *C- زیر جبر A است که شامل S باشد.

اگر $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ آنگاه می نویسیم $A[S] = A[x_1, x_2, \ldots x_n]$. بخصوص $A[x]$ *C- زیر جبر تولید شده توسط x است.

۱-۲۴ تعریف : مجموعه ی C از عناصر یک *C- جبر، خودالحاق نامیده می شود، اگر تحت عمل برگشت بسته باشد. به عنوان مثال اگر x, y عناصری در یک *C - جبر باشند بطوریکه $x^* = y$ ، آنگاه چون $y^* = (x^*)^* = x$ پس مجموعه ی $\{x, y\}$ در یک *C- جبر، یک مجموعه ی خودالحاق است حتی اگر x, y خودالحاق نباشند.

۱-۲۵ جبر یکنواخت : اگر X یک فضای هاسدورف فشرده باشد آنگاه یک زیر جبر بسته $A \subset C(X)$ یک جبر یکنواخت روی X نامیده می شود اگر $1 \in A$ باشد و A نقاط را جدا کند یعنی برای هر $x \neq y$ یک $f \in A$ وجود داشته باشد بطوریکه $f(x) \neq f(y)$.

۱-۲۶ جبر ضربگرها : فرض کنید A یک C^*–جبر باشد. جبر ضربگرهای A که با نماد $M(A)$ نمایش داده می شود یک C^*–جبر است که در خاصیت جهانی زیر صدق کند :

نظیر هر C^*–جبر D که شامل A به عنوان یک ایده آل است یک $*$–هومومورفیسم یکتای $\Phi : D \to M(A)$ وجود داشته باشد بطوریکه Φ، هومومورفیسم همانی روی A را توسیع دهد و $\Phi(A^{\perp}) = \{0\}$ باشد.

۱-۲۷ یکه دار کردن : فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط (احتمالا بدون یکه) باشد که با نرم کامل $\|.\|$ تجهیز شده است و رابطه ی $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$ برای تمام $x, y \in A$ برقرار باشد. همچنین فرض کنید A^1 مجموعه ی تمام زوج مرتب های (x, a) باشد که $x \in A$ و $a \in \mathbb{C}$. A^1 همراه با اعمال خطی که بصورت مولفه ای تعریف شده اند یک فضای برداری است. اگر عمل ضرب را در A^1بصورت زیر تعریف کنیم:

$$(x, a)(y, b) = (xy + ay + bx, ab)$$

و نرم در A^1 بصورت زیر تعریف شود:

$$\|(x, a)\| = \|x\| + |a|$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\|(x, a)(y, b)\| &= \|(xy + ay + bx, ab)\| = \|xy + ay + bx\| + |ab| \\ &\le \|x\|\|y\| + |a|\|y\| + |b|\|x\| + |a||b| \\ &= \|(x, a)\|\|(y, b)\| \quad .\end{aligned}$$

لذا A^1 یک جبر باناخ با یکه $1 = (1, 0)$است.

واضح است که نگاشت $x \to (x, 0)$یک یکریختی ایزومتری از A به روی یک زیر فضای بسته (در حقیقت یک ایده آل دو طرفه ی بسته) A^1 است.A^1 را یکدار شده ی A می نامیم.

۱-۲۸ تعریف : فرض کنید M یک زیر فضا از یک فضای نرم دار X باشد، دراینصورت $M^{\perp}$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$M^{\perp} = \{g \in X^* : g(M) = 0\}$$

۱-۲۹ حاصلضرب آرنز : فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. دراینصورت می توانیم دوگان دومش A^{**} را با دو ضرب زیر مجهز کنیم.

$a,b \in A$ و $\varphi \in A^*$ و $\eta \in A^{**}$ را در نظر بگیرید. عناصر $a\varphi$ و φa را به عنوان عناصری از A^* به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle a\varphi, b\rangle = \langle \varphi, ba\rangle$$

و

$$\langle \varphi a, b\rangle = \langle \varphi, ab\rangle.$$

عناصر $\eta\varphi$ و $\varphi\eta$ را به عنوان عناصری در A^* به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle \eta\varphi, b\rangle = \langle \eta, \varphi b\rangle$$

و

$$\langle \varphi\eta, b\rangle = \langle \eta, b\varphi\rangle.$$

با توجه به تعاریف فوق حاصل ضرب آرنز چپ و راست $.\lambda$ و $.\mu$ صورت زیر تعریف می شوند:

برای هر $\eta, \nu \in A^{**}$ و $\varphi \in A^*$

$$\langle \eta_{.\lambda}\nu, \varphi\rangle = \langle \eta, \nu\varphi\rangle$$

و

$$\langle \eta_{.\mu}\nu, \varphi\rangle = \langle \nu, \varphi\eta\rangle.$$

۱-۳۰ تعریف : یک C^*–جبر M یک W^*–جبر نامیده می شود ، هرگاه به عنوان یک فضای باناخ ، فضای دوگان باشد. یعنی یک فضای باناخ M_* وجود داشته باشد بطوریکه $(M_*)^* = M$. که در آن $(M_*)^*$ فضای باناخ دوگان M_* است. M_* را پیش دوگان M می نامیم.

۱-۳۱ قضیه مازور(Mazur theorem) : بستار ضعیف از یک مجموعه ی محدب با بستار نرم برابر است.

اثبات :[۸] .

۱-۳۲ *C- همریختی ها : فرض کنید A,B دو *C- جبر باشند. نگاشت $\Phi : A \to B$ را یک *C- همریختی نامیم هرگاه به ازای هر $x\,, y \in A$ و هر $a,b \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

(۱) $\Phi(ax+by) = a\Phi(x) + b\Phi(y)$

(۲) $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$

(۳) $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$

(۴) Φ یکه A را به یکه ی B ببرد.

اگر Φ، یک به یک هم باشد، Φ را یک *C- یکریختی می نامیم. دو *C- جبر را یکریخت نامیم هرگاه یک *C- یکریختی از یکی به روی دیگری وجود داشته باشد.

۱-۳۳ تعریف : فرض کنید A یک C^*- جبر و Φ تابعی خطی بر A باشد دراینصورت :

(۱) Φ را هرمیتی گوییم اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\Phi(x^*) = \overline{\Phi(x)}$.

(۲) Φ را مثبت نامیم اگر برای تمام $x \geq 0$ داشته باشیم $\Phi(x) \geq 0$.

(۳) Φ را حالت نامیم اگر Φ مثبت بوده و $\Phi(1) = 1$.

۱-۳٤ نمادگذاری : اگر A یک فضای نرم دار باشد، مجموعه ی $\left\{ x \in A : \|x\| \leq 1 \right\}$ را با نماد $\mathrm{Ball(A)}$ نمایش می دهیم.

۱-۳۵ انقباض : یک عملگر خطی T بین فضا های نرم دار با $\|T\| \leq 1$ انقباض نامیده می شود.

$M_n(A)$ ۱-۳٦ : فرض کنید A یک C^*-جبر باشد و M_n نشان دهنده ی ماتریس های $n \times n$ مختلط باشد. همچنین فرض کنید $M_n(A)$ مجموعه ی ماتریس های $n \times n$ با درایه های از A باشد. عناصر $M_n(A)$ را با $(a_{i,j})$ نمایش می دهیم و برای $(a_{i,j})$ و $(b_{i,j})$ در $M_n(A)$ تعریف می کنیم :

$$(a_{i,j}).(b_{i,j}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j})$$

و

$$(a_{i,j})^* = (a^*_{\ j,i}).$$

با اعمال تعریف شده در فوق ملاحظه می کنیم که $M_n(A)$ یک C^*-جبر است.

۱-۳۷ دوگان X**:** مجموعه ی تمام تابعک های خطی و کراندار با اعمال نقطه ای روی فضای باناخ X را با X^* نمایش می دهیم. فضای X^* خود یک فضای باناخ می باشد و آن را دوگان X می نامیم.

۱-۳۸ تعریف : یک مجموعه ی جهت دار، یک مجموعه ی A همراه با رابطه ی $(\prec)$ است که در شرایط زیر صدق کند :

(۱) برای هر $\alpha \in A$، $\alpha \prec \alpha$

(۲) برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in A$ اگر $\alpha \prec \beta$ و $\beta \prec \gamma$، آنگاه $\alpha \prec \lambda$

(۳) برای هر $\alpha, \beta \in A$ یک $\gamma \in A$ وجود داشته باشد بطوریکه $\alpha \prec \gamma$ و $\beta \prec \gamma$.

مجموعه ی جهت دار A همراه با رابطه ی $(\prec)$ را با نماد $(A,\prec)$ نمایش می دهیم.

۱-۳۹ تور : یک تور در یک مجموعه ی X یک نگاشت $\underset{\alpha \to x_\alpha}{A \to X}$ است که در آن A یک مجموعه ی جهت دار است. معمولا نگاشت فوق را با نماد (x_α) یا $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ نمایش می دهند.

۱-۴۰ توپولوژی : فرض کنید X یک مجموعه و τ گردایه ای از زیر مجموعه های X باشد یعنی $\tau \subset P(X)$. τ را توپولوژی در X گوییم در صورتی که در سه شرط زیر صدق کند :

(۱) $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$

(۲) اگر $A, B \in \tau$ آنگاه $A \bigcap B \in \tau$

(۳) به ازای هر زیر گردایه ی τ مانند ω ، $\bigcup \omega \in \tau$.

۱-۴۱ توپولوژی های ضعیف : فرض کنید X یک مجموعه و F یک خانواده از توابع از X به توی فضای توپولوژیکی Y باشد. توپولوژی ضعیف بر X که به وسیله ی F القا می شود، ضعیف ترین (کوچکترین) توپولوژی بر X است که هر تابع در F را پیوسته می سازد.بنابراین یک تور (x_α) در X به x در این توپولوژی همگراست اگر و تنها اگر $(f(x_\alpha))$ به $f(x)$ برای هر $f \in F$ همگرا باشد.

فرض کنید X یک فضای باناخ و X^* فضای باناخ دوگان X باشد. منظور از توپولوژی ضعیف بر X، همیشه توپولوژی ضعیف القا شده توسط خانواده ی تمام تابعک های خطی و کراندار بر X است. بنابراین یک تور (x_α) به x در X بطور ضعیف همگراست (یعنی در

توپولوژی ضعیف همگراست) اگر و فقط اگر $(F(x_\alpha))$ به $F(x)$ برای هر F در X^* همگرا باشد.

W^*–توپولوژی بر X^* عبارت است از توپولوژی ضعیف بر X^* که توسط خانواده ی $F=\{f_x : x\in X\}$ القا می شود که به ازای هر x در X تابع $f_x : X^* \to \mathbb{C}$ بصورت $f_x(F)=F(x)$ که $F\in X^*$ تعریف می شود. بنابراین یک تور (F_α) در X^* به F در W^*–توپولوژی همگراست اگر و تنها گر $(F_\alpha(x))$ به $F(x)$ به ازای هر $x\in X$ همگرا باشد.

۱-٤۲ همانی تقریبی : فرض کنید A یک C^*– جبر باشد . تور $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک همانی تقریبی برای A است هرگاه یک تور از عناصر خودالحاق A باشد با این خاصیت که برای هر $a\in A$ داشته باشیم:

$$\lim_\alpha a e_\alpha = a \quad \text{و} \quad \lim_\alpha e_\alpha a = a \ .$$

همچنین تور $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ را یک همانی تقریبی کراندار گوییم هرگاه تور $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ یک همانی تقریبی باشد و $M>0$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر α :

$$\|e_\alpha\| \le M \ .$$

تور $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ را یک همانی تقریبی انقباضی گوییم هرگاه :

$$\|e_\alpha\| \le 1.$$

۱-٤۳ نگاشت متعارف : فرض کنید X یک فضای باناخ و X^{**} دوگان فضای X^* باشد. برای هر $\hat{x}\in X^{**}$ و $x^*\in X^*$ و $x\in X$ ، نگاشت $\Lambda : X \to X^{**}$ را با ضابطه ی $\langle x^*, \hat{x}\rangle = \langle x, x^*\rangle$ تعریف می کنیم. دراینصورت Λ یک ایزوموفیسم ایزومتری از X به روی زیر فضای بسته ای از X^{**} است. Λ را نگاشت متعارف از X به X^{**} می نامیم.

۱-٤٤ جبر عملگرها : یک جبر عملگرها، یک جبر بسته از عملگرهای خطی پیوسته روی یک فضای هیلبرت است ، با ضرب تعریف شده با ترکیب نگاشت ها.

جبر عملگر های A را یک جبر یکدار گوییم هرگاه یک همانی از نرم یک داشته باشد و می گوییم یکه ی تقریبی دار است اگر یک همانی تقریبی انقباضی داشته باشد .

۱-٤٥ قضیه : اگر A یک جبر عملگرها باشد آنگاه A^{**} نیز یک جبر عملگرهاست.
اثبات : [۲-۵-۶,۱۳] .

۱-٤٦ تعریف : فرض کنید A یک جبر یکه ی تقریبی دار از عملگرها و $B \subset A$ باشد.
دراینصورت B را یک صورت در A نامیم هرگاه :

$$\forall\ a,b \in A\ ,\ t \in [0.1]\ \ s.t\ \ ta+(1-t)b \in B \ \Rightarrow\ \mathrm{a,b} \in \mathrm{B}\ .$$

۱-٤٧ لم : فرض کنید a یک عنصر از یک زیر فضا از $B(K,H)$ باشد و (e_t) یک تور از انقباض ها در $B(K)$ باشد بطوریکه $ae_t \to a$. دراینصورت $ae_te_t^* \to a$ و $ae_t^*e_t \to a$ و $ae_t^* \to a$.
اثبات : [۲-۱-۶,۱۳] .

۱-٤٨ قضیه : فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. دراینصورت A یک همانی تقریبی انقباضی (e_t) دارد اگر و تنها اگر A^{**} یک همانی e از نرم 1 داشته باشد. به طریق مشابه A یک همانی تقریبی انقباضی راست (e_t) دارد اگر و تنها اگر A^{**} یک همانی راست e از نرم 1 داشته باشد. اگر A یک جبر عملگرها باشد و (e_t) یک همانی تقریبی انقباضی یا یک همانی تقریبی انقباضی راست برای A باشد و اگر e همانند بالا باشد آنگاه $e_t \to e$ بطور ضعیف * در A^{**}.
اگر A هم همانی تقریبی انقباضی راست و هم همانی تقریبی انقباضی چپ داشته باشد آنگاه A یک همانی تقریبی انقباضی (دو طرفه) دارد.
اثبات : [۲-۵-۸,۱۳] .

۱-٤٩ نگاشت دوخطی : فرض کنید X ,Y , Z فضاهای خطی نرم دار روی میدان F باشند.
نگاشت $\Phi : X \times Y \to Z$ را یک نگاشت دوخطی گوییم هرگاه:

الف) برای هر $y \in Y$ نگاشت $\Phi_y : X \to Z$ با ضابطه ی $x \to \Phi(x,y)$ خطی باشد. یعنی برای هر دو عضو x_1,x_2 از X و اسکالر های a,b از میدان F داشته باشیم:

$$\Phi_y(ax_1+bx_2) = a\Phi_y(x_1) + b\Phi_y(x_2).$$

ب) برای هر $x \in X$ نگاشت $\Phi_x : Y \to Z$ با ضابطه ی $y \to \Phi(x,y)$ خطی باشد.
یعنی برای هر دو عضو y_1, y_2 از Y و اسکالرهای c,d از میدان F داشته باشیم:

$$\Phi_x(cy_1 + dy_2) = c\Phi_x(y_1) + d\,\Phi_x(y_2).$$

۱-۵۰ A–مدول باناخ : فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط باشد. فضای برداری X روی □ را یک A–مدول چپ باناخ گوییم هرگاه نگاشت $A \times X \to X$ با ضابطه ی $(a,x) \to ax$ و $K > 0$ موجود باشند بطوریکه نگاشت فوق دوخطی بوده و برای هر $x \in X$ و $a,b \in A$:

الف) $a(bx) = (ab)x$

ب) $\|ax\| = K\|a\|\|x\|$.

A–مدول راست باناخ به طریق مشابه تعریف می شود.

X را یک A–مدول باناخ گوییم ، هرگاه یک A–مدول چپ باناخ و A–مدول راست باناخ باشد و برای هر $x \in X$ و $a,b \in A$ در شرط زیر صدق کند:

$$a(xb) = (ax)b.$$

A–مدول چپ باناخ X را یکانی گوییم هرگاه A یکدار باشد و برای هر $x \in X$ داشته باشیم $ex = x$ که در آن e عضو همانی A است.

۱-۵۱ ضرب داخلی A–مدول ها : فرض کنید A یک C^*– جبر (نه لزوما جابه جایی یا یکدار) همراه با نگاشت * باشد. یک ضرب داخلی A–مدول ها، یک فضای خطی مختلط E که یک A–مدول راست می باشد همراه با نگاشت زیر است :

$$\langle .,. \rangle : E \times E \to A$$

که در شرایط زیر صدق کند :

(۱) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

(۲) $\langle x, \alpha y \rangle = \langle x, y \rangle \alpha$

(۳) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$

(۴) $\langle x, x \rangle \geq 0$

(۵) $\langle x, x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۱-۵۲ مدول هیلبرت $A-$: با توجه نامساوی کشی- شوارتز ، نامساوی زیر را برای یک فضای ضرب داخلی $A-$مدول E داریم :

$$\forall x , y \in E \ : \langle x , y \rangle \langle y , x \rangle \leq \left\| \langle x , x \rangle \right\| \langle y , y \rangle.$$

از آنجا که برای تمام عناصر مثبت و خودالحاق x , y در A داریم که اگر $x \leq y$ آنگاه $\| x \| \leq \| y \|$ ، نتیجه می شود که :

$$\| x \| = \left\| \langle x , x \rangle \right\|^{\frac{1}{2}}$$

یک نرم روی E تعریف می کند . هرگاه E نسبت به این نرم کامل باشد یک $A-$مدول هیلبرت یا یک C^*- مدول هیلبرت روی C^*-جبر A نامیده می شود.

۱-۵۳ تعریف : فرض کنید A یک C^*-جبر باشد و C یک زیر جبر با $1_A = 1_C$ باشد. در اینصورت می توانیم A را به عنوان یک $C-$مدول چپ با $c \circ a = ca$ درنظر بگیریم. به طریق مشابه A را می توان به عنوان یک $C-$مدول راست در نظر گرفت. A یک $C-$مدول نامیده می شود اگر $C-$مدول چپ و راست باشد.

اگر B یک C^*-جبر دیگر شامل C با $1_B = 1_C$ باشد و $\varphi : A \to B$ خطی باشد آنگاه φ را یک نگاشت $C-$مدول چپ با $\varphi(ca) = c\varphi(a)$ برای هر $a \in A$ و $c \in C$ می نامیم.

نگاشت $C-$مدول راست به طریق مشابه تعریف می شود. نگاشت φ ، $C-$مدول نامیده می شود اگر هم $C-$مدول چپ و هم $C-$مدول راست باشد.

۱-۵۴ نگاشت های بطور کامل مثبت و بطور کامل کراندار : دو C^*-جبر A , B و نگاشت $\Phi : A \to B$ را در نظر بگیرید. همچنین نگاشت $\Phi_n : M_n(A) \to M_n(B)$ را با ضابطه ی $\Phi_n((a_{i,j})) = (\Phi(a_{i,j}))$ را در نظر بگیرید. بطور کلی کلمه ی "بطور کامل" به این معنی است که همه ی نگاشت های $\left\{ \Phi_n \right\}$ از یک خاصیت پیروی می کنند. به عنوان مثال ، نگاشت Φ مثبت نامیده