دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

تکواره‌های مرتب جزئی جزئاً مرتب کامل

استاد راهنما:

دکتر اکبر گلچین

تحقیق و نگارش:

محمد رضا زمانی

زمستان ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادرم

که منحصر به فرد بودنشان

نیاز به اثبات ندارد.

تقدیر و تشکر

خدایا حکمت قدم‌هایی را که برایم برمی‌داری بر من آشکار کن تا درهایی را که بسویم می‌گشایی، ندانسته نبندم و درهایی را که به رویم می‌بندی، به اصرار نگشایم.

از پدر و مادرم که همیشه حامی من بوده‌اند و در این راه از هیچ کوششی دریغ ننموده‌اند صمیمانه سپاسگزارم. بدون حمایت آنها هیچ‌گاه توفیق نمی‌یافتم تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. از جناب آقای دکتر اکبر گلچین، که استاد راهنمای اینجانب بوده‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایم. برای ایشان آرزوی سلامتی و توفیق بیش از پیش از درگاه خداوند متعال مسئلت دارم. از جناب آقای دکتر محمد زاده و جناب آقای دکتر رضایی که داوری این پایان‌نامه را به عهده داشته‌اند نیز کمال تشکر را دارم. همچنین برخود لازم می‌دانم از دکتر ولدیس لان [۱]، پروفسور سیدنی بولمن فلمینگ [۲] و پروفسور ویکتوریا گولد [۳] سپاسگزاری نمایم.

امیدوارم با یاری خداوند متعال، آنچه را فراگرفته‌ام در راه پیشرفت و تعالی ایران عزیز به کار گیرم.

محمدرضا زمانی

---

[۱] Valdis Laan

[۲] Sydney Bulman-Fleming

[۳] Victoria Gould

چکیده

مفهوم تکواره کامل در مقالات متعددی بررسی شده است. اخیراً مفهوم کامل بودن جزئاً مرتب در رسته تکواره‌های مرتب جزئی نیز تعریف شده و نتایجی بدست آمده است. در این پایان نامه، این مفهوم را به طور جامع در رسته تکواره‌های مرتب جزئی مورد بحث قرار می‌دهیم. از آنجایی که هر تکواره مرتب جزئی، تکواره نیز می‌باشد، مفهوم کامل بودن یک تکواره مرتب جزئی در رسته تکواره‌ها نیز می‌تواند در نظر گرفته شود. در پایان توصیفی از تکواره‌های مرتب جزئی جزئاً مرتب کامل ارائه می‌دهیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

بررسی ساختارهای جبری کامل برای اولین بار با تعریف حلقه کامل، توسط باس [۴] [۱] آغاز شد. وی حلقه R را کامل نامید هرگاه هر Rـ مدول، دارای یک پوشش تصویری باشد. حدود یک دهه بعد، ایسبل[۵] با الهام از ایده حلقه کامل، مفهوم کامل بودن را در مورد تکوارهها مورد بررسی قرار داد [۱۵]. ایسبل، تکواره S را کامل نامید هرگاه هر Sـ سیستم دارای یک پوشش تصویری باشد. او نشان داد تکواره S کامل است اگر و فقط اگر در شرطهای A و D صدق کند.

در [۱] اثبات شده یک حلقه کامل است اگر و فقط اگر در شرط زنجیر نزولی برای ایدآلهای راست اصلی صدق کند. ایسبل با مثالی نشان داد این شرط برای کامل بودن تکواره کافی نیست [۱۵]. همچنین ایسبل حدس زد که با وجود شرط A، نیمگروه S در شرط D صدق میکند اگر و فقط اگر در شرط مینیمال برای ایدآلهای راست اصلی صدق کند. حدسی که توسط فونتین [۶]ثابت شد [۱۱].

توصیف دیگر حلقههای کامل به این صورت است که حلقه R کامل است هرگاه هر Rـ مدول هموار ، تصویری باشد [۶]. نتیجه مشابهی در مورد تکوارهها توسط فونتین ثابت شد.

در این پایان نامه، مطالعه تکوارههای مرتب جزئی جزئاً مرتب کامل را که اخیراً توسط پروخین [۷] و استپانوا [۸] [۱۹] معرفی شدهاند، ادامه میدهیم. پایاننامه در چهار فصل تنظیم گردیده است. فصل اول را به یادآوری مفاهیم مقدماتی اختصاص دادهایم. در بخش آخر این فصل، مقدماتی از بحث تکواره کامل ارائه نمودهایم. سیستمهای مرتب جزئی را در فصل دوم مورد بررسی قرار دادهایم. همچنین خواص همواری سیستمهای مرتب جزئی را در این فصل گنجاندهایم. بحث اصلی ما از فصل سوم آغاز میشود. همانطور که در بخش مربوط به سیستمهای مرتب جزئی اشاره خواهیم کرد، هر سیستم مرتب جزئی تصویری، به طور قوی هموار است. سوالی که در اینجا به ذهن میرسد این است که تحت چه شرایطی عکس این حکم برقرار است. فصل

---

[۴] Bass
[۵] Isbell
[۶] Fountain
[۷] Pervukhin
[۸] Stepanova

سوم را برای پاسخ به این سؤال اساسی در نظر گرفته‌ایم. سؤالی که با پاسخ به آن، بخش اعظمی از راهی را که پیش رو داریم، خواهیم پیمود. در فصل چهارم به بررسی تکواره‌های مرتب جزئی جزئاً مرتب کامل می‌پردازیم. هر آنچه در سراسر این پایان نامه مورد بحث قرار گرفته است، در این فصل به کار بسته خواهد شد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف، قضایا و مفاهیمی که برای آشنایی با موضوع پایان نامه لازم و در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است.

۱—۱ مجموعه‌های مرتب جزئی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. هر زیرمجموعه ρ از $X \times X$ یک رابطه دوتایی روی X نامیده می‌شود. مجموعه همه رابطه‌های دوتایی روی X را با $\mathcal{B}(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه و $\rho, \sigma \in \mathcal{B}(X)$. ترکیب ρ و σ را به صورت

$$\rho \circ \sigma = \{(x,z) \in X \times X \quad | \, \exists y \in X;\ (x,y) \in \sigma,\ (y,z) \in \rho\}.$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\rho \in B(X)$ باشد. برای هر $x \in X$، رده x را به صورت $[x] = \{y \in X : (x,y) \in \rho\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی دلخواه باشد. $\rho \in B(X)$ را یک رابطه

الف) انعکاسی گوییم هرگاه برای هر $x \in X$، $(x,x) \in w$.

ب) متقارن گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$؛ اگر $(x,y) \in \rho$، آنگاه $(y,x) \in \rho$.

ج) متعدی گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in X$؛ اگر $(x,y) \in \rho$ و $(y,z) \in \rho$، آنگاه $(x,z) \in \rho$.

د) پادمتقارن گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$؛ اگر $(x,y) \in \rho$ و $(y,x) \in \rho$، آنگاه $x = y$.

یک رابطه انعکاسی، متقارن و متعدی روی مجموعه X را رابطه هم‌ارزی می‌نامیم.

یک رابطه انعکاسی، پادمتقارن و متعدی روی مجموعه X را رابطه ترتیب جزئی می‌نامیم. هرگاه ρ یک رابطه ترتیب جزئی روی مجموعه X باشد، به جای $x\rho y$ می‌نویسیم $x \leq y$. مجموعه X را که به رابطه ترتیب جزئی

$\leq$ مجهز شده است، یک مجموعه مرتب جزئی یا جزئاً مرتب می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. عنصرهای $a, b \in X$ را مقایسه پذیر گوییم هرگاه $a \leq b$ یا $b \leq a$ و می‌نویسیم $a \not\parallel b$. دو عنصر یک مجموعه مرتب جزئی، لزوماً مقایسه پذیر نیستند. اگر a و b مقایسه‌پذیر نباشند می‌نویسیم $a \parallel b$.

تعریف ٦.۱.۱. یک رابطه ترتیب جزئی روی مجموعه X که تحت آن هر دو عنصر X مقایسه پذیر باشند، یک رابطه ترتیب خطی (کلی) نامیم. در این صورت، X را یک مجموعه مرتب خطی گوییم . هر زیرمجموعه ناتهی مرتب خطی Y از مجموعه مرتب جزئی X را یک زنجیر در X گوییم.

مثال ۷.۱.۱. مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ همراه با ترتیب معمولی، یک مجموعه مرتب خطی است.

مثال ۸.۱.۱. قرار دهید $X = \{a, b, c, d\}$. مجموعه $P(X)$ متشکل از همه زیرمجموعه‌های X همراه با رابطه‌ی ترتیبی شمول مجموعه‌ها، یک مجموعه مرتب جزئی است. دو عنصر $\{a\}$ و $\{b\}$ مقایسه ناپذیرند. همچنین $Y = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ یک زنجیر در $P(X)$ است.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. عنصر $a \in X$ را مینیمال (ماکسیمال) نامیم هرگاه برای هر $x \in X$، از $x \leq a$$(x \geq a)$ نتیجه بگیریم $x = a$.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. عنصر $m \in X$ را ماکسیمم (مینیمم) گوییم هرگاه برای هر $x \in X$، $x \leq m$ $(m \leq x)$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید Y یک زیرمجموعه ناتهی از مجموعه مرتب جزئی $(X, \leq)$ باشد. عنصر $c \in X$ را یک کران پایین برای Y گوییم، هرگاه برای هر $y \in Y$، $c \leq y$.

اگر مجموعه کران‌های پایین Y ناتهی و دارای عضو ماکسیمم d باشد، آنگاه d را بزرگترین کران پایین برای Y گوییم، که در صورت وجود، منحصر به فرد است و به صورت $d = \bigwedge\{y : y \in Y\}$ نمایش می‌دهیم.

به طور مشابه، کران بالا و کوچکترین کران بالا برای یک زیرمجموعه ناتهی Y از یک مجموعه مرتب جزئی X تعریف می شود. کوچکترین کران بالا برای مجموعه‌ی Y به صورت $d = \bigvee\{y : y \in Y\}$ نمایش داده می شود.

گوییم مجموعه مرتب جزئی $(P, \leq)$ در شرط زنجیر فزاینده (ACC) صدق می‌کند هر گاه هر زنجیر صعودی از عناصر آن سرانجام خاتمه یابد. به‌عبارت دیگر، برای هر دنباله از عناصر P به صورت

$$a_۱ \leq a_۲ \leq a_۳ \leq \cdots,$$

عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که

$$a_n = a_{n+۱} = a_{n+۲} = \cdots$$

$(P, \leq)$ در شرط زنجیر کاهنده (DCC) صدق می‌کند هرگاه هر زنجیر نزولی از عناصر آن سرانجام خاتمه یابد.

۱—۲ نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها

تعریف ۱.۲.۱. یک عمل دوتایی روی مجموعه ناتهی X، نگاشتی است مانند $* : X \times X \to X$، که به هر $(x, y) \in X \times X$ عنصری مانند $x * y$ در X متناظر می‌کند. عمل دوتایی $*$ را شرکت‌پذیر گوییم هرگاه

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

و تعویض‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in S$، $x * y = y * x$.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه S همراه با یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر $*$ روی آن را نیمگروه نامیم. نیمگروه $(S, *)$ را تعویض‌پذیر خوانیم هرگاه عمل دوتایی آن تعویض‌پذیر باشد.

برای راحتی کار، عمل نیم‌گروه را ضربی در نظر می‌گیریم و از این پس به جای $x * y$ از نماد xy استفاده می‌کنیم.

اگر عنصر $1 \in S$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in S$، $1x = x1 = x$، آنگاه S را یک تکواره و ۱ را همانی S خوانیم. اگر S دارای عنصر همانی نباشد، می‌توان با اضافه نمودن ۱ به S و با تعریف عمل ضرب به صورت زیر، آن را به یک تکواره تبدیل کرد.

$$\forall s \in S, \quad 1s = s1 = s, \quad 1.1 = 1.$$

در این صورت $S \cup \{1\}$ یک تکواره می‌باشد و S^1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^1 = \begin{cases} S & 1 \in S \\ S \cup \{1\} & 1 \notin S. \end{cases}$$

S^1 را تکواره به دست آمده از S با الحاق عنصر همانی به آن می‌نامیم.

مثال ۳.۲.۱. $(\mathcal{B}(X), \circ)$ که در بخش قبل تعریف شد، یک تکواره است که تکواره رابطه‌های دوتایی روی مجموعه X نامیده می‌شود. عنصر همانی در این تکواره، رابطه دوتایی $\Delta_X = \{(x,x); x \in X\}$ می‌باشد.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید $M_n(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریسهای $n \times n$ روی اعداد حقیقی باشد. $M_n(\mathbb{R})$ همراه با عمل ضرب ماتریسها، یک تکواره می‌باشد که تعویض‌پذیر نیست. عنصر همانی این تکواره، ماتریس همانی می‌باشد.

تعریف ۵.۲.۱. عنصر $z \in S$ را یک صفر راست (چپ) نیم‌گروه S گوییم، هرگاه به ازای هر $s \in S$، $sz = z$ $(zs = z)$. همچنین $z \in S$ را صفر گوییم، درصورتی که به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $sz = zs = z$. اگر S دارای عنصر صفر نباشد، می‌توان با اضافه نمودن ۰ به S و با تعریف عمل ضرب به صورت زیر، آن را

به یک نیم‌گروه صفردار تبدیل کرد.

$$\forall s \in S, \quad \circ s = s\circ = \circ, \quad \circ.\circ = \circ.$$

در این صورت $S \cup \{\circ\}$ یک نیم‌گروه می‌باشد و S° را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^{\circ} = \begin{cases} S & \circ \in S \\ S \cup \{\circ\} & \circ \notin S. \end{cases}$$

S° را نیم‌گروه به دست آمده از S با الحاق عنصر صفر به آن می‌نامیم.

مثال ۶.۲.۱. بازه بسته $I = [\circ, ۱]$ را در نظر بگیرید. ضرب روی I را به صورت

$$xy = min(x, y) \qquad (x, y \in I)$$

تعریف می‌کنیم. این عمل بوضوح خوش‌تعریف و شرکت‌پذیر است. به آسانی می‌توان بررسی کرد که ۰ و ۱ به ترتیب صفر و همانی هستند. لذا I یک تکواره تعویض‌پذیر صفردار است.

تعریف ۷.۲.۱. عنصر a از نیم‌گروه S را خود توان گوییم در صورتی که $a^{۲} = a$. مجموعه تمام عناصر خودتوان S را با $E(S)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $e, f \in E(S)$. به سادگی می‌توان بررسی نمود که ترتیب تعریف شده بصورت $e \leq f$ اگر و تنها اگر $ef = fe = e$، یک رابطه ترتیب جزئی روی $E(S)$ است که رابطه ترتیبی طبیعی روی $E(S)$ نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. یک گروه، عبارتست از یک تکواره مانند S به طوری که برای هر $s \in S$ عنصر منحصربفرد $s^{-۱}$ در S موجود باشد، به قسمی که $۱ = s^{-۱}s = ss^{-۱}$.

تعریف ۹.۲.۱. زیرمجموعه ناتهی T از نیم‌گروه S را یک زیرنیم‌گروه S گوییم هر گاه $T^{۲} \subseteq T$، به عبارت دیگر T زیر نیم‌گروه S است هر گاه تحت عمل S بسته باشد، یعنی

$$\forall x, y \in T, \quad xy \in T.$$

اگر S تکواره‌ای با عنصر همانی ۱ باشد، آنگاه زیرنیم‌گروه T را زیرتکواره S گوییم اگر $۱ \in T$. اگر S یک گروه باشد، آنگاه زیرتکواره T از S را زیرگروه S گوییم هر گاه به ازای هر $x \in T$، داشته باشیم $x^{-۱} \in T$.

تعریف ۱۰.۲.۱. برای هر زیرمجموعه غیرتهی A از نیم‌گروه S، کوچکترین زیرنیم‌گروه S شامل A عبارتست از $\langle A \rangle = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A^n$، که آن را زیرنیم‌گروه تولید شده توسط A گوییم. اگر $S = \langle A \rangle$، آنگاه A مجموعه عناصر مولد S نامیده می‌شود. اگر $A = \{a\}$ و $S = \langle a \rangle$، در این صورت S نیم‌گروه تک مولدی یا دوری نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. رابطه ρ روی S را سازگار راست (چپ) گوییم، اگر

$$(\forall s, t, u \in S), s \ \rho \ t \Rightarrow su \ \rho \ tu \qquad (us \ \rho \ ut).$$

همچنین ρ را سازگار می‌نامیم، اگر سازگار چپ و راست باشد. یک رابطه هم‌ارزی سازگار را همنهشتی می‌نامیم.

مثال ۱۲.۲.۱. رابطه $\equiv (mod \ m)$ روی تکواره $\mathbb{N}$ یک رابطه همنهشتی است.

اهمیت همنهشتی‌ها روی یک نیم‌گروه S به جهت توانایی آنها در ساخت نیم‌گروههایی با استفاده از نیم‌گروه S می‌باشد. لم زیر این موضوع را بیشتر روشن می‌سازد.

لم ۱۳.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه و ρ یک همنهشتی روی S باشد. مجموعه $S/\rho = \{[a] : a \in S\}$ همراه با عمل $[s][t] = [st]$، یک نیم‌گروه است. اگر S یک تکواره باشد، آنگاه S/ρ نیز یک تکواره با عنصر همانی $[۱]$ می‌باشد. نیم‌گروه S/ρ را نیم‌گروه خارج قسمتی نامیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. زیر مجموعه ناتهی I از نیم‌گروه S را ایدآل چپ(راست) S گوییم، اگر $SI \subseteq I$ ($IS \subseteq I$). بعلاوه، I را ایدآل S گوییم هرگاه هم ایدآل چپ و هم ایدآل راست S باشد.

واضح است که هر ایدآل S یک زیرنیم‌گروه S است ولی عکس آن برقرار نیست.

مثال ۱۵.۲.۱. S را تکواره مثال ٦.۲.۱ در نظر بگیرید و فرض کنید $T = [۰/۵, ۱]$. براحتی می‌توان بررسی نمود که T یک زیر نیم‌گروه S است اما ایدآل آن نیست، زیرا $۰/۲۵ \in S$ و $۱ \in T$ اما حاصل‌ضرب آنها یعنی ۰/۲۵ عضوی از T نیست.

تعریف ۱٦.۲.۱. ایدآل K از تکواره S را حقیقی گوییم اگر $K \neq S$ و بدیهی گوییم اگر $K = S$ یا $\mid K \mid = ۱$.

اگر S یک نیم‌گروه و $A \subseteq S$، آنگاه حداقل یک ایدآل از S شامل A وجود دارد و آن خود S است. لذا تعریف زیر با معنی است:

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه و $A \subseteq S$. کوچکترین ایدآل (چپ، راست) S شامل A عبارت است از اشتراک تمام ایدآل های (چپ، راست) S که شامل A هستند.

به آسانی می‌توان بررسی کرد که اگر S یک نیم‌گروه و $a \in S$، آنگاه $S^۱a = Sa \cup \{a\}$ کوچکترین ایدآل چپ S (ایدآل چپ اصلی تولید شده توسط a)، شامل a است. به طور مشابه $aS^۱ = aS \cup \{a\}$ ایدآل راست اصلی تولید شده توسط a می‌باشد. همچنین $S^۱aS^۱ = SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\}$ را ایدآل اصلی تولید شده توسط a می‌نامیم.

قضیه ۱۸.۲.۱([۷]). فرض کنید S یک نیم‌گروه و $e \in E(S)$. احکام زیر معادلند:

(۱) eSe یک گروه است.

(۲) Se یک ایدآل چپ مینیمال S است.

(۳) eS یک ایدآل راست مینیمال S است.

هم‌ارزی های گرین نقش مهمی در توسعه نظریه نیم‌گروهها داشته‌اند. در زیر به معرفی یک نمونه که در ادامه به آن نیاز داریم می‌پردازیم:

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. رابطه $\mathcal{L}$ روی S به صورت $a\mathcal{L}b$ اگر و تنها اگر $S^1a = S^1b$ تعریف می‌شود. به سادگی می‌توان بررسی کرد که رابطه اخیر یک رابطه هم‌ارزی است.
$\mathcal{L}$ـ رده شامل a را با L_a نمایش می‌دهیم. از آنجایی که رابطه هم‌ارزی $\mathcal{L}$ بر حسب ایدآل‌ها تعریف شده است، رابطه ترتیبی شمول روی ایدآل‌ها یک رابطه ترتیب جزئی روی رده‌های هم‌ارزی القا می‌کند. این رابطه به صورت $L_a \leq L_b$ اگر و تنها اگر $S^1a \subseteq S^1b$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲۰. عنصر a از نیم‌گروه S را منظم گوییم هر گاه عنصری مانند $a' \in S$ موجود باشد، به طوری که $aa'a = a$. نیم‌گروه S را منظم گوییم هر گاه هر عضو آن منظم باشد. مجموعه عناصر منظم S را با $Reg(S)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۲.۲۱([۱۴]). فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد و $a, b \in Reg(S)$ به قسمی باشند که $L_a \geq L_b$. آنگاه برای هر $e \in E(L_a)$، عنصر $f \in E(L_b)$ وجود دارد به طوری که $e \geq f$.

تعریف ۱.۲.۲۲. فرض کنید S یک نیم‌گروه و $s \in S$. عضو s' از نیم‌گروه S را معکوس s گوییم هر گاه $ss's = s$ و $s'ss' = s'$. مجموعه تمام عناصر معکوس s را با $V(s)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲۳. عضو c از نیم‌گروه S را حذف‌پذیر چپ(راست) گوییم هر گاه برای هر $a, b \in S$، اگر $ca = cb$ $(ac = bc)$، آنگاه $a = b$. عضو c را حذف‌پذیر گوییم هر گاه حذف‌پذیر راست و چپ باشد.
نیم‌گروه S را حذف‌پذیر چپ(راست) گوییم هر گاه هر عضو آن حذف‌پذیر چپ(راست) باشد.

تعریف ۲۴.۲.۱. زیرتکواره T از تکواره M را یکدار راست خوانیم هرگاه $a, ba \in T$ ایجاب کند $b \in T$.

لم ۲۵.۲.۱([۱۸]). زیرتکواره T از تکواره M یکدار راست است اگر و فقط اگر $T = [۱]_\rho$، برای یک همنهشتی راست ρ روی S.

تعریف ۲۶.۲.۱. زیرتکواره T از تکواره M، تاشونده راست خوانده می‌شود هرگاه برای هر $a, b \in T$ بتوان $c \in T$ چنان یافت به طوری که $ac = bc$.

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. $\varphi : X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$، دقیقاً یک $y \in Y$ موجود باشد، به طوری که $\varphi(x) = y$ یا $(x, y) \in \varphi$.
مجموعه همه نگاشت‌ها از X به توی Y را با $map(X, Y)$ یا Y^X و مجموعه همه نگاشت‌ها از X به توی X را با $\mathcal{T}(X)$ نمایش می‌دهیم. هر عضو $\mathcal{T}(X)$ یک تبدیل از X و $(\mathcal{T}(X), \circ)$ تکواره تبدیلات کامل روی X نامیده می‌شود.

تعریف ۲۸.۲.۱. نگاشت $\varphi : X \longrightarrow Y$ را دوسویی خوانیم هرگاه یک به یک و پوشا باشد.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنید $(S, .)$ و $(T, .)$ دو نیم‌گروه باشند. در این صورت نگاشت $\phi : S \longrightarrow T$ را یک همریختی نیم‌گروه‌ها گوییم، هر گاه

$$\forall x, y \in S, \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

اگر S و T تکواره باشند به طوری که ۱_S و ۱_T به ترتیب عناصر همانی S و T باشند در این صورت $\phi : S \longrightarrow T$ را همریختی تکواره‌ها گوییم، هر گاه

$$\forall x, y \in S, \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \phi(۱_S) = ۱_T.$$

در صورت پوشایی، T تصویر همریخت S نامیده می‌شود. اگر ϕ یک به یک و پوشا باشد آن را یکریختی می‌نامیم. در این صورت S و T را یکریخت گوییم و می‌نویسیم $S \cong T$.

تعریف ۱.۲.۳۰. فرض کنید S یک تکواره باشد و $x \in S$. نگاشت $\lambda_x : S \longrightarrow S$ با ضابطه $\lambda_x(s) = xs$، انتقال چپ نامیده می‌شود. انتقال راست به طور مشابه تعریف می‌شود.

۱—۳ رسته

تعریف ۱.۳.۱. رسته $\mathcal{C}$، گردایه‌ای از اشیا(که با A، B، C و $\cdots$ نشان داده می شوند) است، به طوری که

(۱) به ازای هر جفت از اشیا A و B در $\mathcal{C}$، مجموعه‌ای به شکل $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ متناظر شود، به طوری که $Mor_{\mathcal{C}}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(A',B')$ اگر و تنها اگر $A = A'$ و $B = B'$. ($f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$)، یک ریخت از A به B نامیده می شود و با $f : A \to B$ نشان داده می شود.).

(۲) ترکیب ریخت‌ها تعریف شود. یعنی برای هر سه تایی (A,B,C) از اشیا $\mathcal{C}$، نگاشتی مانند

$$Mor_{\mathcal{C}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A,C)$$

$$(g,f) \to g \circ f$$

موجود باشد که در دو اصل زیر صدق می کند:

(الف) شرکت پذیر باشد. یعنی اگر $f : A \to B$ و $g : B \to C$ و $h : C \to D$ ریخت‌هایی از $\mathcal{C}$ باشند، آنگاه

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(ب) ریخت همانی وجود داشته باشد. یعنی برای هر شی B در $\mathcal{C}$ ریخت $id_B : B \to B$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $f : A \to B$ و $g : B \to C$

$$id_B \circ f = f, \quad g \circ id_B = g.$$