به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی
گروه آمار

عنوان پایان نامه:

بررسی رفتار مجانبی متغیرهای تصادفی وابسته با توزیع های دم پهن

ارائه شده جهت اخذ درجه دکتری در رشته آمار
گرایش نظریه احتمال

اساتید راهنما:

دکتر ابوالقاسم بزرگنیا

دکتر محمد امینی

نگارنده :

وحید رنجبر یانه سری

مرداد ۱۳۸۸

تقدیم به

ساحت مقدس آقا علی بن موسی الرضا

همسر صبور، قانع و مهربانم

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

و هر آنکه در راه علم تلاش می‌کند

قدردانی

حمد و سپاس پروردگاری را سزاست که به من توفیق تحصیل عنایت فرمود که اگر پرتو فضل او نبود هرگز موفق به انجام این مهم نمی‌شدم.

سپاس و تقدیر بی پایان خود را تقدیم اساتید راهنمای بزرگوارم جناب دکتر ابوالقاسم بزرگ نیا و جناب آقای دکتر محمد امینی می نمایم که بدون نظارت صبورانه ایشان در مراحل مختلف تحقیق و تدوین رساله، به انجام رساندن دوره غیر ممکن می‌نمود. کمال تشکر و قدردانی را از جناب آقای دکتر رضائی دارم که زحمت راهنمایی رساله کارشناسی ارشد بنده را به عهده داشتند و بی شک بدون حمایت های ایشان وارد شدن به دوره دکتری بسیار سخت و شاید ناممکن می بود. از جناب آقای دکتر محتشمی به خاطر راهنمایی های بسیار ارزشمندشان در تصحیح و تکمیل رساله سپاسگذارم.

همچنین از هیأ ت محترم داوران که رنج خواندن و تصحیح و تدبیر در پایان نامه را بر خود هموار کرده اند، قدر شناسی کرده و بسیار سپاسگزارم.

از همسرم به خاطر صبوریش در طول دوره دکتری و همراهی در این دوره دشوار، از پدر و مادرم که آنچه در توان داشتند برای کسب تحصیل من دریغ نکرده و همیشه حامی و پشتیبان بنده بوده اند و همچنین از پدر و مادر همسرم بسیار متشکرم.

در نهایت از تمام اساتید، دوستان و کارمندان دانشکده بخصوص بخش کتابخانه، جناب آقای داوود نژاد که همکاری صمیمانه و فراتر از وظایف شان را داشتند، آقای مؤمن مسئول انتشارات، خانم محمدی مسئول آموزش و همه کسانی که به نوعی بر گردن بنده در طول دورهٔ ده ساله حضور و تحصیل در مشهد مقدس، حقی دارند سپاسگزارم.

وحید رنجبر یانه سری — مرداد ۱۳۸۸

پیشگفتار

در تئوری آمار اغلب شرایط به گونه ای است که با افزایش مقدار متغیر تصادفی به سمت بینهایت (مثبت یا منفی) احتمال رخ دادن آن نیز به سرعت کاهش می یابد، به عبارتی مقادیر بزرگ متغیر تصادفی در بسیاری از متغیرهای رایج و معروف از احتمال رخداد کمتری برخوردارند. اما در برخی مواقع با حالاتی مواجه می شویم که در آن کاهش احتمال مقادیر بزرگ متغیر تصادفی به سرعت انجام نمی گیرد یا به عبارتی دیگر سرعت و سیر نزولی تابع چگالی از حالت معمول کمتر است. در این نوع پدیده‌ها مقادیر بزرگ متغیر تصادفی دارای جرم احتمال قابل توجه و نسبتاً بزرگی هستند. توابع توزیع متغیرهای تصادفی ای که از این ویژگی برخوردارند به توابع توزیع دم پهن [۱] معروف می باشند. تحلیل پدیده های دم پهن در سالهای اخیر بسیار مورد توجه دانشمندان و محققان علم آمار در دو گرایش احتمال و استنباط آماری، قرار گرفته است. در اغلب تحقیقاتی که بر روی متغیرهای تصادفی دم پهن انجام شده است، تمایل محققان به بررسی رفتار مجانبی این متغیرها بسیار به چشم می خورد. به عبارتی رفتار مقادیر بزرگ این متغیرها بیشتر مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است. در این زمینه می توان به تحقیقات دانشمندانی چون تانگ [۲] و همکاران (۲۰۰۴، ۲۰۰۵، ۲۰۰۶، ۲۰۰۷) و امبریچس [۳] و همکاران (۱۹۷۹a، ۱۹۷۹b، ۱۹۸۲) اشاره نمود.

از طرفی از دیگر مواردی که در علم آمار نقش اساسی دارد بحث وابستگی متغیرهای تصادفی است. با نگاه به پیشینه تاریخی علم آمار در می یابیم که فرض استقلال متغیرهای تصادفی یکی از فرض های پایه‌ای است که بسیاری از مفاهیم بر اساس آن استوار است. ولی از آنجایی که در عمل و در طبیعت بیشتر اوقات با شرایطی سر و کار داریم که نمی توان فرض استقلال را برای متغیرهای تصادفی در نظر گرفت، لذا دانشمندان علم آمار تقریباً از نیمه قرن نوزدهم به بعد به سمت مطالعه متغیرهای وابسته تمایل پیدا کردند. بخصوص در اواخر قرن بیستم تلاش زیادی در این زمینه انجام شد. که از پیشگامان

---

[۱] Heavy Tailed

[۲] Tang, Q

[۳] Embrechts, P

این دوره می توان به هریس [۴]، لی من [۵] اشاره نمود.

هدف ما در این رساله بررسی رفتار مجانبی توابعی از متغیرهای تصادفی دم پهن وقتی که متغیرها وابسته هستند، می باشد. برای نیل به این منظور ابتدا در فصل اول به ارائه مفاهیم وابستگی پرداخته و خاصیت دم پهنی متغیرهای تصادفی و کلاسهای مختلف متغیرهای تصادفی دم پهن را معرفی می کنیم. در فصل دوم رفتار مجانبی مجموع دو متغیر تصادفی وابسته دم پهن تحلیل و بررسی شده است. بحث فصل سوم در ادامه فصل دوم بوده که در آن مجموع موزون و مجموع موزون تصادفی متغیرهای تصادفی وابسته دم پهن و رفتار مجانبی آن مورد مطالعه قرار می گیرد. در فصل چهارم رفتار مجانبی حاصلضرب متغیرهای تصادفی مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت در فصل آخر با ارائه یک مثال از خانواده ای از متغیرهای تصادفی وابسته دم پهن، به بررسی ساختار وابستگی این خانواده بر اساس ضرایب همبستگی مختلف و برخی ضرایب اطلاع پرداخته شده است.

وحید رنجبر یانه سری

مرداد ۱۳۸۸

---

[۴] Harris, R

[۵] Lehmann, E. L

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم

۱—۱ مقدمه

در این فصل به معرفی مفاهیم مورد نیاز در فصل های دیگر پرداخته شده و برخی قضایا و لم های مفید بیان می شوند. در تمام فصل ها فرض بر این است که متغیرهای تصادفی نامنفی می باشند در غیر این صورت معرفی خواهند شد.

۱—۲ توزیع های دم پهن

همانطوری که می دانیم در تئوری آمار معمولاً با شرایطی سرو کار داریم که در آن متغیرهای تصادفی به گونه ای در نظر گرفته می شوند که با افزایش مقدار متغیر تصادفی به سمت بینهایت (مثبت یا منفی) احتمال رخ دادن آن نیز به سرعت کاهش می یابد، به عبارتی مقادیر بزرگ متغیر تصادفی در بسیاری از متغیرهای رایج و معروف از احتمال رخداد کمتری برخوردارند. اما در برخی مواقع با حالاتی مواجه می شویم که در آن کاهش احتمال مقادیر بزرگ متغیر تصادفی به سرعت انجام نمی گیرد یا به عبارتی دیگر سرعت و سیر نزولی تابع چگالی از حالت معمول کمتر است. در این نوع پدیده‌ها مقادیر بزرگ متغیر تصادفی دارای جرم احتمال قابل توجه و نسبتاً بزرگی بوده و به پدیده های دم پهن[۱] معروف می باشند. تحلیل پدیده های دم پهن شاخه‌ای از نظریه مقادیر فرین[۲] در آمار بوده که در سالهای اخیر بسیار مورد توجه دانشمندان و محققان علم آمار در دو گرایش احتمال و استنباط آماری، قرار گرفته است. کاربرد این پدیده‌ها را به فراوانی می توان در علوم زیر دید:

- کامپیوتر و شبکه[۳]، که در آن داده های حجیم درون سرویس دهنده ها این سیستم ها یک پدیده دم پهن است.

---

[۱] Heavy Tailed Phenonema

[۲] Extreme Values

[۳] Network

- مالیات [۴]، که در آن بازپرداختهای مالیاتی یک پدیده دم پهن می باشد. لذا برای محاسبه مقدار خطر در این علوم نیازمند آگاهی از روشها و نظریه پدیده های دم پهن هستیم.
- بیمه[۵] ، این بحث نیز جزو پدیده های دم پهن می باشد چراکه در آن با حجم بسیار زیاد بیمه شوندگان و انواع بیمه مواجه هستیم.

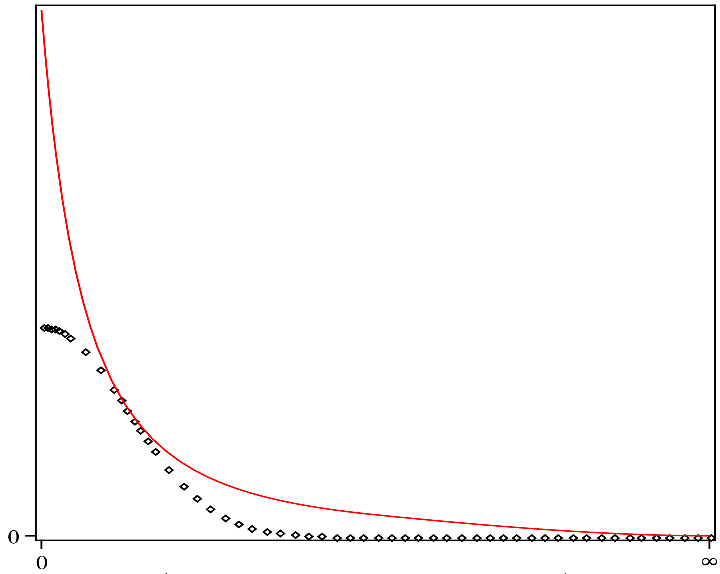
با توجه به تعریف متغیرهای تصادفی دم پهن و تفاوتی که بین این متغیرها و دیگر متغیرهای تصادفی وجود دارد، می توان این حقیقت را داشت که تحلیل داده های این دو نوع متغیرها نیز با هم متفاوت باشد. تفاوت عمده و اساسی مدلبندی و تحلیل پدیده های دم پهن و مدلبندی کلاسیک متغیر های معمولی این است که در پدیده های دم پهن، مدلبندی و استنباط بر اساس دم توزیع ها است چراکه بیشتر توجه در این کلاس از داده ها به انتها و دم توزیع می باشد. اما همانطور که می دانیم در مدلبندی کلاسیک مبنای تحلیل و استنباط بر اساس گشتاورهای مرکزی، میانگین و در حالت کلی بر اساس معیارهای تمرکز توزیع استوار است. به عنوان مثال بخش عظیمی از آمار پارامتری مبتنی بر فرضیه نرمال بودن توزیع دادها بوده و همانطوری که می دانیم این چگالی (نرمال) دارای دمی نازک[۶] می باشد. نمودار (۱.۱) تابع چگالی نرمال استاندارد و تابع چگالی توزیع پارتو را که یکی از توابع توزیع خانواده توزیع های دم پهن است را نمایش می دهد. همانطوری که مشاهده می شود نمودار چگالی توزیع پارتو سیر نزولی کندتری نسبت به چگالی نرمال استاندارد دارد.

---

[۴] Finance

[۵] Insurance

[۶] Light Tail



نمودار ۱.۱: نمودار مقایسه چگالی نرمال استاندارد[۶] (نقطه چین) و چگالی پارتو (منحنی پیوسته).

از نظر نوع برخورد با داده های با توزیع های دم پهن، می توان تحلیل این داده ها را به سه شاخه زیر تقسیم بندی نمود:

۱) ریاضی؛ این بخش قسمتی از تحلیل داده های دم پهن است که ساختار ریاضی و روابط منطقی این تحلیل را فراهم می کند.

۲) نظریه احتمال و فرآیندهای تصادفی؛ یکی از موضوع هایی که در تحلیل داده های دم پهن بسیار مورد توجه قرار گرفته و می گیرد بحث قضایای حدی و رفتار مجانبی توزیعهای این داده ها است که هدف اصلی این رساله نیز می باشد. همچنین برای بررسی این نوع پدیده ها دانستن تئوری فرآیندهای تصادفی، بخصوص فرآیند نقطه ای بسیار حائز اهمیت است.

۳) آمار؛ کاربرد علم آمار برای این نوع پدیده ها، به عنوان مثال، جواب دادن به‌این نوع سوالات است: آیا داده ها دم پهن هستند؟ آیا مدلبندی دم پهن برای داده ها مناسب است ؟ چگونه می توان به داده های دم پهن مدلی را برازش داد؟

در تئوری احتمال، توزیع های دم پهن، توزیع های احتمالی هستند که دم توزیع آنها به صورت نمایی کراندار نباشد. به عبارتی دیگر توزیعی دم پهن است که دم آن از دم توزیع نمایی پهن تر باشد. در اغلب مواقع دم راست توزیع مورد توجه قرار می گیرد یعنی وقتی گفته می شود دم توزیعی پهن است منظور دم راست آن است ولی ممکن است توزیعی دارای دم چپ پهن و یا دم پهن دو طرفه باشد.
در ادامه نمادهایی را برای بیان رابطه بین دو تابع معرفی می کنیم که در اثبات قضایا در فصول مختلف این رساله مورد استفاده قرار خواهند گرفت. سپس تعریف ریاضی متغیرهای تصادفی دم پهن را ارائه می دهیم.

تعریف ۱.۱ دو تابع f و g را به طور مجانبی معادل گوییم و با $f(x) \sim g(x)$ نمایش می دهیم هرگاه

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱.$$

تعریف ۲.۱ تابع f را به طور مجانبی بزرگتر (کوچکتر) از تابع g گوییم و با $f(x) \gtrsim (\lesssim) g(x)$ نمایش می‌دهیم هرگاه

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \geq (\leq) ۱.$$

تعریف ۳.۱ توابع توزیع F و G را معادل جمعِ بیشینه[۷] گوییم و با $F \sim_M G$ نمایش می دهیم هرگاه

$$\bar{H}(x) \sim \bar{F}(x) + \bar{G}(x).$$

که در آن H تابع توزیع پیچش دو متغیر تصادفی با توابع توزیع F و G است.

تعریف ۴.۱ (رسنیک[۸] ۲۰۰۷) متغیر تصادفی X دارای توزیعی با دمِ پهن می باشد اگر عددی مانند $\alpha > ۰$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$P[X > x] \sim x^{-\alpha}, \quad x \to \infty. \qquad (۱-۱)$$

[۷] Max-Sum Equivalent

[۸] Sidney I. Resnick

یا به طور معادل، X دارای توزیع دم پهن است اگر برای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} P[X > x] = \infty. \qquad (۲-۱)$$

اگر بخواهیم مثالهایی از توابع توزیع هایی که در رابطه(۱-۱) صدق می کنند ارائه دهیم می توان به توزیع هایی از قبیل پارتو، لگ نرمال، لِوی، وایبل، بِر، لوگ گاما، کوشی، t و F اشاره نمود. که در آنها کوشی و t دم پهن دو طرفه هستند. همانطوری که قبلاً اشاره شد در تحلیل و استنباط متغیرهای تصادفی با توزیع دم پهن، استفاده از روشهای گشتاوری یعنی روشهایی که مبنای آن بر معیارهای تمرکز و گشتاور توزیع استوار است، در اغلب مواقع درست نبوده و قابل اجرا نیست چراکه، همانطوریکه در زیر ملاحظه می شود، بر اساس تعریف برای این متغیرهای تصادفی گشتاورهای مرتبه های بیشتر از $\alpha > 0$ وجود ندارد.

$$\int_0^\infty x^{\beta-1} P[X > x]dx \approx \int_1^\infty x^{\beta-1} x^{-\alpha} dx \begin{cases} < \infty & \beta < \alpha, \\ = \infty & \beta \geq \alpha, \end{cases}$$

بنابراین می بایست از روشهایی استفاده نمود که مبنای استنباط آن چیزی غیر از گشتاورهای توزیع باشد که برای متغیرهای تصادفی دم پهن این کار با استفاده از تحلیل بر روی دم توزیع ها انجام می شود. برای مطالعه بیشتر در زمینه متغیرهای دم پهن می توان به منابعی از قبیل رسنیک (۱۹۸۷)، هان و فریا[۹] (۲۰۰٦) و فین کن استد[۱۰] و روتزن [۱۱] (۲۰۰۳) مراجعه نمود.

در سراسر رساله از علامت F^n به عنوان n امین پیچش متغیر تصادفی با خودش و از $\overline{F} = 1 - F$ به عنوان دم توزیع یا تابع بقا استفاده می کنیم.

کلاس متغیرهای تصادفی دم پهن شامل چند زیر کلاس مهم است که بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. در ادامه به معرفی نمونه هایی از این زیر کلاسها که در این رساله مورد استفاده قرار گرفته‌اند، می پردازیم.

---

[۹] Hann, de Laurens and Ferreira Ana

[۱۰] Finkenstadt, B

[۱۱] Rootzen, H

۱) توابع توزیع زیر نمایی[۱۲]:

یکی از مهمترین کلاسهای توزیع های دم پهن کلاس متغیر های تصادفی زیر نمایی بوده که در حدود نیم قرن پیش نخستین بار توسط چیستیاکف [۱۳] معرفی گردید. تقریباً تمام توزیع های دم پهن رایجی که معمولاً مورد استفاده قرار می گیرند و در قسمت قبل نام برده شدند، زیر نمایی هستند.

تعریف ۵.۱ توزیع F با تکیه گاه $[0,\infty)$ زیر نمایی است و با $F \in S$ نمایش می دهیم، اگر برای هر $n \geq 2$،

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{(n)}}(x)}{\overline{F}(x)} = n. \qquad (۱-۳)$$

که در آن $\overline{F^{(n)}}(x) = P(X_1 + ... + X_n > x)$ و X_i ها متغیرهای تصادفی با توزیع مشترک F هستند.

تحقیق در این کلاس از توزیع ها در سالهای اخیر یکی از پر کاربرد ترین موضوعات در زمینه احتمال کاربردی و تحلیل خطر بوده است. محققان و دانشمندان زیادی در مورد کاربرد این کلاس در علوم مختلف از جمله بیمه و مالیات، مقالات و کتب بسیار ارزشمندی به رشته تحریر در آوردند که در فصول مختلف رساله، بسته به موضوع مورد بررسی، به معرفی این افراد و تحقیقات و نتایج بدست آمده توسط آنها که مرتبط با موضوع رساله باشد، خواهیم پرداخت.

۲) توابع توزیع دم بلند[۱۴]:

یکی دیگر از کلاسهای دم پهن کلاس توزیع های دم بلند می باشد.

---

[۱۲] Subexponential

[۱۳] Chistyakov V.P

[۱۴] Long Tailed

تعریف ۶.۱ تابع توزیع F عضو کلاس توزیعهای دم بلند است و با $F \in L$ نمایش می دهیم، اگر به ازای هر $u > 0$ داشته باشیم،

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+u)}{\overline{F}(x)} = 1. \qquad (۱-۴)$$

یا بطور معادل برای هر $u > 0$،

$$\lim_{x\to\infty} P(X > x+u | X > x) = 1.$$

کلمه دم بلند ابتدا توسط کریس اندرسون [۱۵] در سال ۲۰۰۴ در مجله ویرد [۱۶] برای بیان روشهای تجارت اینترنتی بکار گرفته شد. ویژگی این نوع تجارت ها وجود موارد بسیار زیاد برای تجارت (خرید و فروش) می باشد. اما توزیع فراوانی با دم بلند، در مفهوم معرفی شده توسط اندرسون، سالها پیشتر توسط برون[۱۷] و توکی[۱۸](۱۹۴۶) مورد توجه قرار گرفته بود. آنها با تحلیل هایی که بر روی تجارت انجام دادند، محصولات و کالاهای مصرفی را به دو دسته تقسیم بندی نمودند. دسته اول آن دسته از کالاهای رایجی بودند که به راحتی در دسترس مشتریان قرار می گرفتند و دسته دوم کالاهایی بودند که تعداد آنها کم و نایاب بوده و به سختی در دسترس قرار داشتند. آنها دریافتند که تفاوت معنی داری بین سود حاصل از فروش این دو دسته از کالاها وجود دارد. به این معنی که سود حاصل از فروش محصولات کمیاب بسیار بیشتر از سود فروش محصولات رایجتر (دارای فراوانی بیشتر در بازار) می باشد. در این حالت محصولاتی که نایاب بوده و از فراوانی کمتری برخوردار بودند را دم بلند معرفی نمودند. آنها این دو دسته را به نامهای «دسته هدف» و «دسته غیر هدف یا دم بلند» تقسیم بندی نمودند. در این تقسیم بندی محصولات «هدف» محصولاتی هستند که توسط شرکتهایی که به روش سنتی کار می کنند مورد توجه قرار دارند و محصولات «غیر هدف یا دم بلند» محصولاتی هستند که با در نظر گرفتن

[۱۵] Chris Anderson

[۱۶] Wired

[۱۷] Brown

[۱۸] Tukey

نظریه جدید سود بیشتری را نسیب شرکتها می کنند. در این نوع تقسیم بندی، بر اساس قاعده پارتو، ۸۰ درصد سود حاصل از فروش توسط ۲۰ درصد از محصولات که محصولات نایاب هستند، تامین می شود و ۲۰ درصد از سود توسط محصولات یا گروه رایج حاصل خواهد شد. که این مسئله به اصل ۸۰—۲۰ پارتو نیز معروف است. برای توضیح بیشتر در این مقوله می توان به پایگاه ویکیپدیا[۱۹] مراجعه نمود.

۳) توابع توزیع با دم های با تغییر کراندار[۲۰]:

تعریف ۷.۱ توزیع F عضو کلاس توابع توزیع با دم های با تغییر کراندار است و با $F \in D$ نمایش می دهیم، اگر برای هر $0 < u < 1$ داشته باشیم

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(ux)}{\overline{F}(x)} < \infty. \qquad (۱—۵)$$

۴) توابع توزیع با دم های با تغییرات منظم[۲۱]:

یکی از زیر گروهای معروف کلاسهای D و L کلاس توابع توزیع با دم های با تغییرات منظم است که با R_α نمایش داده می شود.

تعریف ۸.۱ توزیع F عضو کلاس توابع توزیع با دم های با تغییرات منظم است و با $F \in R_\alpha$ نمایش می دهیم، اگر $0 \leq \alpha < \infty$ وجود داشته باشد، بقسمی که برای هر $u > 0$ داشته باشیم

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(ux)}{\overline{F}(x)} = u^{-\alpha}. \qquad (۱—٦)$$

از رابطه فوق می توان دریافت که توزیعی دارای دم با تغییرات کراندار است که رفتار آن به طور مجانبی شبیه رفتار توابع توانی[۲۲] باشد. از توابع توزیع معروفی که در رابطه (۱—٦) صدق می‌کند می توان به توزیع مقادیر فرین[۲۳] اشاره نمود.

[۱۹] Wikipedia.org

[۲۰] Dominatedly Varying Tails

[۲۱] Regularly Varying Tails

[۲۲] Power Functions

[۲۳] Extreme Value

۵) توابع توزیع با دم های با تغییرات منظم تعمیم یافته [۲۴]:

این کلاس از توابع توزیع را با ERV نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۹.۱ تابع توزیع F عضو کلاس توابع توزیع با دم های با تغییرات منظم تعمیم یافته است ($F \in ERV$)، اگر مقادیر مثبت $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ وجود داشته باشند به قسمی که برای هر $u > 1$

$$u^{-\beta} \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(ux)}{\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(ux)}{\overline{F}(x)} \leq u^{-\alpha}. \qquad (۷-۱)$$

۶) توابع توزیع با دم های با تغییرات سازگار [۲۵]:

این کلاس از توابع توزیع را با C نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

تعریف ۱۰.۱ تابع توزیع F عضو کلاس توابع توزیع با تغییرات استوار است ($F \in C$) اگر برای هر $u > 1$

$$\lim_{u\downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(ux)}{\overline{F}(x)} = 1, \quad or \quad \lim_{u\uparrow 1} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(ux)}{\overline{F}(x)} = 1. \qquad (۸-۱)$$

یکی از اهداف تحقیقات در زمینه متغیرهای تصادفی دم پهن بررسی رابطه بین کلاسهای مختلف این توزیع هاست. برای کلاسهای فوق روابط زیر در مقالات مختلف بیان شده است که از آن جمله می توان به بینگهام[۲۶] و همکاران (۱۹۸۷، فصل ۲)، گولدی[۲۷](۱۹۷۸) و امبریچس و همکاران (۱۹۷۹) اشاره نمود.

$$R \subset ERV \subset C \subset D \cap L \subset S \subset L.$$

[۲۴] Extended Regularly Varying Tails

[۲۵] Consistently Varying Tails

[۲۶] Bingham, N.H

[۲۷] Goldie, C.M

در ادامه مثالی را ارائه خواهیم داد که توسط امبریجس و گولدی (۱۹۷۹) ارائه شد. این مثال شاهدی است بر وجه افتراق بین کلاسهای زیر نمایی و دم بلند. به عبارتی این مثال نشان می دهد که کلاس متغیرهای تصادفی با توزیع های زیر نمایی زیر کلاس محض کلاس متغیرهای تصادفی دم بلند است.

مثال ۱.۱ فرض کنید X متغیری تصادفی با تابع بقا زیر باشد.

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} ۰ & -\infty < x \leq ۲, \\ \frac{۱}{(n+۱)!} & (n+۱)! + na_n \leq x \leq (n+۲)!\,, \quad n = ۱, ۲, ... \end{cases}$$

$$\overline{F}((n+۱)!+u) = \frac{۱+n-u/a_n}{(n+۱)!}, \quad ۰ \leq u \leq na_n, \;\; n = ۱, ۲, ...$$

که در آن a_n دنباله‌ای از مقادیر مثبت بوده بطوریکه $a_n \to \infty$ و $a_n < \frac{۱}{۲}(n+۱)!$. امبریجس و گولدی (۱۹۷۹) نشان دادن که F عضو کلاس توابع توزیع دم بلند است ولی عضو کلاس توابع توزیع زیر نمایی نمی باشد. به عبارتی آنها ثابت نمودند $S \subset L$.

برخی خواص هر یک از کلاسهای ذکر شده در فصلهای مختلف این رساله، بر اساس موضوع مورد بررسی هر فصل، بیان و تحلیل خواهد شد.
اغلب تحقیقات و بررسی هایی که بر روی کلاسهای مختلف توابع توزیع دم پهن در بحث احتمال صورت می گیرد، همانطوری که به طور مختصر در ابتدای فصل به آن اشاره شد، بررسی رفتار مجانبی این توزیع ها و بحث انواع همگرایی در آنهاست، چراکه برای این کلاس از توزیع ها، مقادیر بسیار بزرگ دارای جرم احتمال قابل ملاحظه ای هستند. به عبارتی سرعت کاهش و نزول تابع چگالی این توابع کمتر از دیگر کلاسهاست. لذا دانستن رفتار مجانبی آنها به عبارتی بررسی این رفتار برای دانشمندان بسیار ارزشمند است. به همین دلیل در طول نیم قرن اخیر مطالعات بسیاری در این زمینه صورت گرفته است.
یکی از بحثهای مهمی که در این قسمت در سالهای اخیر مورد توجه قرار گرفته است موضوع نوع وابستگی متغیرهای مورد بررسی می باشد. در تحقیقات اولیه در این زمینه اغلب فرض بر استقلال و