بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور مرکز تهران

دانشکده علوم پایه

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

عنوان:

بررسی روش هموتوپی و اختلال هموتوپی و کاربرد آن در حل مسائل غیر خطی

استاد راهنما:

آقای دکتر سهرابعلی یوسفی

استاد مشاور:

خانم دکتر فهیمه سلطانیان

نگارش:

سیده ندا یعقوبیان

دی 89

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

چکیده

بسیاری از مدل‌های ریاضی ارائه‌شده برای مسائل مختلف کاربردی در شاخه‌های متعدد از علوم و صنعت مانند فیزیک، مهندسی، اقتصاد، بیولوژی و غیره منجر به معادلات دیفرانسیل یا انتگرال و یا ترکیبی از این دو می‌گردند.از آنجا که یافتن جواب واقعی برای این معادلات بااستفاده از روشهای تحلیلی دشوار و در بسیاری از موارد غیرممکن می‌باشد همواره نیاز به استفاده از روش‌های تقریبی کارآمد و مناسب احساس می شود.

ایده اساسی در روش هموتوپی جای دادن مسئله داده شده در یک خانواده از مسائل پارامتری است که از یک پارامتر p استفاده می شود که بازه $[0,1]$ را می پیماید. زمانی p از صفر به یک افزایش می‌یابد از حدس اولیه به جواب تقریبی مسئله می‌رسیم.در بسیاری از موارد با انتخاب درست تقریب اولیه و یافتن دیگر تقریب‌ها یک سری توانی همگرا به جواب واقعی مسئله پیدا خواهد شد.

کلمات کلیدی : روش آنالیز هموتوپی، روش اختلال هموتوپی، سری توانی، معادله دیفرانسیل، معادله انتگرال، معادله انتگرال- دیفرانسیل.

فهرست

پیشگفتار

در 1992 لیائو[1] برای اولین بار روش هموتوپی را معرفی کرد که یک تکنیک آنالیزی برای یافتن جواب تقریبی مسائل غیرخطی می‌باشد و آن‌را روش آنالیز

هموتوپی[2] نامید.

ایده اصلی روش بدین گونه است:

در این روش مسئله داده شده را در یک خانواده از مسائل پارامتری جای می دهیم و از یک پارامتر p استفاده می‌شود، که در بازه $[0,1]$ قرار دارد. مسئله

اصلی متناظر با $p=1$ می‌باشد و مسئله دیگرمتناظر با جواب معلوم $p=0$ است. برای مثال، تعریف می کنیم

$$H(x,p)=pf(x)+(1-p)g(x) \tag{1}$$

که معادله $g(x)=0$ باید یک جواب معلوم داشته باشد. گام بعدی انتخاب نقاط $p_0,p_1,\ldots,p_m$ است

به قسمی که:

$$0=p_0<p_1<p_2<\ldots<p_m=1$$

سپس به حل معادله $H(x,p_i)=0$, $0\le i\le m$ می‌پردازیم. با فرض این‌که یکی از روش‌های تکراری (مثلا روش تکرار نیوتن) مورد استفاده قرار

گیرد، بهتر است که از جواب گام i ام به‌عنوان نقطه شروع در محاسبه یک جواب گام $(i+1)$ ام استفاده نمائیم.

تمام این رویه، می تواند به عنوان راه علاجی برای چیره شدن بر مشکلاتی در نظر گرفته شود که در مورد نیاز به یک نقطه شروع خوب با آن مواجه می باشیم.

1-Liao

2-homotopy analysis method

رابطه (1)، مثالی از یک هموتوپی است که دو تابع f , g را به هم ربط می‌دهد. بطورکلی یک‌هموتوپی می‌تواند یک رابطه دلخواه پیوسته بین f , g باشد

یا یک هموتوپی بین دو تابع $f,g:X\to Y$ یک

نگاشت پیوسته به صورت زیر است:

$$H:[0,1]\times X\to Y \qquad (2)$$

که $H(x,1)=f(x)$ و $H(x,0)=g(x)$ می باشد. اگر چنین نگاشتی وجود داشته باشد گوئیم f هموتوپیک g است. این یک رابطه هم ارزی بین نگاشت های پیوسته از X به Y می باشد، که در آن X و Y می توانند دو فضای توپولوژی دلخواه باشند.

یک هموتوپی ساده که اغلب مورد استفاده قرار می گیرد، عبارت است از:

$$H(x,p)=pf(x)+(1-p)[f(x)-f(x_0)]=f(x)+(p-1)f(x_0) \qquad (3)$$

در اینجا x_0 یک نقطه دلخواه در X می‌باشد، و واضح است برای وقتی که $p=0$ باشد x_0 یکجواب مسئله است.

اگر معادله $H(x;p)=0$ برای هر $p\in[0,1]$ یک ریشه منحصر به فرد داشته باشد، آن گاه آن ریشه یک تابع از p می‌باشد و می‌توانیم $x(p)$ را به‌عنوان عضو منحصربه‌فرد X که معادله $H(x,x(p))=0$ را برقرار می سازد، بنویسیم. مجموعه

$$\{x(p):0\le p\le 1\} \qquad (4)$$

می تواند به عنوان یک کمان یا منحنی در X، که توسط p پارامتری می‌گردد، تعبیر شود. این کمان از نقطه معلوم $x(0)$ شروع شده و تا جواب مسئله یعنی $x(1)$ ادامه دارد. روش هموتوپی سعی می‌کنداین خم را با محاسبه نقاطی بر روی آن مانند $x(p_0),x(p_1),...,x(p_n)$ تعیین کند.

اگر تابع $p\to x(p)$ و تابع H مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه قضیه تابع ضمنی این امکان رافراهم میسازد که $x'(p)$ را محاسبه کنیم. با پیروی از این ایده، می توانیم خم رابطه (4) را با یک معادله دیفرانسیل بیان کنیم.

با فرض یک هموتوپی دلخواه، داریم:

$$H(x,x(p))=0 \qquad (5)$$

با مشتق گیری نسبت به t به دست می آوریم:

$$H_t(x(p),p)+H_x(x(p),p)x'(p)=0 \qquad (6)$$

که در آن اندیس ها مشتقات جزیی را بیان می کنند. بنابراین خواهیم داشت:

$$x'(p) = -[H_x(x(p),p)]^{-1} H_t(x(p),p) \qquad (7)$$

این یک معادله دیفرانسیل برای x است و مقدار اولیه معلومی دارد زیرا که فرض براین است $x(0)$ معلوم باشد. با انتگرال گیری از این معادله دیفرانسیل

(معمولا با روش های عددی) مقدار $x(1)$ که جواب مسئله است بدست آورده می شود.

فصل 1

مفاهیم مقدماتی

1-1- مقدمه

در این فصل به اختصار به ارائه برخی مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصول آینده می پردازیم.

2-1- تعریف فضای برداری:

فرض کنید V یک مجموعه ناتهی با خصوصیات زیر باشد

عمل جمع موجود باشد که به هر جفت از اعضای V مانند f و g را به یک عضو $f+g$ در V نظیر کند به طوری که:

فرض کنید $h \in V$ آنگاه داریم:

$$f+g=g+f$$
$$f+(g+h)=(f+g)+h$$

یک عنصر یکتا به نام صفر در V موجود باشد به طوری که:

$$\forall f \quad f+0=f$$

برای هر $f \in V$ یک عنصر یکتا ($-f$) در V موجود باشد به طوری که:

$$f+(-f)=0$$

عمل‌ضرب اسکالر موجود باشد به طوری که به ازای هر $f \in V$ و هر عدد (اسکالر) α حقیقی(مختلط) $\alpha f \in V$ ، همین طور برای هر

دو $f, g \in V$ و هر دو اسکالر α و β داشته باشیم:

$$\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$$
$$(\alpha\beta)f=\alpha(\beta f)$$
$$1.f=f$$

در این صورت V یک فضای برداری نامیده می شود.

1-3- تعریف:

به زیر مجموعه M از فضای برداری V یک زیرفضای خطی گوییم هرگاه تحت اعمال جمع و ضرب اسکالر فضای برداری V، یک فضای برداری باشد.

1-4- تعریف:

فرض کنید X یک مجموعه باشد که برای هر جفت از عناصر $f, g \in X$، یک عدد حقیقی نامنفی $d(f,g)$ موجود باشد به طوری که برای هر $f, g, h \in X$ داشته باشیم:

$d(f,g)=0$ اگر و تنها اگر $f=g$

$$d(f,g)=d(g,f)$$
$$d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g)$$

در این صورت d یک متر بر روی X نامیده می‌شود و (X,d) یک فضای متریک خواهد بود.

1-5- تعریف:

مجموعه X به همراه گردایه از زیرمجموعه‌های X مانند $\mathcal{T}$ را یک فضای توپولوژیکی گویند هرگاه:

1. اجتماع هر گردایه از مجموعه های عضو $\mathcal{T}$ در $\mathcal{T}$ قرار داشته باشد؛

2. اشتراک هر تعداد متناهی مجموعه عضو $\mathcal{T}$ در $\mathcal{T}$ قرار داشته باشد؛ یعنی اشتراک هر گردایه متناهی از مجموعه‌های عضو $\mathcal{T}$، در آن قرار داشته باشد.

3. مجموعه‌های تهی و X، عضو $\mathcal{T}$باشند؛

گردایهٔ $\mathcal{T}$، توپولوژی تعریف شده روی X نام دارد. هم‌چنین، اعضای توپولوژی $\mathcal{T}$، مجموعه‌های باز در X ،و متمم آن ها، مجموعه های بسته در X هستند. اگر X یک فضای توپولوژیکی باشد، آن‌گاه به اعضای آن *نقطه* گفته می‌شود..

6-1- تعریف:

نگاشت f میان دو فضای توپولوژیکی X و Y یک هم‌ریختی نامیده می‌شود، اگر دارای خواص زیر باشد:

1. fدوسویه باشد (یک به‌یک و پوشا)؛

2. fپیوسته باشد؛

3. نگاشت وارون، f^{-1}پیوسته باشد (f یک نگاشت باز باشد).

اگر چنین نگاشتی وجود داشته باشد، آن‌گاه X و Y **هم‌ریخت** هستند. یک **خود هم‌ریختی**، هم‌ریختی میان یک فضای توپولوژیکی و خودش است. هم‌ریختی ها روی کلاس تمام فضا های توپولوژیکی، یک رابطه هم‌ارزی تشکیل می دهند. کلاس های هم‌ارزی حاصل، **کلاس های هم ریختی** نامیده می‌شوند.

7-1-تعریف:

فرض کنید $f \in V$ و $0 < r < \infty$ داده شده باشد در این صورت به مجموعه‌ی زیر، یک گوی باز به مرکز f و به شعاع r می گوییم:

$$S(f,r) = \{g : d(f,g) < r\}$$

به هر مجموعه شامل نقطه f که دارای یک گوی باز به مرکز آن نقطه باشد یک همسایگی نقطه f گوییم.

1-8-تعریف:

فرض کنید V یک فضای برداری در میدان F باشد و فرض کنید به هرعنصر $f \in V$ یک عدد حقیقی و نا منفی $\|f\|$ نظیر شود به طوری که برای تمامی $f,g \in V$ و $\alpha \in F$ داشته باشیم:

$\|f\| = 0$ اگر و تنها اگر $f = 0$

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$$

$$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$$

در این صورت V یک فضای برداری نرم دار نامیده می شود که با قراردادن $d(f,g) = \|f - g\|$ ، V یک فضای متریک خواهد بود.

1-9-تعریف:

فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله در فضای برداری نرم دار V باشد.گوییم این دنباله همگرا است اگر و تنها اگر بردار $f \in V$ موجود باشد به طوری که:

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$$

در این صورت f حد دنباله $\{f_n\}$ نامیده می شود و می نویسیم:

$$f_n \to f$$

1-10- تعریف:

فرض کنید S یک زیر مجموعه از V است در این صورت اگر $f \in \overline{S}$ باشد زیر مجموعه $\overline{S}$ از V را بستار مجموعه‌ی S گوییم اگروتنها اگر یک دنباله همگرا به f از نقاط S موجود باشد. گوییم S بسته است اگر و تنها اگر $\overline{S} = S$ باشد.

1-11- تعریف:

گوییم زیر مجموعه S از V باز است اگر و تنها اگر یکی از دو شرط معادل زیر برقرار گردند:

(الف) متمم آن در V بسته باشد.

(ب) برای هر $f \in S$ یک گوی باز به مرکز f در V موجود باشد.

1-12- تعریف:

فرض کنید V یک فضای برداری نرم دار باشد، به دنباله $\{f_n\}$ در V کشی گفته می شود اگر و تنها اگر:

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\| = 0$$

1-13- تعریف:

به زیر مجموعه S از فضای نرم دار V تام گفته می شود اگر و تنها اگر هر دنباله کشی در S به یک نقطه از S همگرا گردد و اگر V یک فضای برداری نرم‌دار باشد به آن یک فضای باناخ گوییم اگر و تنها اگر تام باشد.

1-14- تعریف:

فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند. اگر A یک نگاشت باشد که بر زیر مجموعه $D(A)$ از V تعریف شده باشد در این صورت به A یک عملگر از V به W می گوییم و به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$A : D(A) \subseteq V \to W$$

1-15- تعریف:

فرض کنید V و W دو فضای برداری نرم‌دار باشند و A یک عملگر از V به W باشد. گوییم A در

$f_0 \in D(A)$ پیوسته است اگر و تنها اگر یکی از دو شرط معادل زیر برقرار باشند:

1- برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که اگر

$\|f - f_0\| < \delta, f \in D(A)$ آنگاه $\|Af - Af_0\| < \varepsilon$

2- برای هر دنباله $\{f_n\}$ در $D(A)$ که $f_n \to f_0$ داشته باشیم $Af_n \to Af_0$.

گوییم عملگر A پیوسته است اگر و تنها اگر در هر نقطه از $D(A)$ پیوسته باشد.

1-16- تعریف:

فرض کنید V و W دو فضای برداری در میدان F باشند و $D(L)$ یک زیر فضای خطی از فضای V

باشد. عملگر $L : D(L) \subseteq V \to W$ را یک عملگر خطی گوییم اگر و تنها اگر برای هر دو اسکالر $\alpha, \beta \in F$ و $f, g \in D(L)$ داشته

باشیم:

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$$

1-17- تعریف:

به عملگر $I : V \to V$ عملگر همانی گوییم اگروتنها اگر:

$$\forall f \in V \qquad If = f$$

1-18- تعریف:

فرض کنید V و W دو فضای برداری نرم‌دار بوده $L : D(L) \subseteq V \to W$ یک عملگر خطی باشد گوییم L بر $D(L)$ کران‌دار است اگروتنها

اگر عدد حقیقی و مثبت m وجود داشته باشد به طوری که:

$$\forall f \in D(L) \qquad \|Lf\| \le m\|f\|$$

بزرگ‌ترین کران پایین تمامی m ها ی معرفی شده در تعریف فوق را با $\|L\|$ نشان داده و به آن نرم عملگر گوییم. برای نرم عملگر تعاریف معادل زیر نیز موجود می باشند:

$$\|L\| = \sup\{\frac{\|Lf\|}{\|f\|} : f \in D(L), f \neq 0\} = \sup\{\|Lf\| : f \in D(L), \|f\| = 1\}$$

همین طور داریم:

$$\|Lf\| \leq \|L\| \|f\|$$

1-19- تعریف:

فرض کنید V و W دو فضای برداری نرم‌دار روی میدان F باشند. برای هر اسکالر α و دو عملگر خطی $L_1, L_2 : V \to W$ عمل جمع $L_1 + L_2$ و ضرب اسکالر αL_1 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(L_1 + L_2)f = L_1 f + L_2 f$$
$$(\alpha L_1)f = \alpha L_1 f$$

همچنین عملگر صفر را با 0 نمایش می دهیم.

که $L_1 + L_2$ و αL_1 عملگرهای خطی از V به W هستند. بنابراین مجموعه عملگرهای خطی کراندار با اعمال جمع و ضرب و نرم عملگر که در بالا تعریف شد تشکیل یک فضای برداری نرم‌دار می دهند که آن را با $L(V, W)$ نشان می دهیم.

1-20 – تعریف:

فرض کنید Ω یک زیر مجموعه از R^n باشد. مجموعه‌ی توابع پیوسته و کران‌دار مختلط بر روی Ω به همراه نرم $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$ تشکیل یک فضای برداری نرم‌دار می‌دهند که آن‌را با $C(\Omega)$ نشان می دهیم.

1-21- قضیه:

فرض کنید Ω یک زیر مجموعه از R^n باشد. در این صورت فضای $C(\Omega)$ یک فضای باناخ خواهد بود.

اثبات در مرجع [4] آمده است.

1-22- قضیه نقطه‌ی ثابت باناخ:

فرض کنید که

1 - عملگر T به این شکل داده شده باشد:

$$T : M \subseteq X \to M$$

M یک مجموعه‌ی ناتهی و بسته است، که در فضای متریک تام(X , d) قرار دارد.

2 - عملگر T یک عملگر K – انقباضی باشد یعنی:

$$d(Tx , Ty) \leq kd(x , y) \quad \forall x , y \in M \quad 0 \leq k < 1$$

آن‌گاه خواهیم داشت:

الف)وجود یکتایی معادله‌ی $x = Tx , x \in M$ دقیقا یک جواب خواهد داشت بدین معنی کهT دقیقا یک نقطه‌ی ثابت خواهد داشت.

ب) همگرایی. دنباله‌ی $\{x_n\}$ بدست آمده از $x_{n+1} = Tx_n , x_0 \in M$ برای هر نقطه شروع دلخواه $x_0 \in M$ به جواب یکتای x x همگرا خواهد شد.

ج)تخمین خطا.

$$d(x_n , x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_0 , x_1)$$
$$d(x_{n+1} , x) \leq k \ (1-k)^{-1} d(x_n , x_{n+1})$$

د)سرعت همگرایی

$$d(x_{n+1} , x) \leq kd(x_n , x)$$

اثبات در مرجع [13] آمده است.

1-24- قضیه تابع ضمنی:

فرض کنید G یک تابع تعریف شده از دو متغیر حقیقی باشد که در یک همسایگی (x_0, y_0) به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. اگر $G(x_0, y_0) = 0$ و در نقطه (x_0, y_0) داشته باشیم $\partial G/\partial y \neq 0$ ، آن گاه یک δ مثبت و یک تابع مانند f که به طور پیوسته مشتق‌پذیر می باشد و در $|x - x_0| < \delta$ تعریف‌شده است، وجود دارند به قسمی که $f(x_0) = y_0$ و به ازای $|x - x_0| < \delta$ ، $G(x, f(x)) = 0$.

منبع این فصل مراجع[4] و[13] می باشند.

فصل2

بررسی مختصر سایر روش ها برای حل عددی مسائل غیر خطی

2-1- روش اختلال1

بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی می‌توانند به‌صورت معادلات‌دیفرانسیل مدلبندی شوند کهبدست آوردن فرمبسته جواب برای آن ها بخصوص، برای مدل های غیرخطی دشوار می باشد و در بسیاری موارد تنها تقریبی از جواب واقعی را می‌توان بدست آورد. روش اختلال یک روش شناخته شده برای حل مسائل غیرخطی آنالیزی می باشد که بر مبنای وجود پارامترهای کوچک(بزرگ) بنا شده است که به کمیت های اختلال معروفند. بسیاری از مسائل غیرخطی دارای این کمیتهای اختلال نمی باشند و در واقع، روش اختلال تنها برای مسائل ضعیف غیر خطی کارآمد می باشد.

با مثال زیر به توضیح روش اختلال می پردازیم.

معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &(1+\varepsilon u)u' + u = 0 \\ &u(0) = 1 \end{aligned} \tag{1-2}$$

به دست آوردن جوابدقیق $u'(0) = -\dfrac{1}{1+\varepsilon}$ آسان می باشد، هر چندفرم بسته $u(t)$مجهول است. در اینجا $\varepsilon > 0$ یک کمیت اختلال است و می توانیم $u(t)$ را درون یک سری اختلال جای دهیم:

$$u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \varepsilon^3 u_3(t) + ... \tag{2-2}$$

ضرایب توان های یکسان از ε را برابر قرار داده و معادلات دیفرانسیل خطی زیر را بدست می

1-perturbation method

آوریم:

$$
\begin{aligned}
&u_0' + u_0 = 0, u_0(0) = 1 \\
&u_1' + u_1 = -u_0' u_0, u_1(0) = 0 \\
&u_2' + u_2 = -(u_1' u_0 + u_0' u_1), u_2(0) = 0 \\
&u_3' + u_3 = -(u_2' u_0 + u_1' u_1 + u_0' u_2), u_3(0) = 0 \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned} \tag{3-2}
$$

با حل معادلات بالا به دست می آوریم:

$$
\begin{aligned}
&u_0(t) = e^{-t} \\
&u_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \\
&u_2(t) = \tfrac{1}{2} e^{-t} - 2e^{-2t} + \tfrac{3}{2} e^{-3t} \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned} \tag{4-2}
$$

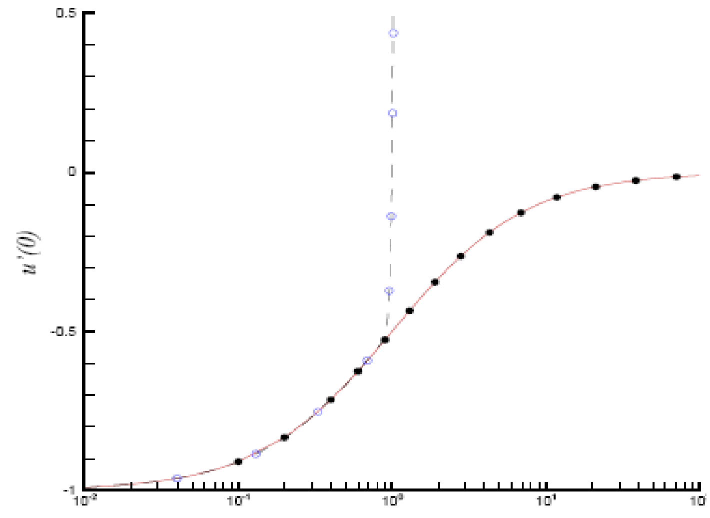
سپس تقریب اختلال زیر را داریم:

$$
u(t) = e^{-t} + \varepsilon(e^{-t} - e^{-2t}) + \varepsilon^2 (\tfrac{1}{2} e^{-t} - 2e^{-2t} + \tfrac{3}{2} e^{-3t}) + ... \tag{5-2}
$$

مشتق گیری از (5-2) در $t = 0$ می دهد:

$$
u'(0) = -1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 - \varepsilon^4 + \varepsilon^6 - \varepsilon^7 + ... \tag{6-2}
$$

سری بالا برای $\varepsilon \geq 1$ واگرا می باشد، همانند آن چه که در شکل 2-1 نشان داده شده است.



شکل2-1- مقایسه بین جواب تقریبی و جواب دقیق از (1). خط مستقیم:جواب دقیق $u'(0)=-\frac{1}{1+\varepsilon}$. خط- نقطه: تقریب اختلال مرتبه سی و یکم. نقاط تو خالی: تقریب داده شده به وسیله HPM در مرتبه پانزدهم. نقاط تو پر: تقریب داده شده به وسیله HAM زمانی که $H=-\frac{1}{1+2\varepsilon}$ باشد در مرتبه پانزدهم

2-2- روش تجزیه آدومیان[1] [12]

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$Lu+Ru+Nu=g(x) \tag{7-2}$$

که L مشتق مرتبه بالا است و فرض می‌کنیم که به‌آسانی معکوس‌شدنی باشد. R یک عملگردیفرانسیل خطی از مرتبه کمتر از L است، Nu بخش غیرخطی معادله بالا می‌باشد و $g(x)$ یک تابع معلوم است. با جایگذاری عملگر معکوس L^{-1} در هر دو طرف معادله (7-2) و با استفاده از شرایط داده شده داریم: