بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

قضیه‌ی اشتین‌اشپرینگ برای نگاشت‌ها روی C^*-مدول‌های هیلبرت

توسط:
نسیم قره‌گوزلو رودباری

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان

استاد مشاور:
دکتر محمد رمضانپور

شهریور ۱۳۹۳

به نام خدا

قضیه‌ی اشتین‌اشپرینگ برای نگاشت‌ها روی C^*-مدول‌های هیلبرت

توسط:
نسیم قره‌گوزلو رودباری

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر محمد رمضانپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر علی غفاری استاد ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده‌ی ریاضی دانشگاه سمنان (داور اول)

دکتر مرتضی ابطحی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر مسیب احمدی استادیار آمار کاربردی دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی، همواره یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند

و تقدیم به همسر و خواهر مهربانم نسترن

سپاسگزاری

ستایش مخصوص خداوندی است که هیچ گوینده و سخنوری توانایی ستودن او را بدان گونه که شایسته ی ذات مقدس اوست ندارد. خداوندی که صاحبان همت های بلند و متفکران دوراندیش، قدرت درک او را ندارند و زیرکی های بشری، هر اندازه در دریای معقولات برای کشف حقیقت ذات او غوطه ور شوند، بدان نمی رسند.

زبان قاصر است از بیان لطافت جاری در روح کسانی که عشق و حکمت و علم و وظیفه و اخلاص را به هم آمیخته اند تا عسل واره ای چنان روح افزا گردد که هوش از سر کودک عقل می پراند و بهار بارقه ای است از نفس گرمشان. خدای را شاکرم، نازنینانی در مسیر زندگیم قرار داد که همچو نفس، مدد حیاتند و مفرح ذات. کسانی که بارها بر خواسته های خود چشم پوشیدند تا خواسته هایم محقق شود، از داشته هایشان گذشتند تا داشته باشم و چنان بی چشم داشت دوستم داشتند که حتی چشم هایم این چنین نبوده اند.

بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا ستایش می کنم وجود مقدسشان را و هر آنچه امروز دارم، مدیون زحمات دیروز آن ها می دانم. از خانواده ی عزیزم به ویژه خواهر مهربانم نسترن، به پاس محبت فراوانشان تشکر می کنم.

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بر خود واجب می دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد فرهیخته و گرانقدرم جناب آقای دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان که در طول دوران تحصیل و ارائه ی پایان نامه از چشمه ی جوشان دانش و اخلاق والاایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشته ام ابراز نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

از استاد فرزانه، شایسته و دلسوز، جناب آقای دکتر محمد رمضانپور که در کمال سعه ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت مشاوره ی این پایان نامه را بر عهده داشتند، صمیمانه سپاسگزارم.

از اساتید بزرگوار، جناب آقای دکتر علی غفاری و جناب آقای دکتر مرتضی ابطحی که در مقام داور، زحمت مطالعه ی پایان نامه را بر عهده داشتند و از نماینده ی تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر مسیب احمدی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

نسیم قره گوزلو رودباری

شهریور ۹۳

چکیده

قضیه‌ی اشتین‌اشپرینگ برای نگاشت‌ها روی C^*-مدول‌های هیلبرت

به وسیله‌ی:
نسیم قره‌گوزلو رودباری

در این پایان‌نامه، ابتدا تعاریف و خواصی از فضاهای هیلبرت، C^*-جبرها، حاصل‌ضرب تنسوری جبری و C^*-مدول‌های هیلبرت را بیان می‌کنیم. سپس به بررسی تابعک‌های خطی مثبت، نگاشت‌های مثبت و نگاشت‌های کاملاً مثبت روی C^*-جبرها پرداخته و دو قضیه‌ی اساسی در زمینه‌ی نگاشت‌های کاملاً مثبت بیان خواهیم کرد؛ قضیه‌ی اشتین‌اشپرینگ که یک نمایش مشخص از نگاشت‌های کاملاً مثبت روی C^*-جبرها به جبر عملگرهای کراندار روی فضاهای هیلبرت، ارائه می‌دهد و قضیه‌ی گسترش آرویسون که ثابت می‌کند نگاشت‌های کاملاً مثبت روی C^*-جبرها به جبر عملگرهای کراندار روی فضاهای هیلبرت، قابل گسترش هستند. همچنین نشان می‌دهیم که قضیه‌ی اشتین‌اشپرینگ در واقع تعمیمی از قضیه‌ی گلفند-نیمارک-سگال برای حالت‌ها روی C^*-جبرها است. در ادامه به بررسی قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی اشتین‌اشپرینگ برای نگاشت‌ها روی C^*-مدول‌های هیلبرت خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: C^*-جبر، تابعک خطی مثبت، C^*-مدول هیلبرت، نگاشت کاملاً مثبت.

فهرست مطالب

پیشگفتار

نگاشت‌های کاملاً مثبت دسته‌ی مهمی از نگاشت‌های بین C^*-جبرها هستند. این مفهوم در سال ۱۹۵۵ توسط اشتین‌اشپرینگ[۱] [۲۰] معرفی و در سال‌های بعد توسط آرویسون[۲] [۲] توسعه داده شد. اشتین‌اشپرینگ یک نمایش مشخص از نگاشت‌های کاملاً مثبت روی C^*-جبرها به جبر عملگرهای کراندار روی فضاهای هیلبرت[۳] ارائه داد. آرویسون در سال‌های ۱۹۷۲ − ۱۹۶۹ از نگاشت‌های کاملاً مثبت به‌عنوان اساس کار خود، روی قضیه‌ی انبساط ناجابجایی و عملگرهای جبری غیر خودالحاق استفاده کرد. آرویسون همچنین ثابت کرد که نگاشت‌های کاملاً مثبت روی C^*-جبرها به جبر عملگرهای کراندار روی فضاهای هیلبرت، قابل گسترش هستند.

اسدی[۴] [۳] در سال ۲۰۰۸ قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی اشتین‌اشپرینگ برای نگاشت‌ها روی C^*-مدول‌های هیلبرت ثابت کرد. مفهوم C^*-مدول‌های هیلبرت در واقع تعمیمی از یک فضای هیلبرت است که اولین بار استفاده از این فضاها توسط کاپلانسکی[۵] [۱۱] صورت گرفت ودر دهه‌ی هفتاد، تحقیقات بر روی C^*-مدول‌های هیلبرت در زمینه‌ی نمایش‌های القا شده‌ی C^*-جبرها توسط ریفل[۶] [۱۷] ادامه یافت. باهات، رامش و سامش[۷] [۴] در سال ۲۰۱۰ قضیه‌ی اسدی را قوت بخشیده و بدون در نظر گرفتن یک شرط اضافی موجود در این قضیه، آن‌را به طریقی دیگر ثابت کردند.

[۱] Stinespring

[۲] Arveson

[۳] Hilbert

[۴] Asadi

[۵] Kaplansky

[۶] Rieffel

[۷] Bhat, Ramesh and Sumesh

فصل اول شرح اصطلاحات و نمادگذاری‌های به‌کار رفته در خلال پایان‌نامه است. در این فصل به یادآوری مطالبی در خصوص فضاهای هیلبرت و C^*-جبرها پرداخته سپس با حاصل‌ضرب تنسوری جبری و C^*-مدول‌های هیلبرت آشنا می‌شویم.

در فصل دوم به بررسی تابعک‌های خطی مثبت، نگاشت‌های مثبت و نگاشت‌های کاملاً مثبت می‌پردازیم. بخش اول از این فصل اختصاص به تابعک‌های خطی مثبت و ویژگی‌های عمومی آن‌ها دارد. در این بخش همچنین به بیان قضیه‌ی گلفند-نیمارک-سگال[۸] پرداخته و ثابت می‌کنیم هر C^*-جبر یک نمایش دارد. در بخش دوم ابتدا نگاشت‌های مثبت بین C^*-جبرها را بررسی کرده و نشان می‌دهیم برخی از ویژگی‌های تابعک‌های خطی مثبت را دارا نمی‌باشند. در بخش سوم به معرفی یک رده‌ی مهم از نگاشت‌های مثبت، یعنی نگاشت‌های کاملاً مثبت می‌پردازیم که رفتاری شبیه به تابعک‌های خطی مثبت دارند.

در فصل سوم دو قضیه‌ی مهم در رابطه با نگاشت‌های کاملاً مثبت، یعنی قضیه‌ی اشتین‌اشپرینگ و قضیه‌ی گسترش آرویسون را بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین در این فصل خواهیم دید که قضیه‌ی اشتین‌اشپرینگ در واقع تعمیمی از قضیه‌ی گلفند-نیمارک-سگال برای حالت‌ها روی C^*-جبرها است.

در فصل چهارم به بررسی قضیه‌ی اسدی و سپس قضیه‌ی باهات، رامش و سامش خواهیم پرداخت. همچنین نشان می‌دهیم که هر دو نمایش مینیمال اشتین‌اشپرینگ، به‌طور یکانی معادل هستند.

[۸] Gelfand-Naimark-Segal

فصل ۱

پیش‌نیازها

در فصل پیش رو ابتدا به یادآوری مطالبی در خصوص فضاهای هیلبرت و C^*-جبرها می‌پردازیم. سپس حاصل‌ضرب تنسوری جبری را تعریف کرده و برخی از ویژگی‌های آن‌را بیان می‌کنیم. پس از آن C^*-مدول‌های هیلبرت را که در واقع تعمیمی از فضاهای هیلبرت هستند، بررسی می‌کنیم.

۱-۱ فضاهای برداری نرم‌دار

یک **فضای برداری** روی میدان $\mathbb{F}$، مجموعه‌ای است مانند $\mathcal{X}$ که در آن دو عمل **جمع** و **ضرب اسکالر**، به‌صورت زیر تعریف شده‌اند،

$$\begin{cases} \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \mathbb{F} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \end{cases}$$

به‌طوری‌که به ازای هر $x, y, z \in \mathcal{X}$ و هر $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$، شرایط زیر برقرار باشند،

(۱) $x + y = y + x$؛

(۲) $(x + y) + z = x + (y + z)$؛

(۳) $\lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1\lambda_2)x$؛

(۴) $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$؛

(۵) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$؛

(۶) $1x = x$؛

(۷) بردار منحصربفرد $0 \in \mathcal{X}$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in \mathcal{X}$، $x + 0 = x$.

عناصر $\mathcal{X}$، **بردار** نامیده می‌شوند و اگر $\mathbb{F} = \mathbb{R}$، آن‌گاه $\mathcal{X}$ را **فضای برداری حقیقی** و درصورتی‌که $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، **فضای برداری مختلط** می‌نامیم.
دسته‌ی مهمی از فضاهای برداری، فضاهای نرم‌دار می‌باشند. فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. یک **نرم** روی $\mathcal{X}$ تابعی است مانند $\| \cdot \| : \mathcal{X} \longrightarrow [0, +\infty)$ با این خاصیت که

(۱) $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

(۲) به ازای هر $x, y \in \mathcal{X}$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

(۳) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{F}$ و $x \in \mathcal{X}$، $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

دراین‌صورت به $(\mathcal{X}, \| \cdot \|)$ یک **فضای نرم‌دار** گوییم. فضای نرم‌دار $\mathcal{X}$ را یک **فضای باناخ** می‌نامیم، هرگاه $(\mathcal{X}, \| \cdot \|)$ یک فضای کامل (فضایی که هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا است) باشد.
فرض کنیم $\mathcal{X}$و$\mathcal{Y}$دو فضای برداری نرم‌دار باشند. در این‌صورت فضای همه نگاشت‌های خطی از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{Y}$ را با $L\left(\mathcal{X}, \mathcal{Y}\right)$ و فضای همه‌ی نگاشت‌های خطی و کراندار از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{Y}$ را با $B\left(\mathcal{X}, \mathcal{Y}\right)$نشان می‌دهیم. همچنین به ازای هر $T \in B\left(\mathcal{X}, \mathcal{Y}\right)$ تعریف می‌کنیم

$$\| T \| = \sup\{\| Tx \|; \ \ \| x \| = 1\}.$$

به آسانی مشاهده می‌شود که $(B\left(\mathcal{X}, \mathcal{Y}\right), \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار است.
نگاشت خطی $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{F}$ را یک **تابعک خطی** روی $\mathcal{X}$ گوییم. مجموعه‌ی $B(\mathcal{X}, \mathbb{F})$، یعنی مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی و کراندار روی $\mathcal{X}$ را **دوگان اول** $\mathcal{X}$ گوییم و با $\mathcal{X}^*$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱. **(*قضیه‌ی هان-باناخ*[1])** *اگر $\mathcal{X}$ یک فضای نرم‌دار، $\mathcal{M}$ یک زیرفضای $\mathcal{X}$ و $\varphi \in \mathcal{M}^*$، آن‌گاه یک $\tilde{\varphi} \in \mathcal{X}^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $\tilde{\varphi}|_{\mathcal{M}} = \varphi$ و $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

اثبات. به [۱۶، قضیه‌ی ۳.۲] رجوع شود. □

[1] Hahn-Banach

فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک فضای برداری و $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$. در این‌صورت **غلاف محدب** مجموعه‌ی $\mathcal{M}$، مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب از اعضای $\mathcal{M}$ است که آن را با $\mathrm{conv}(\mathcal{M})$ نشان می‌دهیم. یعنی

$$\mathrm{conv}(\mathcal{M}) = \left\{ t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n \;;\; x_i \in \mathcal{M},\ t_i \geq 0,\ n \in \mathbb{N},\ \sum t_i = 1 \right\}.$$

فضاهای برداری $\mathcal{X}$،$\mathcal{Y}$، $\mathcal{Z}$ و نگاشت $B : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ را در نظر می‌گیریم. به ازای هر $x \in \mathcal{X}$ و $y \in \mathcal{Y}$، نگاشت‌های

$$B_x : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z} \ ,\ \ B^y : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Z},$$

را به‌صورت

$$B_x(y) = B(x,y) = B^y(x),$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت نگاشت B را **دوخطی** گوییم، هرگاه B_x و B^y خطی باشند.

۱-۲ توپولوژی ضعیف و ضعیف*

فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک مجموعه و $\mathcal{F}$ یک خانواده‌ی ناتهی از نگاشت‌های $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}_f$ باشد که $\mathcal{Y}_f$ها فضاهای توپولوژیک هستند. اگر τ گردایه‌ی تمام اجتماع‌های اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های $f^{-1}(V)$ باشد که $f \in \mathcal{F}$ و V در $\mathcal{Y}_f$ باز است، آن‌گاه τ یک توپولوژی روی $\mathcal{X}$ القا می‌کند که به آن **توپولوژی ضعیف القا شده به وسیله‌ی** $\mathcal{F}$ روی $\mathcal{X}$ یا $\mathcal{F}$**-توپولوژی** روی $\mathcal{X}$ گوییم. این توپولوژی ضعیف‌ترین توپولوژی است که به‌واسطه‌ی آن تمام $f \in F$ پیوسته هستند.
حال فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک فضای برداری باشد. در این‌صورت $\mathcal{X}^*$-توپولوژی روی $\mathcal{X}$ را **توپولوژی ضعیف** روی $\mathcal{X}$ گوییم. همچنین توپولوژی القا شده توسط خانواده‌ی

$$\{\widehat{x} : \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ \ \widehat{x}(f) = f(x) \quad f \in X^*,\ x \in \mathcal{X}\},$$

را توپولوژی ضعیف * یا **توپولوژی** w^* روی $\mathcal{X}^*$ گوییم. توجه داریم که همگرایی در توپولوژی w^*، همگرایی نقطه‌ای است.

قضیه ۱.۲.۱. **(*قضیه‌ی باناخ-آلاغلو*[۲])** *اگر $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه گوی واحد بسته‌ی $\mathcal{X}^*$، w^*-فشرده است.*

اثبات. به [۱۶، قضیه‌ی ۳.۱۵] رجوع شود. □

[۲] Banach-Alaoglu

۱-۳ فضاهای هیلبرت

مهم‌ترین فضاهای باناخ و از جمله آن‌هایی که می‌توان آنالیز بسیار دقیق را روی آن انجام داد فضاهای هیلبرت هستند. در این بخش به معرفی فضاهای هیلبرت و عملگرهای روی آن‌ها می‌پردازیم.
فرض کنیم $(\mathcal{H},+,.)$ یک فضای برداری باشد. یک **ضرب داخلی** روی $\mathcal{H}$، نگاشتی مانند $\langle .,. \rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ است به‌طوری‌که به ازای هر $x,y,z \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{C}$، در خواص زیر صدق کند.

۱. $\langle x,x\rangle \geq 0;$

۲. $\langle x+z,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle;$

۳. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle;$

۴. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle};$

۵. $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0.$

فضای $\mathcal{H}$ همراه با ضرب داخلی فوق را یک فضای **پیش‌هیلبرت** می‌نامیم. اگر نگاشت $\langle .,. \rangle$ در تمام شرایط فوق غیر از شرط ۵ صدق کند، آن‌گاه $\langle .,. \rangle$ را یک **نیم‌ضرب داخلی** گوییم. فرض کنیم $(\mathcal{H},\langle .,. \rangle)$ یک فضای پیش‌هیلبرت باشد. اگر برای هر $x \in \mathcal{H}$ قرار دهیم

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle},$$

آن‌گاه می‌توان نشان داد که برای هر $x,y \in \mathcal{H}$؛

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

این نامساوی موسوم به **نامساوی کشی-شوارتز**[۳] می‌باشد و به کمک آن می‌توان نشان داد که $(\mathcal{H},\|.\|)$ یک فضای نرم‌دار است. فضای پیش‌هیلبرت $(\mathcal{H},\langle .,. \rangle)$ را یک فضای **هیلبرت** گوییم، هرگاه $(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد.
$(\mathbb{C}^k,\langle \cdot,\cdot \rangle)$ همراه با ضرب داخلی که به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم، یک فضای هیلبرت است.

$$\langle (z_1,z_2,...,z_k),(w_1,w_2,...,w_k)\rangle = z_1\overline{w_1}+...+z_k\overline{w_k} = \sum_{i=1}^{k} z_i\overline{w_i}.$$

$C[0,1]$ (فضای تمام توابع پیوسته روی $[0,1]$)، تحت ضرب داخلی زیر یک فضای پیش‌هیلبرت می‌باشد که فضای هیلبرت نیست.

$$\langle f,g\rangle = \int_{[0,1]} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

[۳] Cauchy-Schwarz

زیرا دنباله‌ی $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله‌ی کوشی در $C[0,1]$ است که یک دنباله‌ی همگرا نیست.

گزاره ۱.۳.۱. *فرض کنیم ... $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3,$ فضاهای هیلبرت باشند. قرار می‌دهیم*

$$\mathcal{H} = \left\{ (h_n)_{n=1}^{\infty};\ \ h_n \in \mathcal{H}_n,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty \right\},$$

و برای $h = (h_n)_{n=1}, g = (g_n)_{n=1} \in \mathcal{H}$، تعریف می‌کنیم

$$\langle h, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h_n, g_n\rangle.$$

در این‌صورت $\langle .,.\rangle$، یک ضرب داخلی روی $\mathcal{H}$ تعریف می‌کند و نرم وابسته به این ضرب داخلی به‌صورت

$$\|h\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

است. $\mathcal{H}$ به همراه این ضرب داخلی یک فضای هیلبرت است.

اثبات. به [۶، گزاره‌ی ۶.۲] رجوع شود. □

برای فضاهای هیلبرت ... $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3,$، فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ از گزاره‌ی ۱.۳.۱، را مجموع مستقیم فضاهای هیلبرت ... $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3,$ گوییم و با $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای ضرب داخلی باشد. اگر $x, y \in \mathcal{H}$ و $\langle x, y\rangle = 0$، آن‌گاه گوییم x بر y عمود است و با نماد $x \perp y$ نشان می‌دهیم. همچنین اگر $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$، در این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{x \in \mathcal{H}\ ;\ x \perp \mathcal{M}\}.$$

قضیه ۲.۳.۱. *اگر $\mathcal{M}$ زیرفضای بسته‌ای از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه*

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}.$$

اثبات. به [۱۶، قضیه‌ی ۱۲.۴] رجوع شود. □

مجموعه‌ی ناتهی $\{e_i\}_{i\in I}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را یک مجموعه‌ی **متعامد یکه** گوییم، هرگاه داشته باشیم

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی $\{e_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را **ماکسیمال** گوییم، هرگاه به طور سره مشمول هیچ مجموعه‌ی متعامد دیگری نباشد. منظور از یک **پایه** برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی ماکسیمال است.

فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. نگاشت $\sigma : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک **فرم یک‌ونیم خطی** گوییم، هرگاه σ نسبت به مؤلفه‌ی اول خطی و نسبت به مؤلفه‌ی دوم مزدوج خطی باشد. در این‌صورت به ازای هر $x,y\in\mathcal{H}$،

$$\sigma(x,y)=\frac{۱}{۴}\sum_{k=۰}^{۳} i^k\sigma(x+i^ky,x+i^ky).$$

تساوی فوق را **اتحاد قطبی** می‌نامیم.

σ را خودالحاق گوییم، هرگاه به ازای هر $x,y\in\mathcal{H}$،

$$\sigma(y,x)=\overline{\sigma(x,y)}.$$

σ خودالحاق است اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in\mathcal{H}$، $\sigma(x,x)\in\mathbb{R}$.

فرم یک‌ونیم‌خطی σ را مثبت گوییم، هرگاه به ازای هر $x\in\mathcal{H}$، $\sigma(x,x)\geq ۰$. بدیهی است که هر فرم مثبتی خودالحاق است. اگر σ یک فرم یک‌ونیم خطی مثبت باشد، آن‌گاه در نامساوی کشی-شوارتز صدق می‌کند، یعنی به ازای هر $x,y\in\mathcal{H}$،

$$|\sigma(x,y)|\leq \sigma(x,x)^{\frac{۱}{۲}}\sigma(y,y)^{\frac{۱}{۲}}.$$

گزاره ۳.۳.۱. *اگر $(\mathcal{H},\langle .,.\rangle_{\mathcal{H}})$ یک فضای ضرب داخلی و $\mathcal{H}'$ کامل‌شده‌ی $\mathcal{H}$ نسبت به متریک القا شده توسط نرم روی $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه ضرب داخلی $\langle .,.\rangle_{\mathcal{H}'}$ روی $\mathcal{H}'$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x,y\in\mathcal{H}$، $\langle .,.\rangle_{\mathcal{H}}=\langle .,.\rangle_{\mathcal{H}'}$ و متریک روی $\mathcal{H}'$ توسط این ضرب داخلی القا می‌شود. یعنی کامل شده‌ی $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت است.*

اثبات. به [۶، قضیه‌ی ۱.۹] رجوع شود. □

فضای هیلبرت $(\mathcal{H}',\langle .,.\rangle_{\mathcal{H}})$ از گزاره‌ی ۳.۳.۱ را کامل شده‌ی فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ گوییم.

۱-۴ عملگرها روی فضاهای هیلبرت

مجموعه‌ی همه عملگرهای خطی و کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با $B(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم $\mathcal{H}_۱$ و $\mathcal{H}_۲$ فضاهای هیلبرت باشند. عملگر $T:\mathcal{H}_۱\longrightarrow\mathcal{H}_۲$ را متناهی‌البعد گوییم،

هرگاه

$$\mathrm{rank}(T) := \mathrm{dim}T(\mathcal{H}_۱) < +\infty.$$

مجموعه‌ی تمام عملگرهای متناهی‌البعد از $\mathcal{H}_۱$ به $\mathcal{H}_۲$ را با $F(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۱. *فرض کنیم $\mathcal{H}_۱$ و $\mathcal{H}_۲$ فضاهای هیلبرت باشند. اگر $T \in B(\mathcal{H}_۱, \mathcal{H}_۲)$، آن‌گاه عملگر یکتای $T^* \in B(\mathcal{H}_۲, \mathcal{H}_۱)$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x_۱ \in \mathcal{H}_۱$ و $x_۲ \in \mathcal{H}_۲$،*

$$\langle T(x_۱), x_۲\rangle = \langle x_۱, T^*(x_۲)\rangle.$$

همچنین نگاشت $T^* \longrightarrow T$ مزدوج خطی است و $T^{**} = T$ و

$$\|T\| = \|T^*\| = \|T^*T\|^{\frac{۱}{۲}}.$$

اثبات. به [۱۴، قضیه‌ی ۲.۳.۱] رجوع شود. □

فرض کنیم x و y عناصری از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند، در این‌صورت $x \otimes y \in B(\mathcal{H})$ با ضابطه‌ی زیر یک عملگر خطی است.

$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y\rangle x \quad (z \in \mathcal{H}).$$

اگر $x, y, x', y' \in \mathcal{H}$ و $U \in B(\mathcal{H})$، آن‌گاه تساوی‌های زیر برقرار هستند.

۱. $(x \otimes x')(y \otimes y') = \langle y, x'\rangle(x \otimes y')$;
۲. $(x \otimes y)^* = y \otimes x$;
۳. $U(x \otimes y) = U(x) \otimes y \ , \ (x \otimes y)U = x \otimes U^*(y)$.

مجموعه‌ی مرتب جزیی $(I, \leq)$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی I را یک **مجموعه‌ی جهت‌دار** گوییم، هرگاه

$$\forall\, i_۱, i_۲ \in I \quad \exists\, i_۳ \in I\ ;\ \ i_۳ \geq i_۱\ ,\ i_۳ \geq i_۲.$$

یک **تور** در مجموعه‌ی $\mathcal{X}$، تابعی از یک مجموعه‌ی جهت‌دار $(I, \leq)$ به $\mathcal{X}$ است.

فرض کنیم $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از عناصر فضای باناخ $\mathcal{X}$ و Λ' مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی و ناتهی از Λ باشد. به ازای هر $F \in \Lambda'$ تعریف می‌کنیم

$$x_F = \sum_{\lambda\in F} x_\lambda.$$

در این‌صورت $(x_F)_{F\in\Lambda'}$ یک تور است. گوییم $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ جمع‌پذیر به عنصر $x\in\mathcal{X}$ است، هرگاه تور $(x_F)_{F\in\Lambda'}$ به x همگرا باشد، در این‌صورت می‌نویسیم

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x.$$

اگر همه‌ی x_λها در $\mathbb{R}^+$ باشند، آن‌گاه خانواده‌ی $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ جمع‌پذیر است اگر و تنها اگر $\sup_F \sum_{\lambda\in F} x_\lambda < +\infty$ و داریم

$$\sup_F \sum_{\lambda\in F} x_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda.$$

فرض کنیم U یک عملگر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و E یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد. در این‌صورت **نرم هیلبرت اشمیت**[۴] عملگر U را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|U\|_۲ = (\sum_{x\in E} \|U(x)\|^۲)^{\frac{۱}{۲}}.$$

این تعریف مستقل از انتخاب پایه‌ی متعامد یکه‌ی E است. عملگر U را **عملگر هیلبرت اشمیت** گوییم، هرگاه $\|U\|_۲ < +\infty$. مجموعه‌ی تمام عملگرهای هیلبرت اشمیت روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با $L^۲(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۲.۴.۱. اگر x و y عناصری دلخواه از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند، آن‌گاه

$$\|x\otimes y\| = \|x\|\|y\| = \|x\otimes y\|_۲.$$

بنابراین $F(\mathcal{H}) \subseteq L^۲(\mathcal{H})$.

فرض کنیم U یک عملگر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و E یک پایه‌ی متعامد یکه در $\mathcal{H}$ باشد، در این‌صورت **نرم رده‌ی اثر** عملگر U را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|U\|_۱ = \sum_{x\in E} \langle |U|(x), x\rangle,$$

(با توجه به تعریف ارائه شده در صفحه‌ی ۱۷ و این‌که $B(\mathcal{H})$ یک C^*-جبر است، $|U| = (U^*U)^{\frac{۱}{۲}}$).

عملگر U را یک عملگر از رده‌ی اثر گوییم، هرگاه $\|U\|_۱ < +\infty$. مجموعه‌ی تمام عملگرهای از رده‌ی اثر روی $\mathcal{H}$ را با $L^۱(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم. به ازای هر $U \in L^۱(\mathcal{H})$، تعریف می‌کنیم

$$tr(U) = \sum_{x\in E} \langle U(x), x\rangle.$$

[۴] Hilbert-Schmidt

قضیه ۳.۴.۱. *اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، آن‌گاه تابع*

$$tr : L^{1}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad U \longmapsto tr(U),$$

خطی است و

$$|tr(VU)| \leq \|V\|\|U\|_{1} \qquad (V \in B(\mathcal{H}), U \in L^{1}(\mathcal{H})).$$

اثبات. به [۱۴، قضیه‌ی ۲.۴.۱۶] رجوع شود. □

tr یک تابعک خطی پیوسته است.
اگر x و y عناصری دلخواه از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند، آن‌گاه

$$\|x \otimes y\|_{1} = \|x\|\|y\|.$$

بنابراین شمول $F(\mathcal{H}) \subseteq L^{1}(\mathcal{H}) \subseteq L^{2}(\mathcal{H})$ برقرار است. همچنین $tr(x \otimes y) = \langle x, y \rangle$ و می‌توان نشان داد که

$$\overline{F(\mathcal{H})}^{\|\cdot\|_{1}} = L^{1}(\mathcal{H}).$$

قضیه ۴.۴.۱. *اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، آن‌گاه نگاشت*

$$\theta : B(\mathcal{H}) \longrightarrow L^{1}(\mathcal{H})^{*}\,, \quad V \longmapsto \theta_{V},$$

یک یکریختی خطی طولپا است، که $\theta_{V}(U) = tr(UV)$.

اثبات. به [۱۴، قضیه‌ی ۴.۲.۳] رجوع شود. □

۱-۵ جبرهای باناخ

فضای برداری $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{C}$ همراه با نگاشت ضربی $(a, b) \longrightarrow ab$ از $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ به توی $\mathcal{A}$ که به ازای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند، یک **جبر** نام دارد.

۱. $a(bc) = (ab)c;$

۲. $(a + b)c = ac + bc\,, \quad a(b + c) = ab + ac;$

۳. $(\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b).$

اگر ضرب تعریف شده‌ی فوق، جابجایی باشد، یعنی به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$، $ab = ba$، آن‌گاه $\mathcal{A}$ را یک **جبر جابجایی** گوییم. عنصر $۱_{\mathcal{A}}$ در جبر $\mathcal{A}$ را عنصر **همانی** گوییم، هرگاه $۱_{\mathcal{A}} \neq ۰$ و به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$۱_{\mathcal{A}} a = a ۱_{\mathcal{A}} = a.$$

عنصر همانی در صورت وجود یکتا است. جبر $\mathcal{A}$ را **یکدار** گوییم، هرگاه دارای عنصر همانی باشد.
فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر و $(\mathcal{A}, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. نرم $\|.\|$ روی $\mathcal{A}$ یک **نرم جبری** نام دارد، هرگاه

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad (a, b \in \mathcal{A}).$$

در این‌صورت $(\mathcal{A}, \|.\|)$ یک **جبر نرم‌دار** نامیده می شود.
جبر نرم‌دار $(\mathcal{A}, \|.\|)$ را یک **جبر باناخ** گوییم، هرگاه تحت نرم $\|.\|$ یک فضای باناخ باشد. جبر نرم‌دار $(\mathcal{A}, \|.\|)$ را یکدار نامیم، هرگاه $\mathcal{A}$ یکدار بوده و $\|۱_{\mathcal{A}}\| = ۱$.

مثال ۱.۵.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ غیر یکدار باشد. مجموعه‌ی $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ همراه با اعمال

۱. $(x, \lambda_۱)(y, \lambda_۲) = (xy + \lambda_۱ y + x\lambda_۲, \lambda_۱\lambda_۲);$
۲. $(x, \lambda_۱) + (y, \lambda_۲) = (x + y, \lambda_۱ + \lambda_۲);$
۳. $\lambda_۲(x, \lambda_۱) = (\lambda_۲ x, \lambda_۲\lambda_۱);$
۴. $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|;$

که $x, y \in \mathcal{A}$ و $\lambda, \lambda_۱, \lambda_۲ \in \mathbb{C}$، یک جبر باناخ یکدار با همانی $(۰, ۱)$ است که آن‌را **یکدارسازی شده‌ی** $\mathcal{A}$ گوییم. همچنین نگاشت

$$\mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \ , \ \ a \longmapsto (a, ۰),$$

یک همریختی یک‌به‌یک است.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ باشند. نگاشت $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ را یک همریختی گوییم، هرگاه T یک نگاشت خطی باشد که ضرب را نیز حفظ نماید، یعنی

$$T(ab) = T(a)T(b) \quad (a, b \in \mathcal{A}).$$