وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

گراف‌های کیلی گروه‌های ساده‌ی متناهی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

محبوبه ثنایی زواره

استاد راهنما: **دکتر محمدرضا سالاریان**

استاد مشاور: **دکتر رشید زارع‌نهندی**

بهمن ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تشکر و قدردانی

به بهشت نمی‌روم اگر مادرم آن‌جا نباشد.

در نهایت فروتنی از تمام اساتید بزرگواری که از آغاز زندگی تحصیلی خود تاکنون افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام، به ویژه اساتید بزرگوار دانشکده ریاضی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان، مراتب قدردانی و تشکر را به جای می‌آورم.

از زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های مفید و راهگشای استاد بسیار عزیزم، جناب آقای دکتر محمدرضا سالاریان، که در انجام و تدوین این پایان‌نامه با نهایت صبوری و مهربانی مرا یاری نمودند، صمیمانه قدردانی می‌کنم و برایشان بهترین‌ها را آرزومندم.

هم‌چنین از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر رشید زارع‌نهندی که با نهایت درایت، راهنمایی‌های لازم را طی مراحل مختلف این پایان‌نامه به بنده نمودند، قدردانی می‌کنم و امیدوارم که سپاس فراوان مرا بپذیرند.

از خانواده‌ی مهربانم که همواره در سایه‌ی پر مهر وجودشان فرصت رشد و آموختن یافتم و از تمام دوستان عزیزم که خاطرات زیبای بودن در کنارشان را هرگز از یاد و قلبم نخواهم برد، سپاس‌گزارم.

چکیده

برای یک گروه G و $S \subseteq G$ که $1_G \notin S$، گراف کیلی G و S با $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ نشان داده می‌شود که در آن

$$V(\mathrm{Cay}(G,S)) = G$$

$$E(\mathrm{Cay}(G,S)) = \{\{g,h\}, hg^{-1} \in S\}.$$

در این پایان‌نامه شرایط کافی برای این که گروه ساده‌ی G یک زیرگروه نرمال از $\mathrm{Aut}\Gamma$ باشد، مورد بررسی قرار گرفته است.

سپس گروه‌های خودریختی گراف کیلی متقارن Γ با درجه‌ی ۶ را بررسی خواهیم کرد. نشان داده شده است که اگر Γ شامل دوری به طول ۴ نباشد، برای گروه‌های ساده‌ی متناهی G به جز تعداد متناهی از آن‌ها، G در $\mathrm{Aut}\Gamma$ نرمال است.

واژه‌های کلیدی: *گروه ساده‌ی متناهی، گراف کیلی، گروه خودریختی گراف*

فهرست

لیست تصاویر

پیش‌گفتار

بسیاری از رویدادهای دنیای واقعی را می توان به راحتی به وسیله‌ی نموداری متشکل از مجموعه‌ای از نقاط و خطوطی که نقاط را به هم وصل می‌کنند، توصیف کرد. حاصل تجرید ریاضی این رویدادها، پیدایش مفهومی با عنوان گراف می‌باشد.

گروه ساده نیز مفهومی است که ابتدا در نظریه‌ی گالوا مطرح شد. طبق تعریف، گروه ساده شامل هیچ زیرگروه نرمال غیربدیهی نمی‌باشد.

گراف کیلی مفهومی است که به برقراری ارتباط میان مفهوم گروه و گراف در ریاضیات می‌پردازد. این گراف روی مجموعه‌ی رئوس گروه و با کمک یک مجموعه‌ی مولد برای گروه تعریف می‌شود. برای گروه G و زیرمجموعه‌ی S از G که $1_G \notin S$، گراف کیلی G و S، با $\mathrm{Cay}(G,S)$ نشان داده می‌شود که در آن

$$V(\mathrm{Cay}(G,S)) = G$$

$$E(\mathrm{Cay}(G,S)) = \{\{g,h\} : hg^{-1} \in S\}.$$

فرض کنید $\langle S\rangle$ تعیین کننده‌ی زیرگروهی از G باشد که توسط مجموعه‌ی S تولید شده باشد. و $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$. در صورتی‌که گراف کیلی $\mathrm{Cay}(G,S)$ همبند نباشد، آن‌گاه Γ اجتماع مجزایی از $|G:\langle S\rangle|$ کپی از گراف کیلی $\mathrm{Cay}(\langle S\rangle, S)$ خواهد بود. و در صورتی که گراف کیلی $\mathrm{Cay}(G,S)$ همبند باشد، $G=\langle S\rangle$.

هر گراف کیلی Γ گروه $G.\mathrm{Aut}(G,S)$ را به عنوان زیر گروهی از گروه خودریختی‌های خود مشخص می‌کند، که

$$\mathrm{Aut}(G,S) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(G) \mid S^\sigma = S\}.$$

به علاوه $N_{\mathrm{Aut}\Gamma}(G) = G.\mathrm{Aut}(G,S)$. در این پایان‌نامه گراف‌های کیلی گروه‌های ساده‌ی ناآبلی را بررسی خواهیم کرد. ابتدا ساختارهای ممکن برای گروه خودریختی‌های یک گراف کیلی همبند دلخواه برای گروه‌های مطرح شده را معرفی کرده، و در ادامه این ساختار را در حالتی که درجه‌ی Γ برابر ۶ است مورد بررسی قرار می‌دهیم. این پایان نامه در پنج فصل تنظیم شده است:

فصل اول، با بیان تعاریفی از نظریه‌ی گروه‌های متناهی آغاز می‌شود. هم‌چنین برخی از گروه‌های ساده را معرفی کرده و گروه‌های اولیه و قضایای مربوط به آن را که کاربرد وسیعی در مطالب فصل‌های آتی دارند، بیان خواهیم کرد.

در فصل دوم، به بیان تعاریفی از گراف و خواص رأس انتقالی و یال انتقالی گراف‌ها می‌پردازیم، گراف کیلی و گراف خارج قسمتی را در بخش دوم این فصل معرفی خواهیم کرد. هم‌چنین به بیان شرایط لازم برای نرمال بودن یک گراف کیلی خواهیم پرداخت.

فصل سوم، شامل مطالبی در مورد گروه‌های ساده و برخی از خواص آن‌ها می‌باشد. مطالب بررسی شده در این فصل جهت اثبات قضایای دو فصل بعد ضروری می‌باشند. در این فصل گروه‌های ساده‌ای که توسط لبک، پریگر و ساکسل در جدول (۱.۳) گردآوری شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این گروه‌ها را برحسب اندیس آن‌ها مورد مطالعه قرار داده و گروه‌های را که اندیس آن‌ها برابر با $۲^a.۳^b$ باشد در جدول (۲.۳) معرفی خواهیم کرد.

در فصل چهارم، حدس پریگر مبنی بر نرمال بودن اکثر گراف‌های کیلی گروه‌های ساده‌ی ناآبلی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در نهایت در فصل پنجم، حدس پریگر را در حالتی که درجه‌ی گراف کیلی مورد نظر برابر با ۶ است، بررسی خواهیم کرد. هم‌چنین برای گروه‌های سوزوکی و ری به دلیل تفاوت در برخی از خواص گروهی، این حدس به طور جداگانه مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

مراجع اصلی این پایان‌نامه مقاله‌های [۱۴] و [۱۰] می باشند.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این پایان‌نامه فرض بر این است که خواننده با مفاهیم نظریه‌ی گروه‌ها در سطح مرجع [۱۵]، آشنایی داشته باشد. تمام گروه‌های مورد نظر متناهی هستند.

۱.۱ گروه‌ها

در این بخش به بیان تعاریف و مفاهیمی از نظریه‌ی گروه‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه و M زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{N}_G(M) = \{g \in G| \quad g^{-1}Mg = M\}$$

را نرمال‌ساز [۱] M در G می‌نامیم.

قضیه ۲.۱.۱. *اگر G یک گروه و M زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد، آن‌گاه* $\mathrm{N}_G(M) \leq G$.

---

[۱] normalizer

اثبات. به قضیه‌ی (۷.۵) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$ و $H \leq G$. در این صورت $N \trianglelefteq NH \leq G$.* *هم‌چنین $H \cap N \trianglelefteq H$.*

اثبات. به نتیجه‌ی (۱.۵) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۴.۱.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه و H زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد. در این صورت مجموعه‌ی

$$\mathrm{C}_G(H) = \{y \in G | xy = yx, \forall x \in H\}$$

را مرکزساز [۱] H در G می‌نامیم. در حالتی که $H = \{x\}$، مجموعه‌ای تک عضوی باشد، آن‌گاه به جای $\mathrm{C}_G(H)$ به اختصار می‌نویسیم $\mathrm{C}_G(x)$ و آن را مرکزساز x در G می‌نامیم. در حالتی‌که $H = \{x\}$ زیرمجموعه‌ای تک عضوی باشد واضح است که $\mathrm{N}_G(H) = \mathrm{C}_G(H)$. توجه کنید که $\mathrm{C}_G(H)$ زیرگروه G است.

تعریف ۵.۱.۱. اگر G یک گروه باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{Z}(G) = \mathrm{C}_G(G) = \{x \in G | xy = yx, \forall y \in G\}$$

را مرکز [۲] گروه G می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و $H \leq G$ در این‌صورت تعداد همردههای چپ یا راست (متناهی یا نامتناهی) H در G را اندیس H در G نامیده و با $|G : H|$ نمایش می‌دهیم.

لم ۷.۱.۱. *اگر G یک گروه متناهی و $H \leq G$ آن‌گاه $|G : H| = \frac{|G|}{|H|}$.*

اثبات. به نتیجه‌ی (۴.۴) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

[۱] centralizer

[۲] center

قضیه ۸.۱.۱. *فرض می‌کنیم G یک گروه و $N \lhd G$ ، در این‌صورت $\frac{H}{N} \unlhd \frac{G}{N}$ اگر و تنها اگر $N \unlhd H \unlhd G$.*

اثبات. به قضیه‌ی (۱۰.۵) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۹.۱.۱. اگر G یک گروه و $x, y \in G$ آن‌گاه $[x,y] = x^{-۱}y^{-۱}xy$ را جابه‌جاگر [۱] x, y می‌نامیم. زیرگروه تولید شده به‌وسیله‌ی تمام جابه‌جاگرهای اعضای G را، زیرگروه جابه‌جاگر G می‌نامیم؛ و آن‌را با G' نمایش می‌دهیم. گاه نیز G' را زیرگروه مشتق [۲] G می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه و $g \in G$، در این‌صورت هر خودریختی G به شکل

$$\varphi_g : G \xrightarrow[x \longmapsto g^{-۱}xg]{} G$$

را خودریختی درونی [۳] G می‌نامیم. خودریختی‌های G راکه درونی نباشند، خودریختی‌های بیرونی [۴] می‌نامیم. مجموعه‌ی خودریختی‌های درونی G را با $\mathrm{Inn}(G)$ و مجموعه‌ی خودریختی‌های بیرونی G را با $\mathrm{Out}(G)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های G را با $\mathrm{Aut}(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱.۱. *اگر G یک گروه باشد، آن‌گاه با قانون ترکیب توابع، $\mathrm{Aut}(G)$ یک گروه است و*

$$\mathrm{Inn}(G) \unlhd \mathrm{Aut}(G).$$

اثبات. به قضیه‌ی (۱.۶) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۱۲.۱.۱. (***قضیه‌ی اول یکریختی***) *اگر $f : G_۱ \longrightarrow G_۲$ یک هم‌ریختی از گروه $G_۱$ در گروه $G_۲$ باشد، آن‌گاه*

$$G_۱/ker(f) \cong Im(f)$$

---

۱ commutator

۲ derived

۳ inner automorphism

۴ outer automorphism

در حالت خاص اگر f پوششی باشد، آن‌گاه $G_1/ker(f) \cong G_2$

اثبات. به قضیه‌ی (۵.۶) از مرجع [۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۳.۱.۱. (**قضیه دوم یکریختی**) *اگر G یک گروه و $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$ آن‌گاه*

$$\frac{H}{H \cap K} \cong \frac{HK}{K}$$

اثبات. به قضیه‌ی (۶.۶) از مرجع [۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۴.۱.۱. (**قضیه‌ی سوم یکریختی**) *فرض کنید G یک گروه و $K \trianglelefteq G$ و $H \trianglelefteq K$ و هم‌چنین $H \trianglelefteq G$.*
در این صورت $G/H/K/H \cong G/K$

اثبات. به قضیه‌ی (۷.۶) از مرجع [۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۵.۱.۱. *اگر G یک گروه باشد، آن‌گاه $G/\mathrm{Z}(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.*

اثبات. به قضیه‌ی (۸.۶) از مرجع [۱] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و $H, K \leq G$ در این صورت به‌ازای هر $g \in G$ مجموعه‌ی $HgK = \{hgk | h \in H, k \in K\}$ را یک همرده‌ی دوگانه [۱] نسبت به H و K می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. زیرگروه نرمال N از گروه G یک زیرگروه نرمال ماکسیمال [۲] نامیده می‌شود هرگاه $N \neq G$ بوده و از $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ نتیجه شود $N = H$ یا $H = G$.

تعریف ۱۸.۱.۱. گروه G ساده [۳] نامیده می‌شود، هرگاه تنها زیرگروه نرمال آن زیرگروه بدیهی $\{e\}$ و G باشند.

---

[۱] double cosets

[۲] maximal normal subgroup

[۳] simple

لم ۱.۱.۱۹. *اگر G یک گروه و N زیرگروه نرمال ماکسیمال G باشد آن‌گاه G/N گروهی ساده است. به‌عکس اگر $N \trianglelefteq G$ و G/N گروهی ساده باشد آن‌گاه N زیرگروه نرمال ماکسیمالی از G است.*

اثبات. به لم (۲.۱۴) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنید G یک گروه باشد. زیرگروه نرمال غیربدیهی H را یک زیرگروه نرمال مینیمال [۱] G گوییم هرگاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمالی از G به جز خودش و $\{e\}$ نباشد. به عبارت دیگر، هرگاه $N \lhd G$ و $N \subseteq H$ آن‌گاه $N = H$ یا $N = \{e\}$.

۱.۲ گروه‌های جایگشتی و عمل گروه بر مجموعه

تعریف ۱.۲.۱. اگر Ω یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، آن‌گاه هر نگاشت دوسویی $\pi : \Omega \longrightarrow \Omega$ یک جایگشت [۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲. مجموعه‌ی تمام جایگشت‌های مجموعه‌ی Ω را که با قانون ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهد، گروه متقارن [۳] مجموعه‌ی Ω نامیده و با S_Ω نشان می‌دهیم.

در حالتی‌که $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مجموعه‌ای متناهی و دارای n عضو باشد، گروه متقارن Ω را با S_n نشان داده و آن را گروه متقارن درجه n می‌نامیم.

قضیه ۱.۲.۳. *S_n گروهی متناهی و از مرتبه‌ی $n!$ است.*

اثبات. به قضیه‌ی (۱.۷) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

---

۱ minimal normal subgroup

۲ permutation

۳ symmetric group

قضیه ۴.۲.۱. *هر جایگشت در S_n را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از دورهای مجزا نوشت. و این ترکیب مگر در ترتیب نوشتن دورها منحصر به‌فرد است.*

اثبات. به قضیه‌ی (۲.۷) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۲.۱. در هر جایگشت دورهای به طول دو را ترانهش [۱] می‌نامند.

ملاحظه ۶.۲.۱. هر جایگشت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب تعداد زوج یا فردی از ترانهش‌ها نوشت.

قضیه ۷.۲.۱. **(کیلی)** *هر گروه با زیرگروهی از یک گروه متقارن یکریخت است. به بیان دیگر به‌ازای هر گروه G مجموعه‌ای مانند Ω وجود دارد به‌طوری که G با زیرگروهی از S_Ω یکریخت است.*

اثبات. به نتیجه‌ی (۷.۸) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۸.۲.۱. مجموعه‌ی تمام جایگشت‌های زوج در S_n تشکیل یک گروه می‌دهند که آن را گروه متناوب [۲] درجه‌ی n می‌نامیم و با A_n نشان می‌دهیم.

قضیه ۹.۲.۱. *$[S_n : A_n] = ۲$ و در نتیجه $A_n \trianglelefteq S_n$.*

و برای $n \geq ۲$، $|A_n| = \frac{n!}{۲}$.

اثبات. به قضیه‌ی (۵.۷) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۲.۱. **(ژوردان)** *برای $n \geq ۵$، گروه متناوب A_n گروهی ساده و ناآبلی است.*

اثبات. به قضیه‌ی (۸.۱.۳) از مرجع [۳] مراجعه شود. □

---

[۱] transposition

[۲] alternating group

مثال ۱.۲.۱۱. گروه $S_۳/A_۳$ ساده است، زیرا $|S_۳/A_۳| = ۲$ و لذا $S_۳/A_۳$ گروهی از مرتبه‌ی عدد اول ۲ و دوری است. در نتیجه $S_۳/A_۳ \cong Z_۲$ پس $A_۳$ زیرگروه ماکسیمال $S_۳$ است.

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه‌ای ناتهی است. (عضو بی‌اثر G را با علامت ۱ نشان می‌دهیم.) نگاشت $f : \Omega \times G \longrightarrow \Omega$ را یک عمل [۱] G روی Ω می‌نامیم هرگاه

۱- $(\omega, ۱)f = \omega \quad \forall \omega \in \Omega$

۲- $((\omega, g)f, h)f = (\omega, gh)f \quad \forall \omega \in \Omega, \forall g, h \in G$

در حالت کلی که ننوشتن قانون عمل یعنی f ایجاد ابهام ننماید، به جای $(\omega, g)f$ مختصراً می‌نویسیم ω^g . بنابراین با توافق روی این خلاصه‌نویسی شرایط ۱ و ۲ تعریف به صورت زیر نوشته خواهد شد:

۱- $\omega^۱ = \omega \quad \forall \omega \in \Omega$

۲- $(\omega^g)^h = \omega^{gh} \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall g, h \in G$

هم‌چنین در حالتی که G دارای عملی روی مجموعه‌ی Ω است، می‌نویسیم $(G|\Omega)$، و می‌خوانیم گروه G روی مجموعه‌ی Ω عمل می‌کند.

مثال ۱.۲.۱۳. اگر G یک گروه باشد، آن‌گاه مطابق قانون زیر روی خودش عمل می‌کند

$$x^g := g^{-۱}xg$$

واضح است که چون G یک گروه است، $g^{-۱}xg \in G$ شرط (۱) و شرط (۲) عمل گروه به‌راحتی ثابت می‌شود. عمل $(G|G)$ را به صورت فوق عمل تزویج می‌نامیم.

لم ۱.۲.۱۴. *فرض کنید G یک گروه و Ω یک مجموعه و $(G|\Omega)$. در این صورت $\sim$ که در زیر تعریف می‌شود یک رابطه‌ی هم‌ارزی در Ω است.*

---

۱ action

$$\alpha \sim \beta \iff \exists g \in G \,;\ \alpha^g = \beta \quad \alpha, \beta \in \Omega$$

اثبات. به لم (۱.۸) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه‌ای ناتهی و $(G|\Omega)$. هم‌چنین فرض کنید $\sim$ رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف شده در لم بالا است. برای $\alpha \in \Omega$ مجموعه‌ی

$$\Delta(\alpha) = \{\beta \in \Omega | \alpha \sim \beta\}$$

را که رده‌ی هم‌ارزی α است، یک مدار [۱] G می‌نامیم. (به $\Delta(\alpha)$ مدار شامل α نیز گفته می‌شود.)

ملاحظه ۱.۲.۱۶. بنابر تعریف فوق و تعریف $\sim$ اعضای $\Delta(\alpha)$ عبارتند از $\Delta(\alpha) = \{\alpha^g | g \in G\}$ چون مدارهای G یک افراز Ω می‌باشند، اگر $\{\Delta(\alpha_i)\}_{i\in I}$ خانواده‌ی تمام مدارهای مجزای G باشد، آن‌گاه

$$\Omega = \bigcup_{i\in I} \Delta(\alpha_i)$$

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه‌ای ناتهی و $(G|\Omega)$. در این صورت عمل G روی Ω انتقالی [۲] نامیده می‌شود هرگاه G تنها دارای یک مدار باشد. یعنی

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega \quad \exists g \in G \,;\ \alpha^g = \beta$$

مثال ۱.۲.۱۸. گروه $A_n(n \geq ۳)$ در عمل خود روی مجموعه‌ی n عضوی $\Omega = \{۱, ۲, ..., n\}$ انتقالی است. زیرا اگر $\alpha, \beta \in \Omega$ و $\alpha \neq \beta$ آن‌گاه چون $n \geq ۳$ فرض شده است، عضو $\gamma \in \Omega$ متفاوت از α, β موجود است و در نتیجه $\pi = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)$ جایگشتی زوج و عضوی از A_n است و داریم $\alpha^\pi = \beta$. در حالتی که $n = ۲$، $A_۲$ تنها دارای یک عضو است، که عبارت است از جایگشت همانی؛

---

۱ orbit

۲ transitive

و می‌دانیم که جایگشت همانی تمام اعضای $\Omega = \{۱, ۲\}$ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین $A_۲$ دارای دو مدار است که عبارتند از $\{۱\}$ و $\{۲\}$، یعنی $A_۲$ انتقالی نیست.

قضیه ۱.۲.۱۹. *اگر $(G|\Omega)$ آن‌گاه G دارای عملی انتقالی روی هر مدار خود می‌باشد.*

اثبات. به قضیه‌ی (۱.۸) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۲۰. فرض کنید $(G|\Omega)$ و $\omega \in \Omega$. مجموعه‌ی

$$G_\omega = \{g \in G | \omega^g = \omega\}$$

را پایدارساز [۱] ω در G می‌نامیم.

قضیه ۱.۲.۲۱. *اگر $(G|\Omega)$ انتقالی باشد، آن‌گاه $|\Omega| = |G : G_\omega|$، برای هر $\omega \in \Omega$.*

اثبات. به قضیه‌ی ۳.۸ از مرجع [۱] مراجعه شود. □

لم ۱.۲.۲۲. ***(مدار پایدارساز)*** *فرض کنید G یک گروه جایگشتی باشد که روی مجموعه‌ی Ω عمل می‌کند. فرض کنید $x \in \Omega$. در این صورت*

$$|G_x||x^G| = |G|.$$

اثبات. به لم (۲.۲.۲) از مرجع [۱۶] مراجعه شود. □

نتیجه ۱.۲.۲۳. *فرض کنید $(G|\Omega)$ و G گروهی متناهی است. اگر $(G|\Omega)$ انتقالی باشد، آن‌گاه $|G|\,||\Omega|$.*

نتیجه ۱.۲.۲۴. *فرض کنید $(G|\Omega)$ و G گروهی متناهی باشد. اگر Δ یک مدار عمل $(G|\Omega)$ باشد، آن‌گاه $|G|\,||\Delta|$. در واقع برای $\omega \in \Delta$ داریم $|\Delta| = |G : G_\omega|$.*

---

[۱] stabilizer

قضیه ۲۵.۲.۱. **(لم شمارشی برنساید)**[۱] *فرض کنید $G \leq sym(\Omega)$ و t تعداد مدارهای G روی Ω باشد، آن‌گاه*

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix(g)|$$

که در آن $fix(g) = \{\omega \in \Omega | \omega^g = \omega\}$.

اثبات. به قضیه‌ی (۲۲.۳) از مرجع [۲۶] مراجعه شود. □

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید G یک گروه جایگشتی باشد که روی مجموعه‌ی Ω عمل می‌کند. G را روی Ω نیم‌منظم [۲] می‌گوییم، هرگاه برای هر $\omega \in \Omega$، $G_\omega = 1$. در این حالت G لزوماً روی Ω انتقالی نیست.

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنید G یک گروه جایگشتی باشد که روی مجموعه‌ی Ω انتقالی عمل می‌کند. G را روی Ω منظم [۳] می‌گوییم، هرگاه برای هر $\omega \in \Omega$، $G_\omega = 1$. (۱ همان عضو همانی G است.)

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. فرض کنید G روی مجموعه‌ی Ω عمل می‌کند و $|\Omega| = n$ و $k \leq n$ یک عدد صحیح مثبت باشد. Ω را k-انتقالی [۴] می‌گوییم اگر برای هر دو k-تایی متفاوت انتخاب شده از Ω مانند $(x_1, ..., x_k)$ و $(y_1, ..., y_k)$ وجود داشته باشد $g \in G$ که $x_i^g = y_i$ برای $i = 1, ..., k$.

نکته ۲۹.۲.۱. واضح است که ۱-انتقالی بودن مجموعه‌ی Ω با عمل G روی آن به معنای انتقالی بودن آن است. اگر $k > 1$ آن‌گاه هر مجموعه‌ی k-انتقالی، $(k-1)$-انتقالی است.

[۱] برنساید در اولین ویرایش کتاب خود در سال ۱۸۹۷ ذکر نموده است که آن‌چه امروزه به عنوان لم برنساید می‌شناسیم، توسط فروبنیوس در سال ۱۸۸۷ ثابت شده است.

[۲] semiregular

[۳] regular

[۴] k-transitive

تذکر ۳۰.۲.۱. گروه G را k-انتقالی می‌گوییم، هر گاه مجموعه‌ی Ω وجود داشته باشد که G روی آن عمل کند و Ω، k-انتقالی باشد.

مثال ۳۱.۲.۱. فرض کنید $\Omega = \{۱, ..., k\}$ و $G = S_k$. واضح است که G روی Ω، k-انتقالی است.

قضیه ۳۲.۲.۱. ***(قضیه لاگرانژ)*** *اگر G یک گروه متناهی و $H \leq G$، آن‌گاه مرتبه‌ی H مرتبه‌ی G را می‌شمارد.*

اثبات. به قضیه‌ی (۱۰.۴) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۳۳.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p-گروه می‌نامیم اگر و تنها اگر $|G|$ توانی از عدد اول p باشد. زیرگروه H از G را یک p-زیر گروه G گوییم در صورتی که H یک p-گروه باشد.

قضیه ۳۴.۲.۱. *اگر G یک گروه و $|G| = p^n$ و p عدد اولی باشد، آن‌گاه $Z(G) \neq ۱$.*

اثبات. به نتیجه‌ی (۳.۸) از مرجع [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۳۵.۲.۱. فرض کنید G بر مجموعه‌ی Ω عمل می‌کند. هسته‌ی[۱] این عمل عبارت است از

$$N = \{g \in G | \omega^g = \omega, \forall \omega \in \Omega\}$$

عمل $(G|\Omega)$ صادق [۲] نامیده می‌شود هرگاه $N = \{۱\}$، که ۱ عضو بی‌اثر گروه است.

ملاحظه ۳۶.۲.۱. با توجه به تعریف بالا می‌توان دریافت که $N \lhd G$.

اگر $N = G$ عمل G بر Ω بدیهی نامیده می‌شود.

---

۱ kernel

۲ faithful