دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

(هندسه)

موضوع:

هندسه‌ی زیر فینسلر در بعد ۳

تهیه کننده:

مریم سپاسی

استاد راهنما:

دکتر بهروز بیدآباد

استاد مشاور:

دکتر ابوالقاسم نقاش

دی ۱۳۸۶

چکیده

در این پایان نامه مفهوم هندسه زیر فینسلر رابه عنوان تعمیمی از هندسه زیر ریمانی با انگیزه کاربرد در کنترل بهینه معرفی می کنیم.
برخی نتایج را از تز دکتری کینر هوگن با عنوان "هندسه منیفلدهای زیر ریمانی ۳−بعدی " وهم چنین مواردی را از مقا له آر.برایانت باعنوان "ساختارهای فینسلر روی کره های ۲−بعدی با $K = 1$ " یاد آور می شویم.
هم چنین، ضمن معرفی روش هم ارزی الی کارتان وادغام این تکنیک ها مجموعه ی کاملی از ناورداهای موضعی، معادلات ژئودزیک وعملگر ژاکوبی برای حالت ۳−بعدی را محاسبه کرده، و در آخر مثال هایی همگن را بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی : هندسه زیر فینسلر، نظریه کنترل بهینه، دستگاه های دیفرانسیل خارجی، روش هم ارزی کارتان

فهرست مندرجات

مقدمه

در این پایان نامه همانطور که از عنوان آن برمی‌آید با فضاهای فینسلری کار می‌کنیم.ابزار ما یک منیفلد ۳$-$بعدی همراه با یک توزیع مشتق پذیر مرتبه ۲ ومتر فینسلری است که بر این توزیع تعریف شده است ودر متن پایان نامه ضمن ارائه تعریفی دقیق تر از آن ها به عنوان یک فضای زیر فینسلریاد می شود.
برای پیشبرد مطالب ذکریک سری تعاریف وقضایا به عنوان پیش نیاز ضروری است. $G-$ ساختارها، روش هم ارزی الی کارتان، دستگاه های دیفرانسیل خارجی ،مفهوم کنترل بهینه ومفاهیمی از آنالیز تابعی اهم مطالبی است که به عنوان پیش نیاز در فصل اول ذکر شده است. هم چنین با ذکر یک مثال در زمینه کنترل بهینه نقصی راکه به هندسه‌زیرریمانی وارد است ولزوم واهمیت تعمیم آن به هندسه زیرفینسلری بیان می‌کنیم.
در فصل دوم،یک ساختار زیر فینسلر ۳$-$ بعدی را معرفی کرده،با استفاده از خواص $G-$ساختارها و روش هم ارزی کارتان ،یک $G-$ساختار، که می توان آن رابه عنوان یک دو بار پوشش منیفلد اولیه در نظر گرفت، همراه با معادلات ساختاری آن به دست می آوریم.
در فصل سوم معادلات ژئودزیک رابرای این متر زیر فینسلر با استفاده از مطالبی از دستکاه‌های دیفرانسیل خارجی بدست می آوریم،ضمن معرفی عملگرژاکوبی با استفاده از قضایایی از آنالیز تابعی قضیه ای را برای ژئودزیک هاکه حدودی را برای مینیمم کردن طول اعمال می کند بیان می کنیم.بالاخره،در فصل آخر مثال هایی همگن را بررسی می کنیم. شایان ذکر است که از مطالبی که بیان می شود در حل مسایلی درکنترل بهینه استفاده می شود که در آن ها بعد فضای وضعیت ۳ است ومعادلات دیفرانسیل مربوطه وتابعک معیار آن در شرایطی که بعداً ذکر می کنیم صدق می‌کنند.

فصل ۱

پیش نیازها و تعاریف مقدماتی

۱.۱ G- ساختارها

تعریف ۱.۱.۱ یک گروه لی G عبارت است از یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر که دارای یک ساختار گروه است به‌طوری که نگاشت

$$\begin{aligned} \theta: \quad & G \times G \to G \\ & (x,y) \to xy^{-1} \end{aligned}$$

مشتق پذیر (C^{∞})باشد.

مثال ۱.۱.۱ $GL(n,\mathbb{R})$ همراه با ضرب ماتریس‌هایک گروه لی است.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه لی باشد. H را زیر گروه لی G گویند چنانچه

۱) H زیر منیفلد G باشد.

۲) H یک زیر گروه G باشد.

۳) H یک گروه لی باشد.

مثال ۲.۱.۱ $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ زیر گروه لی $GL(n,\mathbb{R})$ است.

تعریف ۳.۱.۱ یک جبر لی روی $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ عبارت است از یک فضای برداری $\underline{g}$ حقیقی (مختلط) بانضمام یک نگاشت دو خطی $[\ ,\ ] : \underline{g} \times \underline{g} \longrightarrow \underline{g}$ موسوم به کروشه لی به‌طوریکه بازا هر $X,Y,Z \in \underline{g}$ در خواص زیر صدق کند

۱) ناجابجایی: $[X,Y]=-[Y,X]$

۲) اتحاد ژاکوبی: $[[X,Y],Z]+[[Z,X],Y]+[[Y,Z],X]=0$

مثال ۳.۱.۱ فضای برداری متشکل از ماتریس‌های $n\times n$ که با $gl(n,\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم با کروشه $[A,B]=AB-BA$ یک جبر لی است.

مثال ۴.۱.۱ فضای برداری میدان‌های برداری روی یک منیفلد با کروشه لی $[X,Y]=X.Y-Y.X$ یک جبر لی است.

تعریف ۴.۱.۱ یک میدان برداری X روی یک گروه لی را ناوردای چپ [۱] ویا اختصاراً $L.I$ گویند اگر تحت انتقال‌های چپ G ناوردا باشد یعنی اگر و فقط اگر بازا هر $a\in G$ داشته باشیم $(L_a)_*X=X$ که در آن L_a تابع C^∞ زیر است.

$$\begin{aligned} L_a:\quad & G\longrightarrow G\\ & g\longrightarrow ag \end{aligned}$$

میدان برداری ناوردای راست [۲] یا اختصاراً $R.I$ به طریق مشابه تعریف می‌شود. که در آن انتقال‌های راست را با R_a نشان می‌دهند.

تعریف ۵.۱.۱ یک ۱− فرم w روی یک گروه لی را ناوردای چپ گوییم اگر $L_a^*w=w$ و ناوردای راست گوییم اگر $R_a^*w=w$

قضیه ۱.۱.۱ مجموعه میدان‌های برداری $L.I$ نسبت به کروشه دو میدان برداری تشکیل یک جبرلی می‌دهد.[۲۱]

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم G و H گروه لی باشند. نگاشت $\phi:G\longrightarrow H$ را یک همریختی [۳] گروه‌لی نامند اگر C^∞ و هم‌ریختی گروهی باشد. اگر ϕ وابرریختی [۴] نیز باشد آن را یکریختی [۵] گروه لی گویند.اگر $H=GL(n,\mathbb{R})$ آنگاه ϕ را یک نمایش [۶] گویند.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم $\underline{g}$ و $\underline{h}$ جبرلی باشند. نگاشت $\phi:\underline{g}\longrightarrow\underline{h}$ را یک هم‌ریختی گویند اگر ϕ خطی بوده و ضرب (کروشه) را حفظ کند یعنی بازای هر $X,Y\in\underline{g}$ داشته باشیم $\phi([X,Y])=[\phi(X),\phi(Y)]$. ϕ را یکریختی گویند چنانچه دو سویی نیز باشد.

[۱] left invariant
[۲] right invariant
[۳] homomorphism
[۴] diffeomorphism
[۵] isomorphism
[۶] representation

تعریف ۸.۱.۱ جبرلی میدان‌های برداری $(R.I)L.I$ روی یک گروه لی را جبرلی گروه لی G می‌نامند.

مثال ۵.۱.۱ جبرلی گروه لی $GL(n,\mathbb{R})$، مجموعه ماتریس‌های $n\times n$ است با کروشه $[A,B]=AB-BA$

فرض کنید G یک گروه لی باشد، $c\in G$ و R_c انتقال راست باشد. اگر $\{w^i|_e\}$ پایه‌ای برای T_e^* باشد آن‌گاه به طریق زیر فرم های دیفرانسیل سرتاسری را تعریف می‌کنیم.

$$w^i|_A = R^*_{A^{-1}}(w^i|_e) \qquad A\in G$$

از آن‌جا که

$$\begin{aligned} R^*_C(w^i|_{AC}) &= R^*_C o R^*_{AC^{-1}}(w|_e) \\ &= R^*_C o R^*_{C^{-1}} o R^*_{A^{-1}}(w|_e) = w^i|_A \end{aligned}$$

این‌ها یک پایه برای ۱ $-$ فرمی‌های ناوردای راست روی گروه G تشکیل می‌دهند.

تعریف ۹.۱.۱ ۱$-$ فرم‌های بدست آمده در بالا را فرم‌های مورر کارتان[۷] گوییم. همچنین داریم $dw^i = ۱/۲\sum c^i_{jk} w^j\wedge w^k$ که $c_{jk}=-c_{kj}$ و c^i_{jk} ثابت‌اند.(بنا به راست ناوردایی w^iها)

۱.۱.۱ عمل یک گروه لی بر یک منیفلد دیفرانسیل پذیر

فرض کنیم G یک گروه لی و P یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد گوییم G از راست به‌طور دیفرانسیل پذیری بر P عمل می‌کند هر گاه یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر مانند $\phi: P\times G\longrightarrow P$ موجود باشد به‌طوریکه برای هر $a\in G$، نگاشت $R_a: P\longrightarrow P$ که توسط رابطه $p\longrightarrow \phi(p,a)$ داده می‌شود یک وابرریختی از P به روی خودش باشد و $\phi(\phi(p,a),b)=\phi(p,ab)$ یعنی $R_{ab}=R_b o R_a$. G را گروه تبدیلات لی M نامند. اگر e عضو خنثی G باشد R_e همانی است. برای سادگی، معمولاً به جای $R_a(p)$ می‌نویسیم $p.a$.پس $p.(ab)=(p.a).b$

تعریف ۱۰.۱.۱ چنانچه e تنها عضو G باشد که همه اعضا P را ثابت نگه دارد گویند G به‌طور موثر عمل می‌کند و چنانچه هیچ عضوی از G به‌جز e هیچ عضوی از P را ثابت نگه ندارد یعنی چنانچه بازا یک $p\in P$، $g.p=p$ نتیجه شود که $g=e$، گویند G به‌طور آزاد عمل می‌کند.

اگر بازا هر $p,q\in M$ یک $g\in G$ وجود داشته باشد که $g.p=q$ گویند G به‌طور متعدی عمل می‌کند.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته G و G/H دارای توپولوژی طبیعی باشد در این صورت G/H دارای یک ساختار تحلیلی یکتا است به‌طوریکه G یک گروه تبدیلات لی روی آن است.[۲۱]

---

[۷] Maurer-Cartan

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید گروه تبدیل G روی منیفلد M عمل کند،یک رابطه‌ی هم ارزی روی M به صورت زیرتعریف می کنیم.

$$x_۱ \sim x_۲ \Leftrightarrow \exists g \in G \quad : \quad g.x_۱ = x_۲$$

کلاس هم‌ارزی شامل نقطه‌ی m، برد تابع $\phi_{m:G \longrightarrow M}$ با ضابطه $\phi_m(g) := g.m$ است و آن‌را مدار در m می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه تبدیلات (موضعی) باشد که بر منیفلد M عمل می‌کند، می‌گوییم $S \subset M$ یک زیر مجموعه $G-$ **ناوردا** است اگر بازا هر $g \in G$ و $x \in S$ داشته باشیم $gx \in S$

تعریف ۱۳.۱.۱ تابع $u = f(x)$ را تحت گروه تبدیلات G، $G-$ **ناوردا** گوییم هر گاه نمودار f یعنی Γ_f یک زیر مجموعه $G-$ ناوردا باشد.

۲.۱.۱ کلاف اصلی

فرض کنیم P و M منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر باشند و $\pi : P \longrightarrow M$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر پوشا باشد. فرض کنید G یک گروه لی باشد که از راست بر P عمل می‌کند.چهارتایی (P, M, π, G) یک $G-$ کلاف اصلی[۸] نامیده می‌شود(اگر بخواهیم بهتر بگوییم P یک کلاف اصلی روی M با گروه ساختاری G است) اگر

۱) G به‌طور آزاد بر P عمل کند.

۲) فرض کنید $p_۱$ و $p_۲$ دو نقطه‌ی دلخواه P باشند. آن‌گاه $\pi(p_۱) = \pi(p_۲)$ اگر و فقط اگر $a \in G$ وجود داشته باشد به‌طوریکه $p_۱.a = p_۲$. به عبارتی دیگر M را از طریق π بتوان به عنوان فضای خارج قسمتی P تحت عمل G در نظر گرفت.

۳) P به طور موضعی بر M بدیهی باشد، به این معنی که به ازاٌ هر $x \in M$، یک همسایگی U و یک وابرریختی $\psi : \phi^{-۱}(U) \longrightarrow U \times G$وجود داشته باشد به‌طوریکه $\psi(p) = (\pi(p), \eta(p))$ که درآن $\eta(p) \in G$ و $\psi(pa) = (\pi(p), \eta(p)a)$

$G-$ کلاف اصلی (p, M, π, G) به صورت $P(M, G)$ نیز نشان داده می‌شود. P را فضای کل [۹] یا فضای کلاف [۱۰]، M را فضای پایه[۱۱]، G را گروه ساختاری و π راتابع تصویر گویند. برای هر $x \in M$، $\pi^{-۱}(x)$ یک زیر منیفلد

[۸] principle G-bundle
[۹] total space
[۱۰] bundle space
[۱۱] base space

بسته P است که تار بر x نامیده می‌شود. اگر u یک نقطه از $\pi^{-1}(x)$ باشد آن‌گاه $\pi^{-1}(x)$ مجموعه نقاطی به شکل ua است که $a \in G$ و تار گذرنده از u نامیده می‌شود. هر تار با G وابرریخت است.

مثال ۶.۱.۱ $G(G/H,H)$: فرض کنید G یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته G باشد. عمل H بر G از راست را به‌این روش تعریف می کنیم که هر $a \in H$، $u \in G$ را به ua می‌برد. بنابراین یک $H-$ کلاف اصلی $G(G/H,H)$ بر منیفلد پایه G/H با گروه ساختاری H داریم. بدیهی بودن موضعی (شرط(۳)) از وجود یک بخش موضعی ثابت می‌شود. ثابت می‌شود که اگر π تابع تصویر G به روی G/H باشد و e عضو خنثی G باشد آن‌گاه یک نگاشت σ از یک همسایگی $\pi(e)$ در G/H به G وجود دارد به‌طوریکه $\pi o \sigma$ تبدیل همانی این همسایگی باشد.[۲۱]

مثال ۷.۱.۱ کلاف قاب‌های خطی[۱۲]

فرض کنیم M یک منیفلد به بعد n باشد. یک قاب خطی u در $x \in M$، یک پایه مرتب $X_۱, X_۲, ..., X_n$ در فضای مماس T_xM است. فرض کنیم $F(M)$، مجموعه تمام قاب‌های خطی u در تمام نقاط M باشد و π تابعی از $F(M)$ به روی M باشد که هر قاب خطی u در x را به x ببرد. گروه خطی $GL(n,\mathbb{R})$ روی $F(M)$ از راست به روش زیر عمل می کند:

اگر $a = (a^i_j) \in GL(n,\mathbb{R})$ و $u = (X_۱, ..., X_n)$ یک قاب خطی در x باشد آن‌گاه بنابر تعریف ua، قاب خطی $(Y_۱, Y_۲, ..., Y_n)$ در x است که در آن $Y_i = \sum_j a^j_i X_j$. واضح است که $GL(n,\mathbb{R})$ به‌طور آزاد بر $F(M)$ عمل می کند و $\pi(u) = \pi(v)$ اگر و فقط اگر به ازا یک $a \in GL(n,\mathbb{R})$، $v = ua$. اکنون به معرفی یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر روی $F(M)$ می‌پردازیم.

فرض کنید $(x^۱, ..., x^n)$ یک دستگاه موضعی در یک همسایگی مختصاتی u در M باشد. هر قاب u در $x \in U$ به‌طور یکتایی به‌صورت $u = (X_۱, ..., X_n)$ بیان می‌شود که در آن $X_i = \sum_k X^k_i \frac{\partial}{\partial x^k}$. هم‌چنین (X^k_i) یک ماتریس نامنفرد است. این نشان می‌دهد که $\pi^{-۱}(U)$ در یک تناظر یک به یک با $U \times GL(n,\mathbb{R})$ است. با در نظر گرفتن (x^j) و (X^k_i) به عنوان دستگاه مختصات موضعی در $\pi^{-۱}(U)$، $F(M)$ به ساختار یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر مجهز می‌شود.به آسانی ثابت می شود که $F(M)(M, GL(n,\mathbb{R}))$ یک کلاف اصلی است . $F(M)$ را کلاف قاب‌های خطی روی M می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید ρ یک همریختی از گروه لی $G_۱$ به گروه لی $G_۲$ باشد. فرض کنید $P_۱$ یک $G_۱-$ کلاف اصلی و $P_۲$ یک $G_۲-$ کلاف اصلی روی منیفلد M باشند. یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $f : P_۱ \longrightarrow P_۲$ را یک ρ همریختی گوییم اگر به ازاٗ هر $p_۱ \in P_۱$ و $a \in G_۱$ داشته باشیم $f(p_۱.a) = f(p_۱)\rho(a)$. یک وابرریختی که همریختی باشد، یکریختی نامیده می‌شود.

[۱۲] Bundle of linear frames

در حالتی که $G_۱$ همانی باشد، $P_۱$ را می‌توان همان M و f را تابعی از M به $P_۲$ در نظر گرفت به‌طوریکه $\pi o f = id$. که در این‌جا f را یک بخش موضعی می‌نامند. وقتی که برای کلاف P یک بخش موضعی وجود داشته باشد، یک یکریختی از P به کلاف $M \times G$ وجود دارد یعنی بنا به تعریف کلاف P بدیهی است.
نکته مهم دیگری که در رابطه با همریختی $P_۱ \longrightarrow P_۲$ وجود دارد وقتی است که $G_۱$ یک زیر گروه $G_۲$ و ρ یک تکریختی باشد. این همریختی را یک کاهش، $G_۲-$ کلاف $P_۲$ به $G_۱-$ کلاف $P_۱$ می‌نامند. یا به عبارتی دیگر می گوییم $G_۲$ـکلاف $P_۲$ به $G_۱-$ کلاف $P_۱$ کاهش‌پذیر است. با توجه به مطالب فوق اگر $G_۱ = \{e\}$ آن‌گاه یک کلاف $\{e\}$ کاهش‌پذیر است اگر و فقط اگر بدیهی باشد.
به عنوان مثال در هر منیفلد دلخواه M، $GL-$ کلاف $F(M)$ همیشه به یک $O(n)-$ کلاف کاهش‌پذیر است. در حقیقت یک متر ریمانی روی M قرار می‌دهیم و $O(n)-$ کلاف $O(M)$ را در نظر می گیریم که زیر منیفلدی از $F(M)$ است. در این جا$O(M)$ مجموعه عناصر به شکل $(x, X_۱, ..., X_k)$ است که $X_۱, X_۲, ..., X_k$ یک پایه متعامد یکه از $T_x(M)$ است و k بعد M است.[۲۰]

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید G یک زیر گروه $GL(V)$ باشد. یک $G-$ ساختار روی یک منیفلد $n-$ بعدی M، کاهش $F(M)$ به گروه G است. بنابراین یک $G-$ ساختار B_G روی یک منیفلد M، یک زیر منیفلد $F(M)$ است با این خاصیت که برای هر $p \in B_G$ و هر $a \in GL(V)$، نقطه $p.a$ به B_G متعلق باشد اگر و فقط اگر $a \in G$.

مثال ۸.۱.۱ $G = \{e\}$. در این مورد یک G ساختار روی M، انتخاب یک قاب در هر نقطه M است. با یک چنین ساختاری ما در هر نقطه، یک همانند سازی فضای مماس با یک فضای برداری دلخواه V داریم.

مثال ۹.۱.۱ فرض کنید $(\, , \,)$ یک ضرب اسکالر روی V باشد و فرض کنید G گروه همدیس $(\, , \,)$ باشد. یعنی $T \in GL(V)$ به G متعلق است اگر و فقط اگر برای هر $u, v \in V$ داشته باشیم $(Tu, Tv) = \lambda_T(u, v)$ که λ_T مثبت و فقطبه T بستگی دارد. یک G ساختار با این گروه یک ساختار همدیس نامیده می‌شود.

۲.۱ مساله‌ی هم‌ارزی کارتان

مساله‌ی هم‌ارزی کارتان در واقع پیدا کردن شرایط لازم و کافی برای هم ارز بودن دو شی هندسی می‌باشد که با استفاده از تغییر متغییر (یا به عبارت دیگر وابرریختی ها) این کار صورت می‌پذیرد.
ساده‌ترین مثال به بحث مربوط به متغییرهای یک به یک و پوشا در حساب دیفرانسیل و انتگرال است که تغییر متغییرها معمولاً منجر به پیدا کردن مساله ساده‌تری می‌شوند که معادل با مساله‌ی اول است.
در معادلات دیفرانسیل هم می‌توان از ایده هم ارزی استفاده کرد. به این ترتیب که با استفاده از هم‌ارزی، معادلات دیفرانسیل از درجه بالاتر را به معادلات دیفرانسیل از درجه پایین‌تر تبدیل می‌کنیم و بعد آن‌ها را حل

می‌کنیم.
نظریه هم‌ارزی در قرن بیستم توسط الی کارتان [۱۳] دانشمند فرانسوی شکل گرفت که البته در ادامه‌ی تلاش‌ها و کوشش‌های افراد بزرگی نظیر فلیکس کلاین و سوفس لی بوده است. بعد از کارتان تعدادی از شاگردان او از جمله روبرت گاردنر[۱۴]، روبرت برایانت[۱۵]، س.س. چرن[۱۶] و...کارهای زیادی را در این زمینه انجام دادند.
به عنوان یک کاربرد بیان می‌کنیم که هر سیستم کنترل اتوماتیک بر اساس یک یا چند معادله دیفرانسیل بیان می‌گردد. با تعویض پارامترها، معادله احتمالاً تغییر پیدا می‌کند. می‌خواهیم شرایطی را پیدا کنیم که با تغییر پارامترها، جواب‌های دستگاه حفظ شود و تغییر نکند.

۱.۲.۱ صورت مساله

فرض کنیم که M و N دو منیفلد هموار با بعد m باشند و $G \subseteq GL(m.\mathbb{R})$ یک زیر گروه خطی باشد. هم‌چنین فرض می‌کنیم که U و V دو مجموعه باز به ترتیب در M و N باشند. اگر $w_U = (w_U^1, ..., w_U^m)^t$ [۱۷] یک همکنج (مجموعه‌ای مرتب از ۱$-$ فرم‌ها که در هر $x \in M$ یک پایه برای T_x^*M باشد.) بر U و $\Omega_V = (\Omega_V^1, ..., \Omega_V^m)^t$ یک همکنج بر V باشد، در این صورت مطلوب است تحقیق شرایط لازم و کافی برای وجود وابرریختی هایی نظیر $\phi : U \longrightarrow V$ که برای هر $u \in U$ در شرط

$$\phi^* \Omega_V|_{\phi(u)} = \gamma_{UV} w_U|_u \qquad (۱.۲.۱)$$

صدق کنند بطوریکه $\gamma_{UV} : U \longrightarrow G$ یک تابع $G-$ مقداری است. این مساله را مساله $G-$ هم ارزی کارتان می‌نامند. G را گروه ساختاری مساله هم ارزی نامند. اگر بخواهیم شرط (۱.۲.۱) را به صورت باز شده بنویسیم به فرم زیر در می آید:

$$\phi^* \Omega_V^i = \sum \gamma_{UV}^{ij}(u) w_U^j \qquad 1 \le i \le m \quad , \quad 1 \le j \le m$$

اگر $G = \{I_m = e\}$، مساله‌هم ارزی در واقع پیدا کردن شرایط لازم و کافی برای وجود وابرریختی $\phi : U \longrightarrow V$ است که $\phi^* \Omega_V = w_U$ و اگر $G = GL(n, \mathbb{R})$ آن گاه هر وابرریختی در تعریف مساله کارتان صدق می‌کند.
یادداشت: باید توجه داشته باشیم که هر چه مرتبه‌ی گروه G کوچکتر باشد حل کردن مساله‌ی هم ارزی آسان‌تر است. پس سعی بر این است که با استفاده از روش کاهش گروه، گروه را کاهش دهیم و مساله هم ارزی را ساده تر حل کنیم.

---
[۱۳] Elie Cartan
[۱۴] Robert Gardner
[۱۵] Robert Bryant
[۱۶] S.S Chern
[۱۷] توان t به معنی ترانهاده‌است

مثال ۱.۲.۱ هم‌ارزی مترهای ریمانی: فرض کنیم که $(v, d\Sigma^2)$ و $(u, d\sigma^2)$ متریک‌های ریمانی روی مجموعه‌های باز V و U در N و M باشند و $dim\ N = dim\ M$. اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که در چه صورت وابرریختی از U و V وجود دارد که متر را حفظ می‌کند. به عبارت دیگر نگاشت هم‌ارزی در رابطه $\phi^*(d\Sigma^2) = d\sigma^2$ باید صدق کند. اگر Ω_V و w_U همکنج‌هایی به ترتیب بر V و U باشند می‌توانیم مترهای ریمانی $d\sigma^2$ و $d\Sigma^2$ را به فرم $d\Sigma^2 = \sum_i (\Omega_V^i)^2$ و $d\sigma^2 = \sum_i (w_U^i)^2$ بنویسیم. پس در حقیقت، مساله‌ی پیدا کردن شرایط لازم و کافی برای وجود وابرریختی $\phi : U \longrightarrow V$ است که در شرایط $\phi^*\Omega_V = \gamma_{UV} w_U$ صدق کند که در این‌جا γ_{UV} متعلق به $O(m, \mathbb{R})$ است که $O(m, \mathbb{R}) \subseteq GL(m, \mathbb{R})$ گروه $m \times m$ ماتریس‌های متعامد است.

۲.۲.۱ ترفیع مساله

فرض کنیم که بایک مساله G–هم ارزی کارتان روبرو هستیم وG، یک زیر گروه خطی همبند $GL(n, R)$است.اکنون اگر فضاهای $U \times G$ و $V \times G$ را در نظر بگیریم واضح است که G با اعمال زیر روی این فضا عمل می کند.

$$C.(p, S) = (p, C.S) \qquad \forall S, C \in G, \forall p \in U$$

فرض کنید $\pi_U : U \times G \longrightarrow U$ و $\pi_V : V \times G \longrightarrow V$ توابع تصویری باشند.

بردارهایی جدید از۱ –فرم ها به فرم زیر تعریف می شوند،

$$\Omega|_(v, T) = T\pi_V^*\Omega_V \quad , \quad \omega|_(u, S) = S\pi_U^*\omega_U$$

عناصر ω و Ω ۱ –فرم هایی روی $U \times G$ و $V \times G$ هستند. Ω و ω را همکنج های ترفیع یافته بر $V \times G$ و $U \times G$ می نامیم.

گزاره ۱.۲.۱ وابرریختی $\phi : U \longrightarrow V$ که در شرط

$$\phi^*\Omega_V = \gamma_{UV}\omega_U$$

صدق کند وجود دارد اگر وفقط اگر یک وابرریختی $\phi^1 : U \times G \longrightarrow V \times G$ به طوری که $\phi^{1*}\Omega = \omega$ وجود داشته باشد.

هم چنین نمودارزیر جابجایی است.[۷]

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \overset{\phi^{1}}{\longrightarrow} & V \times G \\ \pi_U \downarrow & & \downarrow \pi_V \\ U & \overset{id}{\longrightarrow} & V \end{array}$$

۳.۲.۱ فرمهای مورر—کارتان و عبارت یوگا

فرض کنیم $\pi_{ij} : GL(n,R) \longrightarrow$ تابع تصویر استاندارد روی درایه (i,j) باشد.پس یک دستگاه مختصات سرتاسری داریم.

به ازاًء هر$C, S \in GL(n,\mathbb{R})$ داریم

$$\pi_{ij}(S) = S_{ij}$$

توجه می کنیم که $\pi_{ij} o R_C(S) = \pi_{ij}(SC) = \sum \pi_{ij}(S)\pi_{kj}(C)$ پس

$$R_C^* d\pi_{ij}|_S C = d(\pi_{ij} o R_C)|_S = \sum d\pi_{ik}|_S \pi_{kj}(C)$$

در ادامه بحث از نماد زیر استفاده می کنیم

$$dS = (d\pi_{ij}|_S)$$

نشان دادیم که $R_C^* d(SC) = dSC$پس

$$R_C^* d(SC)(SC)^{-1} = dSCC^{-1}S^{-1} = dSS^{-1}$$

پس dSS^{-1} ماتریسی است در$M(n,R)$ که درایه های فرم های مورر— کارتان راست ناوردا هستند. dSS^{-1} عبارت یوگا نام دارد.

۴.۲.۱ معادلات ساختاری

فرض کنید $w_U = (w_U^1, ..., w_U^m)^t$ یک همکنج بر همسایگی U در M و $G \subseteq Gl(m,\mathbb{R})$ یک گروه خطی همبند و w همکنج ترفیع داده شده متناظر با w_U بر $U \times G$ باشد، با این تذکر که w^i ها اساسی‌اند[۱۸]، (یعنی هم ضرایب

[۱۸] basic

و هم دیفرانسیل آن‌ها فقط به مختصات روی U به تنهایی بستگی دارند.) فرض کنید که $w = Sw_U$ بطوریکه $S : U \longrightarrow G$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر است. اگر

$$w^i = \sum_{j=1}^{m} S_j^i w_U^i \quad , \quad s = [s_j^i] \quad , \quad 1 \leq i,j \leq m$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} dw^i &= \textstyle\sum_{j=1}^m d(s_j^i w_U^i) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m (ds_j^i \wedge w_U^j + S_j^i dw_U^i) = \sum_{j=1}^m dS_j^i \wedge w_U^i + \sum_{j=1}^m S_j^i dw_U^i \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

پس با توجه به این‌که $w = Sw_U$ داریم:

$$dw = dS \wedge w_U + Sdw_U = dSS^{-1} \wedge Sw_U + Sdw_U$$

پس $dw^i = \sum (dSS^{-1})_j^i \wedge w^j + \sum S_j^i dw_U^j$ فرض کنیم $dim\ G = r$. اگر $\{\pi^p\}_{p=1}^r$ پایه‌ای برای فرم‌های مورر کارتان روی G باشد داریم

$$(dSS^{-1})_j^i = \sum a_{jp}^i \pi^p$$

با توجه به ناوردای چپ بودن π^p ها ثابت می‌شود که a_{jp}^i ثابت هستند.

می‌دانیم که dw_u^jها، بر U ۲− فرمی‌اند.پس

$$dw^i = \sum a_{jp}^i \pi^p \wedge w^j + 1/2 \sum \gamma_{jk}^i (u,S) w^j \wedge w^k$$

γ_{gk}^i ها توابعی هستند که روی $U \times G$ تعریف شده‌اند.

معادلات فوق را معادلات ساختاری کارتان می‌نامند. γ_{jk}^i ها ضرایب تاب و جملات شامل این ضرایب را جملات تاب می‌نامند.

اکنون فرض کنید $dw^i = \sum \Delta_j^i \wedge w^j$ به طوری که هیچ پیش فرضی بر Δ_j^i ها نیست. اگر معادله فوق را از معادله ساختاری کارتان کم‌کنیم، داریم

$$0 = \sum (\Delta_k^i - a_{kp}^i) \wedge w^k - \frac{1}{2} \sum \gamma_{jk}^i w^j \wedge w^k$$

اکنون به عنوان یادآوری لم کارتان را می آوریم.

لم ۱.۲.۱ (کارتان) : فرض کنید $\{w^i\}$ مجموعه‌ای مستقل خطی از ۱− فرمی‌ها باشد و فرض کنید $\{\pi^i\}$ مجموعه‌ای از ۱− فرم‌های دلخواه با همان کاردینال متناهی مجموعه $\{w^i\}$ باشد. آن‌گاه

$$\sum \pi_i \wedge w^i = 0$$

اگر و فقط اگر $\pi_i = \sum c_{ij} w^j$به طوری که (c_{ij}) ماتریسی متقارن است.

یک نتیجه لم کارتان را اگر برای آخرین تساوی به‌کار گیریم، داریم:

$$\Delta^i_j - \sum a^i_{jp}\pi^p = \sum b_{ij} w^j$$

خاصیت فوق را از این به بعد به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\Delta^i_j - \sum a^i_{jp}\pi^p \equiv 0 \quad (w^1, ..., w^n) \text{ به پیمانه پایه } \tag{۲.۲.۱}$$

و به‌طور خلاصه‌تر

$$\Delta^i_j - \sum a^i_{jp}\pi^p \equiv 0 \qquad \text{به پیمانه پایه}$$

اکنون اگر هر رابطه با ضرایب ثابت روی ماتریس فرم‌های مورر کارتان داشته باشیم. یعنی $\sum b^i_j a^i_{jp}\pi^p = 0$ با توجه به فرمول (۲.۲.۱) داریم

$$\sum b^i_j \Delta^i_j \equiv 0 \qquad \text{به پیمانه پایه}$$

فرم‌های $\sum b^i_j \Delta^i_j$ را مولفه‌های اصلی از مرتبه ۱ [۱۹] نامند. فرض کنید دیفرانسیل خارجی‌ها را به دو صورت زیر داشته باشیم.

$$dw^i = \sum a^i_{kp}\pi^p \wedge w^k + \frac{1}{2}\sum \gamma^i_{jk} w^j \wedge w^k$$

$$dw^i = \sum a^i_{kp}\overline{w}^p \wedge w^k + \frac{1}{2}\sum \Gamma^i_{jk} w^j \wedge w^k$$

با کم کردن دو معادله فوق داریم

$$0 = \sum a^i_{kp}(\pi^p - \overline{w}^p) \wedge w^k + \frac{1}{2}\sum (\gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}) w^j \wedge w^k$$

هم‌چنین با استفاده از لم کارتان داریم

$$\sum a^i_{kp}(\pi^p - \overline{w}^p) + \frac{1}{2}\sum (\gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}) w^j = \sum b^i_{kj} w^j \qquad b^i_{jk} = b^i_{kj}$$

فرض کنید بعد G، r باشد. پس تعداد عناصر مستقل خطی مجموعه $\{\sum a^i_{jp}\pi^p\}$ برابر با r است.پس ۱ $-$ فرمی‌های $\sum a^{i_1}_{j_1 p}\pi^p, ..., \sum a^{i_r}_{j_r p}\pi^p$ وجود دارند که مستقل خطی‌اند.پس ماتریس

$$(D^\sigma_p) = (a^{i_\sigma}_{j_\sigma p})$$

معکوس‌پذیر است و اگر بر دو طرف معادله زیر عمل کند

$$\sum a^{i_\sigma}_{j_\sigma p}(\pi^p - \overline{w}^p) = \sum (\Gamma^{i_\sigma}_{j_\sigma k} - \gamma^{i_\sigma}_{j_\sigma k} + b^{i_\sigma}_{j_\sigma k}) \wedge w^k$$

[۱۹] principle components of order 1

داریم

$$\pi^p - \overline{w}^p = \sum v_k^p w^k \text{ و یا } \pi^p \equiv \overline{w}^p \text{ به پیمانه پایه }$$

سعی بر این است که ابتدا با استفاده از رابطه $dw = ds \wedge w_U + Sdw_U$ و $(\Delta_j^i) \wedge w^j$ و روابط موجود بر ماتریس مورر— کارتان Δ_j^iها را جایگزین کرد.
از آن‌جا که روابط بر ماتریس مورر— کارتان در حقیقت تعریف روابط بر جبرلی G است، آن‌چه گفتیم به این معنی است که

$$dw^i = \sum \pi_k^i \wedge w^k + \frac{۱}{۲} \sum \gamma_{jk}^i w^j \wedge w^k$$

به طوریکه به پیمانه پایه $(\pi_j^i) \equiv \sum a_{jp}^i \pi^p$ یک فرم دیفرانسیل جبر لی مقدار است. در مرحله بعد تا آن‌جا که ممکن است، با توصیف π_j^iها به صورت ضرایب w^k ها، ضرایب تاب را ساده و حذف می‌کنیم. این روند را تکنیک جذب[۲۰] گویند که ابتدا توسط کارتان و بعد توسط شاگردان او از جمله گاردنر پیگیری شد.

۵.۲.۱ کاهش گروه

فرض کنید که V یک زیر فضای برداری m— بعدی با پایه $\{e_i\}$ باشد. از یکسانی V و $\mathbb{R}^m$ به عنوان بردارهای ستونی استفاده می‌کنیم. V^* را فضای دوگان V با پایه $\{f^j\}$ در نظر می‌گیریم و از یکسانی V^* و $\mathbb{R}^m$ به عنوان بردارهای سطری استفاده می‌کنیم. اگر $\{\varepsilon_\alpha\}$ پایه T_eG و $\{\pi^p\}$ پایه دوگان T_eG باشد(یعنی پایه‌ی T_e^*G باشد)، عمل طبیعی گروه G روی این فضاها را در نظر می‌گیریم. T_eG را به عنوان جبرلی گروه G روی این فضاها در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم

$$T_eG \simeq \underline{g} \subseteq Hom(V,V)$$

با توجه به فرضیات گفته شده

$$\varepsilon_p = \sum a_{ip}^j e_j \otimes f^i$$

تعریف ۱.۲.۱ عملگر خطی L را به فرم زیر تعریف می‌کنیم

$$L : \underline{g} \otimes V \longrightarrow V \otimes \wedge^۲ V^*$$

$$L(\sum v_k^p \sigma_p \otimes f^k) = \frac{-۱}{۲} \sum (a_{jp}^i v_k^p - a_{kp}^i v_j^p) e_i \otimes f^i \wedge f^k$$

[۲۰] absorbsion

فرض کنیم که $\underline{g}^{(1)} = Ker\ L$ و $\sqcap_{\underline{g}} = V \otimes \wedge^2 V^*/imL$ دنباله

$$\circ \longrightarrow \underline{g}^{(1)} \longrightarrow \underline{g} \otimes V^* \xrightarrow{L} V \otimes \wedge^2 V^* \longrightarrow \sqcap_{\underline{g}} \longrightarrow \circ$$

دقیق است. $g^{(1)}$ را نخستین امتداد جبرلی می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ نگاشت g را به فرم زیر تعریف می‌کنیم.

$$g: \quad U \times G \longrightarrow V \otimes \wedge^2 V^*$$

$$(u, S) \longrightarrow (\textstyle\sum_{i,j,k} \gamma^i_{jk}(u, S) e_i \otimes f^j \wedge f^k$$

نگاشت $\tau_U = Tog$ و $\tau_U : U \times G \longrightarrow \sqcap_{\underline{g}}$ که‌در آن

$$T : V \otimes \wedge^2 V^* \longrightarrow \sqcap_{\underline{g}}$$

تصویر طبیعی است، را تاب ذاتی می‌نامیم.

۶.۲.۱ حفظ نگاشت‌های ساختاری توسط هم ارزی‌ها

فرض کنیم

$$d\Omega^i = \sum a^i_{jp} \pi^p \wedge \Omega^i + \frac{1}{2} \sum \Gamma^j_{ik} w^j \wedge w^k$$

روی $V \times G$ تعریف شده باشد و

$$dw^i = \sum a^i_{jp} \pi^p \wedge w^i + \frac{1}{2} \sum \gamma^j_{ik} w^j \wedge w^k$$

روی $U \times G$ تعریف شده باشد به طوریکه U و V زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^m$ هستند و Ω و w به‌ترتیب دو همکنج ترفیع داده شده بر $V \times G$ و $U \times G$ همراه با گروه ساختاری G باشند. این‌ها را معادلات ساختاری کارتان می‌نامند.

حال، اگر $\phi^1 : U \times G \longrightarrow V \times G$ نگاشت هم‌ارزی باشد، آن‌گاه

$$\phi^{1*}\Omega^i = w^i \qquad\qquad 1 \le i \le m$$

و چون $d(\phi^{1*}\Omega^i) = \phi^{1*} d\Omega^i$ پس $\phi^{1*} d\Omega^i = dw^i$ و در نتیجه

$$dw^i = \sum a^i_{jp} \phi^{1*}\pi^p \wedge \phi^{1*}\Omega^j + \frac{1}{2} \sum (\Gamma^i_{jk} o \phi^1) \phi^{1*}\Omega^j \wedge \phi^{1*}\Omega^k$$

و بنابراین

به پیمانه تصویر $(imL)L$ $\qquad \frac{۱}{۲}\sum \Gamma^i_{jk} o\phi^{۱} w^j \wedge w^k \equiv \frac{۱}{۲}\sum \gamma^i_{jk} w^j \wedge w^k$

در نتیجه نمودار

$$\begin{array}{ccc} U\times G & \overset{\phi^{۱}}{\longrightarrow} & V\times G \\ \tau_U \downarrow & & \downarrow \tau_V \\ \sqcap_g & \overset{id}{\longrightarrow} & \sqcap_g \end{array}$$

تعویض پذیر است و بنابراین، نگاشت‌های ساختاری تحت هم ارزی‌هاحفظ می‌شوند.

۷.۲.۱ مساله‌ی هم ارزی نوع اول

تعریف ۳.۲.۱ یک مساله هم ارزی را در صورتی از نوع ثابت مرتبه اول گوییم که $(\tau_U \times G)$ تنها یک مدار از G روی $\sqcap_{\underline{g}}$ باشد.

تعریف ۴.۲.۱ اگر مساله‌ی هم ارزی از نوع ثابت مرتبه اول باشد، آن‌گاه دو حالت وجود دارد.

۱) تعداد مدارها متناهی باشد. در این صورت میتوان فقط روی یک مدار کار کرد.

۲) تعداد مدارها متناهی نباشد. این حالت توسط کارتان مورد مطالعه قرار گرفت.

حال فرض کنید که مساله‌ی هم ارزی از نوع ثابت مرتبه اول باشد و $\tau_\circ = \tau_U(u_\circ, s_\circ) \in \tau_U(U\times G)$ گروه $G_{\tau_\circ}$ را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$G_{\tau_\circ} = \{c \in G | \rho \otimes \wedge^{۲} \rho^t(c)\tau_\circ = \tau_\circ\}$$

لازم به ذکر است که اگر $\rho : G \longrightarrow Aut(V)$ که $V \equiv \mathbb{R}^m$ یک نمایش باشد و $G \subseteq GL(m,\mathbb{R})$ همچنین نگاشت $\rho^t : G \longrightarrow Aut(V^*)$ وجود دارد که با ضابطه‌ی زیر مشخص می‌شود.

$$\langle \rho(s)v, \rho^t(s)f\rangle = \langle v, f\rangle$$

که $v \in V$ و $f \in V^*$ است. بنابراین $\rho^t(s) = \rho(s)^{-۱}$ اگر قرار دهیم $\rho(s) = (s^i_j)$ و $\rho(s)^{-۱} = (\delta^i_j)$ آن‌گاه عمل طبیعی G روی $V \otimes \wedge^{۲} V^*$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho \otimes^{۲} \rho^t(s) h^i_{jk} = \sum \delta^p_j \delta^q_j h^m_{pq} S^i_m$$