دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

مدول‌های کراندار و تماماً کراندار

نگارش

عاطفه شعبانی

استاد راهنما

دکتر رضا بیرانوند

استاد مشاور

دکتر علی‌رضا نظری

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته **ریاضی محض**

بهمن‌ماه ۱۳۹۲

تقدیم به

" پدر و مادر مهربان و همسر عزیزم "

چکیده

نام خانوادگی: شعبانی **نام:** عاطفه
عنوان پایان‌نامه: مدول‌های کراندار و تماماً کراندار
استاد راهنما: دکتر رضا بیرانوند **استاد مشاور:** دکتر علیرضا نظری
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر **محل تحصیل:** دانشگاه لرستان **دانشکده:** علوم پایه **تاریخ فارغ التحصیلی:** ۲۹ بهمن ماه ۱۳۹۲ **تعداد صفحه:** ۹۰
کلید واژه ها: مدول شبه پروژکتیو، مدول آرتینی، مدول کراندار، مدول تماماً کراندار، بعد کرول، مدول $\mathcal{L}_2$-نوتری، مدول $\mathcal{L}_2$-اول، حلقه‌ی FBN.
چکیده: در این رساله مفهوم حلقه‌های کراندار و تماماً کراندار را به مدول‌ها تعمیم می دهیم . مدول M_R را کراندار می‌نامیم هرگاه برای هر $N \leq_e M_R$، $ann_R(M/N) \leq_e R_R$ و تماماًکراندار می‌نامیم هرگاه (M/P) برای هر زیرمدول $\mathcal{L}_2$-اول تماماً پایای سره‌ی P از M_R به صورت یک مدول روی $R/ann_R(M/P)$ کراندار باشد. ما نشان می‌دهیم کرانداری و کرانداری راست ویژگی‌های پایای موریتا هستند. هم‌چنین حلقه‌هایی که همه‌ی مدول‌های روی آن‌ها کراندار و تماماً کراندار هستند دسته‌بندی می‌شوند.

فهرست مطالب

پیش گفتار

در سراسر بحث‌های این رساله حلقه‌ها یک‌دار در نظر گرفته می‌شوند و R نمایش چنین حلقه‌ای است. هم‌چنین همه‌ی مدول‌ها یکانی فرض می‌شوند.

گودل در سال ۲۰۰۴ برای نخستین بار در مرجع [2] حلقه‌های کراندار و تماماً کراندار را تعریف کرد. در سال‌های ۱۹۸۸ تا ۱۹۹۷ حلقه‌های نوتری راست تماماً کراندار راست (FBNراست) و مدول‌های روی آن‌ها توسط هیکیانگ و کوک مینگ در مراجع $[7-4]$ به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفتند. مفهومی از حلقه‌های کراندار راست توسط نویسنده‌های قبلی به مدول‌های کراندار تعمیم داده شده است. در سال ۲۰۰۵ اسمیت در مرجع [10] مدول M_R را که برای هر $P \in Ass(M_R)$، R/P یک حلقه‌ی تماماًکراندار راست و R یک حلقه‌ی نوتری راست باشد، کراندار نامید. هم‌چنین هیکیانگ در سال ۱۹۸۸ در مرجع [5] مدول M_R را با این شرط که برای هر $N \leq_e M_R$،

$$ann_R(M/N)/ann_R(M) \leq_e R/ann_R(M)$$

کراندار نامید. برای دوری از تشابه اسمی مدول‌های اخیر را L-کراندار می‌گوییم.

ما در فصل اول این رساله تعاریف و لم‌ها و گزاره‌های مورد نیاز را برای استفاده در فصل‌های بعدی قرار دادیم. در فصل دوم حلقه‌های کراندار و تماماًکراندار و FBNراست را از مرجع [2] تعریف و لم‌ها و گزاره‌هایی را در مورد حلقه‌های مذکور اثبات می‌کنیم. در فصل سوم به بیان تعاریف و قضایا و نتایجی اصلی می‌پردازیم. به خصوص مدول M_R را کراندار می‌نامیم هرگاه برای هر $N \leq_e M_R$، $ann_R(M/N) \leq_e R_R$ و تماماًکراندار می‌نامیم هرگاه (M/P) برای هر زیرمدول $\mathcal{L}_2$-اول تماماً پایای سره‌ی P از M_R به صورت یک مدول روی $R/ann_R(M/P)$ کراندار باشد. در این فصل نشان می‌دهیم مدول‌های کراندار شده با تعریف ما رده‌ی بزرگتری از رده‌ی مدول‌های L-کراندار تشکیل می‌دهند و ثابت می‌کنیم کرانداری و کرانداری راست ویژگی‌های پایای موریتا هستند. هم‌چنین حلقه‌هایی که همه ی مدول‌های روی آن‌ها کراندار و تماماًکراندار و L-کراندار هستند دسته‌بندی می‌شوند و بالاخره نشان می‌دهیم بعد کرول برای یک R-مدول راست $\mathcal{L}_2$-نوتری تماماً کراندار شبه‌پروژکتیو ناصفر حداکثر برابر با بعد کلاسیک کرول از R است، زمانی‌که هر دو بعد وجود داشته باشند.

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱

فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول راست باشد. در این پایان نامه نماد $I \leq R_R$ و $N \leq M_R$ را به ترتیب برای ایدآل راست R و زیرمدول M به کار می‌بریم. حال با در نظر گرفتن این نمادها، تعاریف و گزاره‌های زیر را برای استفاده در فصل‌های بعدی می‌آوریم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول راست و N زیرمدولی از آن باشد. در این صورت M را توسیع اساسی N گوییم اگر برای هر زیرمدول ناصفر مانند K از M، $M \cap N \neq 0$ و به صورت $N \leq_e M$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۱.۱.۱. فرض کنیم K و L و N زیرمدول‌هایی از M_R باشند و $N \leq_e K$. در این صورت اگر $K \oplus L \leq_e M_R$، آن‌گاه $N \oplus L \leq_e M_R$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $N \oplus L \leq_e K \oplus L$. فرض کنید $0 \neq k + l \in K \oplus L$. بنابراین

$$\exists\, r \in R \quad s.t \quad 0 \neq kr \in N \Longrightarrow 0 \neq (k+l)r = kr + lr \in N \oplus L;$$

زیرا اگر $(k+l)r = 0$، آن‌گاه $kr + lr = 0$ و چون جمع مستقیم است، $kr = 0$ که یک تناقض است. بنابراین $(k+l)r = 0$. در نتیجه $N \oplus L \leq_e K \oplus L \leq_e M_R$. حال طبق گزاره‌ی (۱۶.۵) از مرجع [1]، $N \oplus L \leq_e M_R$. $\square$

گزاره ۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I و J ایدآل‌هایی دو طرفه از آن باشند که $I \subseteq J$. در این صورت اگر $\frac{J}{I} \leq_e \frac{R}{I}$، آن‌گاه $J \leq_e R$.

اثبات. فرض کنید $0 \neq r \in R$. بنابراین $r + I \in \frac{R}{I}$. اگر $r \in I$، آن‌گاه چون I یک ایدآل دو طرفه از R است، برای هر $r_1 \in R$، $rr_1 \in I$ و چون $I \subseteq J$ پس $rr_1 \in J$. حال قرار می‌دهیم $r_1 = 1$ و چون $r \neq 0$، $J \leq_e R$. اگر $r \notin I$، آن‌گاه $r + I \neq 0$ و از این‌رو

$$\exists r_1 + I \in \frac{R}{I} \quad s.t \quad 0 \neq (r+I)(r_1+I) = rr_1 + I \in \frac{J}{I}.$$

در نتیجه $0 \neq rr_1 \in J$ و $rr_1 \notin I$؛ زیرا اگر $rr_1 = 0$، آن‌گاه $rr_1 \in I$ که تناقض است. پس $J \leq_e R$.

$\square$

تعریف ۲.۱.۱. N زیرمدول تماماً پایای M است اگر به ازای هر R-هم‌ریختی مانند $f : M \longrightarrow M$، $f(N) \leq N$ و به صورت $N \trianglelefteq M$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. N یک زیرمدول اساسی تماماً پایا از M است اگر N زیرمدولی اساسی و تماماً پایا از M باشد و به صورت $N \trianglelefteq_e M$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۳.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول راست و $I \lhd R$ و $MI = 0$. در این صورت

(i) $N \trianglelefteq M_R \Longleftrightarrow N \trianglelefteq M_{R/I}$.

(ii) $N \leq_e M_R \Longleftrightarrow N \leq_e M_{R/I}$.

اثبات. (i) فرض کنید $N \trianglelefteq M_{R/I}$. چون $MI = 0$، M یک R/I-مدول راست با ضرب زیر است:

$$m(r+I) = mr.$$

بنابراین اگر $f : M \longrightarrow M$ یک R-هم‌ریختی باشد، طبق ضرب بالا

$$f(m(r+I)) = f(mr) = f(m)r = f(m)(r+I).$$

پس f، R/I-هم‌ریختی هم هست و بنابراین $f(N) \leq N$. قسمت عکس هم به طور مشابه اثبات می شود.

(ii) فرض کنیم $N \leq_e M_R$. بنابراین

$$\forall 0 \neq m \in M \quad \exists r \in R \quad s.t \quad 0 \neq mr \in M.$$

چون M با ضرب گفته شده در قسمت قبل R/I-مدول است، به ازای همین r

$$0 \neq mr = m(r+I) \Longrightarrow N \leq_e M_{R/I}.$$

عکس قضیه هم به طور مشابه اثبات می‌شود. $\square$

گزاره ۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I ایدآلی از آن باشد. در این صورت $I \trianglelefteq R_R$.

اثبات. فرض کنید $f : R \longrightarrow R$ یک R-هم‌ریختی باشد. نشان می‌دهیم $f(I) \subseteq I$. فرض کنید $a \in I$. داریم:

$$f(a) = f(1 \cdot a) = f(1) \cdot a \subseteq RI \subseteq I.$$

$\square$

تعریف ۴.۱.۱. ایدآل سره P در حلقه‌ی R اول نامیده می‌شود هرگاه برای هر $I, J \trianglelefteq R$ و $IJ \subseteq P$ نتیجه بدهد که $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

تعریف ۵.۱.۱. حلقه‌ی R اول است هرگاه (0) در آن یک ایدآل اول باشد.

تعریف ۶.۱.۱. M مدول $\mathcal{L}_2$-نوتری نامیده می‌شود اگر همه‌ی زیرمدول‌های کاملاًپایایش را به طور متناهی تولید کند و در شرط زنجیر صعودی روی آن‌ها صدق کند.

تعریف ۷.۱.۱. P یک زیرمدول $\mathcal{L}_2$-اول از M نامیده می‌شود اگر برای هر $W_1, W_2 \trianglelefteq M$، شرط $W_1 \star W_2 \subseteq P$ نتیجه بدهد که $W_1 \subseteq P$ یا $W_2 \subseteq P$ که در آن $W_1 \star W_2 = Hom_R(M, W_1)W_2$.

تعریف ۸.۱.۱. مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های $\mathcal{L}_2$-اول از یک مدول مانند M با $Spec_2(M)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱. مدول M، $\mathcal{L}_2$-اول نامیده می‌شود هرگاه زیرمدول (0) در آن $\mathcal{L}_2$-اول باشد.

گزاره ۵.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول راست و P یک زیرمدول $\mathcal{L}_2$-اول تماماً پایای سره از آن باشد. در این صورت $ann_R(M/P)$ یک ایدآل اول از R است.

اثبات. فرض کنیم $AB \subseteq ann_R(M/P)$. در نتیجه $MAB \subseteq P$. قرار می‌دهیم $W_1 = MA$ و $W_2 = MA$. فرض کنیم $f \in Hom_R(M, W_1)$. در نتیجه $f(M) \subseteq W_1$ و داریم:

$$f(W_2) = f(MB) = f(M)B \subseteq W_1B = MAB \subseteq P.$$

بنابراین $Hom(M, W_1)W_2 \subseteq P$. در نتیجه $W_1 \subseteq P$ یا $W_2 \subseteq P$ و بنابراین $MA \subseteq P$ یا $MB \subseteq P$ و در نهایت $A \subseteq ann_R(M/P)$ یا $B \subseteq ann_R(M/P)$. □

گزاره ۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی اول و I ایدآلی ناصفر از آن باشد. در این صورت $I \leq_e R_R$.

اثبات. فرض کنید $0 \neq r \in R$. چون I ناصفر است، فرض کنید $0 \neq a \in I$. چون I یک ایدآل دوطرفه از R است، $0 \neq Ra \subseteq I$. حال زیرمجموعه‌ی rRa از I را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم rRa مخالف صفر است. زیرا اگر $rRa = 0$، آن‌گاه $RrR \cdot RaR = 0$. در نتیجه $RrR = 0$ یا $RaR = 0$. بنابراین $r = 0$ یا $a = 0$ که تناقض است. در نتیجه $r' \in R$ وجود دارد به طوری‌که $0 \neq rr'a \in I$.

□

گزاره ۷.۱.۱. فرض کنید M_R یک مدول $\mathcal{L}_2$-اول باشد و $I = ann_R(M)$. در این صورت $M_{R/I}$ هم $\mathcal{L}_2$-اول است.

اثبات. فرض کنید $W_1, W_2 \trianglelefteq M_{R/I}$ و $W_1 \star W_2 = 0$ که $W_1 \star W_2 = Hom_{R/I}(M, W_1)W_2$. هم‌چنین فرض کنید $f : M \longrightarrow W_1$ یک R/I-هم‌ریختی باشد. در نتیجه $f(W_2) = 0$. حال M و W_1 با ضرب‌های زیر R-مدول هستند:

$$\forall m \in M \ \ , \ \ r \in R \quad m \cdot r = m \cdot (r + I).$$

$$\forall w_1 \in W_1 \ \ , \ \ r \in R \quad w_1 \cdot r = w_1 \cdot (r + I).$$

در نتیجه

$$f(mr) = f(m(r + I)) = f(m)(r + I) = f(m)r.$$

بنابراین f یک R-هم‌ریختی است و در نتیجه $W_1 = 0$ یا $W_2 = 0$. $\square$

تعریف ۱۰.۱.۱. R-مدول راست M، جمع شدنی نامیده می‌شود اگر برای هر $0 \neq N \leq M_R$، $Hom_R(M, N) \neq 0$.

تعریف ۱۱.۱.۱. R-مدول راست M، تحت درون‌ریختی‌هایش اول نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $0 \neq N \trianglelefteq M_R$ و $f \in End_R(M)$، اگر $fN = 0$، آن‌گاه $f = 0$.

گزاره ۸.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول راست جمع شدنی باشد که تحت درون‌ریختی‌هایش اول

است. در این صورت M_R یک مدول $\mathcal{L}_2$-اول است.

اثبات. فرض کنیم $W_1, W_2 \trianglelefteq M_R$ و $W_1 \star W_2 = 0$ که در آن $W_1 \star W_2 = Hom_R(M, W_1)W_2$. فرض کنیم $W_1 \neq 0$. بنابراین طبق فرض $Hom_R(M, W_1) \neq 0$ و در نتیجه

$$\exists 0 \neq f \in Hom_R(M, W_1) \Longrightarrow f \in End_R(M), f(W_2) = 0.$$

اگر $W_2 \neq 0$، چون $f(W_2) = 0$، نتیجه می‌گیریم $f = 0$ که تناقض است. بنابراین $W_2 = 0$.

□

گزاره ۹.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول راست و I یک ایدآل دوطرفه از R باشد که $MI = 0$. در این صورت P یک زیرمدول $\mathcal{L}_2$-اول تماماً پایای سره از M_R است اگر و تنها اگر P یک زیرمدول $\mathcal{L}_2$-اول تماماً پایای سره از $M_{R/I}$ باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنیم P یک زیرمدول $\mathcal{L}_2$-اول تماماً پایای سره از M_R باشد. طبق (۳.۱.۱) ، P یک زیرمدول تماماً پایا از $M_{R/I}$ است. حال فرض کنیم $W_1, W_2 \trianglelefteq M_{R/I}$ و $W_1 \star W_2 \subseteq P$ که $W_1 \star W_2 = Hom_R(M, W_1)W_2$. در نتیجه طبق (۳.۱.۱) ، $W_1, W_2 \trianglelefteq M_R$ و بنابراین $W_1 \subseteq P$ یا $W_2 \subseteq P$. قسمت عکس نیز به طور مشابه اثبات می‌شود. □

گزاره ۱۰.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول راست و P یک زیرمدول $\mathcal{L}_2$-اول تماماً پایای سره و N یک زیرمدول از آن باشد. همچنین فرض کنید I یک ایدآل دوطرفه از R باشد که $MI = 0$ و

$J = ann_R(M/P)$ و $T = \dfrac{R/I}{ann_{R/I}(M/P)}$. در این صورت:

$$ann_{R/J}(M/N) \leq_e (R/J)_{R/J} \Longleftrightarrow ann_T(M/N) \leq_e (T)_T.$$

اثبات. فرض کنیم $ann_{R/J}(M/N) \leq_e (R/J)_{R/J}$. ابتدا توجه می‌کنیم که چون $MI = 0$، M، R/I-مدول راست است و در نتیجه P طبق (۹.۱.۱) یک زیرمدول $\mathcal{L}_2$-اول سره‌ی تماماً پایا از $M_{R/I}$ است. حال فرض کنیم

$$0 \neq (r+I) + ann_{R/I}(M/P) \in T.$$

در این صورت $r + J \neq 0$؛ زیرا اگر $r + J = 0$، آن‌گاه

$$\frac{M}{P}r = 0 \Longrightarrow \frac{M}{P}(r+I) = 0$$

$$\Longrightarrow r + I \in ann_{R/I}(M/P)$$

که با فرض تناقض دارد و بنابراین $r+J\neq 0$. حال طبق فرض $r_1+J\in \dfrac{R}{J}$ وجود دارد به طوری‌که

$$0\neq (r+J)(r_1+J)\in ann_{R/J}(M/N)\Longrightarrow 0\neq rr_1+J\in ann_{R/J}(M/N)*$$

$$\Longrightarrow (rr_1+I)+ann_{R/I}(M/P)\in ann_T(M/N).$$

هم‌چنین $(rr_1+I)+ann_{R/I}(M/P)$ برابر صفر نیست؛ زیرا اگر برابر صفر باشد، داریم:

$$(\frac{M}{P})(rr_1+I)=0\Longrightarrow (\frac{M}{P})rr_1=0\Longrightarrow rr_1\in ann_R(M/P)$$

که با $*$ تناقض دارد. در نتیجه

$$0\neq (r+I)(r_1+I)+ann_{R/I}(M/P)\in ann_T(M/N).$$

قسمت عکس نیز به طور کاملاً مشابه اثبات می‌شود. $\square$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید M یک R-مدول راست و N یک زیرمدول از آن باشد. بزرگ‌ترین زیرمدول از M را که اشتراکش با N برابر با صفر باشد، M-متمم N می‌نامند.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید F و G دو تابعگون همورد (پاد همورد) از رسته‌ی C به رسته‌ی D باشند. در این صورت، تبدیل طبیعی از C به D، تابعی مانند σ از شی‌های C به ریختارهای D است که به هر شی از C مثل A، ریختار $\sigma(A):F(A)\longrightarrow G(A)$ از D را نسبت می‌دهد با این ویژگی که به ازای هر

ریختار از C مثل $f : A \longrightarrow B$، نمودار

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\sigma(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\sigma(B)]{} & G(B) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} F(B) & \xrightarrow{\sigma(B)} & G(B) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(A) & \xrightarrow[\sigma(A)]{} & G(A) \end{array}\right)$$

جابه‌جایی باشد. حال اگر به ازای هر شی از C مثل A، $\sigma(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$ تابعی دوسویی باشد، آن‌گاه تبدیل طبیعی σ را یک‌ریختی طبیعی از C به D می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۴. دو حلقه مانند R و S هم‌ارز موریتا هستند اگر رسته‌ی R-مدول‌ها با رسته‌ی S-مدول ها یک‌ریخت باشد.

تعریف ۱.۱.۱۵. ویژگی‌هایی را که تحت هم‌ارزی موریتا حفظ می‌شوند، ویژگی‌های پایای موریتا می نامند.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید M یک R-مدول راست باشد. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$Z(M) = \{m \in M \mid ann_R(m) \leq_e R_R\}.$$

M را منفرد می‌نامند اگر $Z(M) = M$. هم‌چنین M را نامنفرد می‌نامند هرگاه $Z(M) = 0$.

گزاره ۱.۱.۱۱. فرض کنید $f : M_R \longrightarrow N_R$ یک R-هم‌ریختی یک به یک اساسی باشد. در این صورت $\frac{N}{Imf}$ یک مدول منفرد است.

اثبات. باید نشان دهیم $Z(N/Imf) = N/Imf$ که در آن

$$Z(N/Imf) = \{n + Imf \in N/Imf \mid ann_R(n + Imf) \leq_e R_R\}.$$

واضح است که $Z(N/Imf) \subseteq N/Imf$. نشان می‌دهیم $N/Imf \subseteq Z(N/Imf)$. پس باید برای هر $0 \neq n + Imf \in N/Imf$ نشان دهیم $ann_R(n + Imf) \leq_e R_R$. فرض کنیم $0 \neq r \in R$. چون $n \in N$، $nr \in N$. اگر $nr \neq 0$، چون $Imf \leq_e N$،

$$\exists r' \in R \quad s.t \quad 0 \neq nrr' \in Imf* \quad \Longrightarrow rr' \neq 0;$$

زیرا اگر $rr' = 0$ آن‌گاه $nrr' = 0$ که با $*$ تناقض دارد. پس $rr' \in ann_R(n + Imf)$. حال فرض کنیم $nr = 0$. پس $r \in ann_R(n + Imf)$ و در نتیجه $ann_R(n + Imf) \leq_e R_R$. بنابراین $N/Imf \subseteq Z(N/Imf)$. □

گزاره ۱.۱.۱۲. فرض کنید M_R یک مدول منفرد باشد. در این صورت $M^{(n)}$ نیز منفرد است.

اثبات. نشان می‌دهیم حکم برای $n = 2$ برقرار است. سپس با استقرای ریاضی حکم کلی نیز برقرار

است. پس باید نشان دهیم $Z(M \oplus M) = M \oplus M$ که در آن

$$Z(M \oplus M) = \{m_1 + m_2 \in M \oplus M \mid ann_R(m_1 + m_2) \leq_e R_R\}.$$

واضح است که $Z(M \oplus M) \subseteq M \oplus M$. پس نشان می‌دهیم $M \oplus M \subseteq Z(M \oplus M)$. فرض کنید $(x, y) \in M \oplus M$. باید نشان دهیم $ann_R(x, y) \leq_e R_R$. فرض کنید $0 \neq r \in R$. طبق فرض $ann_R(x), ann_R(y) \leq_e R_R$ و در نتیجه

$$\exists \ r_1, r_2 \in R \quad s.t \quad 0 \neq rr_1 \in ann_R(x), 0 \neq rr_1r_2 \in ann_R(y).$$

هم‌چنین $rr_1r_2 \in ann_R(x)$ و بنابراین $rr_1r_2 \in ann_R(x, y)$. □

گزاره ۱.۱.۱۳. فرض کنید M_R یک مدول منفرد باشد و $M = N \oplus K$. در این صورت N نیز یک مدول منفرد است.

اثبات. باید نشان دهیم $Z(N) = N$ که در آن $Z(N) = \{n \in N \mid ann_R(n) \leq_e R_R\}$. واضح است که $Z(N) \subseteq N$. پس نشان می‌دهیم $N \subseteq Z(N)$. فرض کنیم $x \in N$. باید نشان دهیم

$ann_R(x) \leq_e R_R$. فرض کنیم $0 \neq r \in R$. در نتیجه $x + 0 \in N \oplus K = M$ و بنابراین طبق فرض

$$ann_R(x,0) \leq_e R_R \Longrightarrow \exists r' \in R \quad s.t \quad 0 \neq rr' \in ann_R(x,0)$$

$$\Longrightarrow (x,0)rr' = (0,0)$$

$$\Longrightarrow xrr' = 0$$

$$\Longrightarrow rr' \in ann_R(x).$$

$\square$

گزاره ۱۴.۱.۱. اگر R/I یک R-مدول منفرد باشد در این صورت $I \leq_e R_R$.

اثبات. فرض کنیم $0 \neq r \in R$. پس $r + I \in R/I = Z(R/I)$ و در نتیجه $ann_R(r+I) \leq_e R_R$. قرار می‌دهیم $r = 1$. در نتیجه $1 + I \in R/I$ و $ann_R(1+I) \leq_e R_R$. بنابراین

$$\exists r' \in R \quad s.t \quad 0 \neq rr' \in an_R(1+I) \Longrightarrow rr'(1+I) = 0 \Longrightarrow rr' + I = 0$$

$$\Longrightarrow rr' \in I.$$

$\square$

تعریف ۱۷.۱.۱. حلقه‌ی R نیمه‌آرتینی راست گفته می‌شود اگر برای هر R-مدول ناصفر مانند M، $Soc(M_R) \neq 0$.