بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

حل عددی معادلات انتگرال به کمک موجک ها

استاد راهنما:

دکتر محمود محسنی مقدم

استاد مشاور:

دکترعظیم ریواز

مولف:

سمنبر حسینی

شهریور ماه ۱۳۹۰

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو:	سمنبر حسینی
استاد راهنما:	دکتر محمود محسنی مقدم
استاد مشاور:	دکتر عظیم ریواز
داور ۱:	دکتر محمد علی ولی
داور ۲:	دکتر محمد علی یعقوبی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکترسید ناصر حسینی

تقدیم به:

پدر بزرگوارم، مادر دلسوزم، خواهران و برادران عزیزم

که همواره مدیون محبت هایشان بوده و هستم.

تقدیر و تشکر

در ابتدا خدای مهربان را هزاران بار شاکرم که در مرحله ای دیگر از تحصیل، لطف خود را چون همیشه به من ارزانی داشت. او که تنها یاور من در فراز و نشیب زندگی بوده است.

او، که می بالم: به حضورش، به حس گرم حمایتش، به محبت هی بی شائبه اش و به قهاری حکیمانه اش...

مراتب تقدیر و سپاس نثار استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محسنی مقدم که مصاحبت و مشورت با ایشان را مایه فخر خویش می دانم و شاگردی درمکتبشان افتخاری است که به آن می بالم.

از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر ریواز به جهت را هنمایی بی شائبه ایشان قدردانی می کنم.

از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر ولی و جناب آقای دکتر یعقوبی که در طول تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد ازدانش و لطفشان بهر ها بردم و زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

برای هر رسیدنی مسیری است و پیمودن هر مسیر را هزار دریچه نا امیدی و صد ها بن بست که جز با همدلی و همدردی دوستانی همراه امکان پیمودن به آسانی میسر نیست. از تمامی دوستانی که در این مسیر به من یاری رساندند تقدیر و تشکر می کنم.

و در پایان از حمایتهای قطب جبرخطی و بهینه سازی دانشگاه شهید با هنر کرمان تشکر و قدر دانی می نمایم.

سمنبر حسینی

شهریور ماه ۹۰

چکیده

در این پایان نامه، حل معادلات انتگرال از نوع مختلف را به کمک موجک های هار و توابع ترکیبی شرح می دهیم. در پایان هر بخش نیز مثال های عددی ارائه شده اند که نمایتگر دقت و کارائی روش های مورد نظر می باشد.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال، موجک های هار ، توابع ترکیبی، انتگرال چند گانه، روش هم محلی، روش گالرکین .

پیش گفتار:

مطالب این پایان نامه بیشتر بر اساس مقاله های [۲۴، ۲۰، ۱۹، ۱۸، ۱۵، ۱۳، ۷، ۴، ۳] نوشته شده است. در فصل اول مطالبی در مورد معادلات انتگرال را بیان خواهیم کرد. در فصل دوم توابع متعامد یکه را معرفی خواهیم نمود و با استفاده از آنالیز چند ریزه ساز نحوه ساخت یک پایه بر اساس موجک هار را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. فصل سوم را به معرفی روش های تصویری مانند هم محلی و گالرکین برای حل معادلات انتگرال اختصاص داده ایم. در فصل های چهارم و پنجم با استفاده از موجک های هار و توابع ترکیبی نحوه ی حل معادلات انتگرال خطی و غیر خطی را توضیح خواهیم داد. در ادامه عملگر انتگرال گیری را معرفی و با استفاده از آن معادله انتگرال را حل خواهیم کرد.

سرانجام در فصل آخر انتگرال های چند گانه با حدود ثابت و متغیر را با استفاده از موجک های هار و توابع ترکیبی حل کرده و با ذکر مثال هایی کارایی و دقت روش پیشنهاد شده را نشان می دهیم.

فهرست مطالب

[1] $Haar$

فصل ۱

مفاهیم اولیه معادلات انتگرال

۱.۱ مقدمه

دراین فصل ابتدا مختصری از تاریخچه معادلات انتگرال بیان می شود، سپس در بخش دوم تعاریف و دسته بندی معادلات انتگرال را بیان می کنیم. در بخش های بعدی تعاریف و مثال هایی از این دسته بندی آورده می شود. در بخش های۹ و۱۰ تبدیل معادله انتگرال -دیفرانسیل به معادلات انتگرال و بلعکس بیان می شود. سرانجام در بخش های آخر یکی از روشهای حل معادله انتگرال را به دلخواه انتخاب کرده و توضیح مختصری همراه با مثال آورده می شود.

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می شود. یکی از شاخه های علم ریاضی که کاربردهای فراوانی در مسائل هندسی، فیزیک، شیمی و غیره دارد، بحث معادلات انتگرال می باشد. معادلات انتگرال درخیلی از محاسبات بیولوژی هم ظاهر می گردند. کاربردهای فراوان این قبیل از معادلات

باعث شده است که افراد زیادی را بسوی خود جذب کرده تا بررسی روش های مختلف حل این معادلات را تجربه کنند.

ارتباط تنگاتنگی بین معادلات انتگرال و مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی وجود دارد که نقطه عطفی برای آن دسته از معادلات دیفرانسیل که حل آنها از روش معمول مشکل تر است شده که با تبدیل به معادله انتگرال، می توان آنها را حل نمود. در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرال تلقی می شد، لیکن نام معادله انتگرال اولین بار در سال ۱۸۸۸ توسط دانشمند آلمانی به نام بویس ریموند[1] بر روی معادلاتی که تابع مجهول تحت یک یا چند علامت انتگرال ظاهر می شوند، نهاد شده است. البته پیش از وی در سال ۱۷۸۲ لاپلاس[2] تبدیل انتگرالی $\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx$ را در حل معادلات انتگرال تفاضلی و معادلات دیفرانسیلی به کار برد. بدین ترتیب لاپلاس آغاز کننده ی مطالعه بر روی نظریه معادلات انتگرال بوده است.

در جریان تکامل وپیشرفت ریاضیات در سال ۱۸۱۱ فوریه[3] با استفاده از سری های مثلثاتی در حل مسئله انتقال گرما به نتایجی در رابطه با معادلات انتگرال دست یافت. در سال ۱۸۲۰ روی نظریه حرارت کار کرد و تبدیلات فوریه را مطرح کرد که پیدا کردن معکوس تبدیلات فوریه به حل معادلات انتگرال منجر شد. سپس آبل[4] در سال ۱۸۲۳ ضمن مطالعه مسائل فیزیک، هنگام بررسی کردن حرکت یک ذره که به سمت پایین در طول یک منحنی هموار نامعلوم در یک صفحه قائم، تحت نیروی جاذبه حرکت نمود، به معادله $f(x) = \int_a^t \frac{y(s)}{(x-s)^{\alpha}} dx$ بر خورد کرد. که در اینجا $f(x)$ تابعی پیوسته و معلوم می باشد، $0 < a < 1 , f(a) = 0$ و $y(s)$ تابعی مجهول است.

برای $\alpha = 1/2$، معادله انتگرالی آبل متناظر با مسئله مشهور کوتاه ترین زمان است، که برای اولین بار همزمان توسط هوینگس[5] حل شد. در آن مسئله تعین مسیر حرکت یک ذره، که روی منحنی با یک نقطه انتهای داده شده و مستقل از وضعیت اولیه، تحت تاثیر نیروی ثقل در بازه ای از زمان به نرمی حرکت می کند، مدنظر بود.

[1] $Boise - Reymond$
[2] $Laplace$
[3] $Fourier$
[4] $Abel$
[5] $Hoygnes$

در همان سال پواسن [6] در نظریه مغناطیسی خود نوعی معادله انتگرال به صورت

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)g(y)dx$$

را مطرح نمود، وی با بسط $g(x)$ به یک سری توانی با پارامتر λ موفق به حل این معادله شد. البته همگرایی این سری بعدها در سال ۱۸۳۷ توسط لیوویل [7] نشان داده شد. لیوویل در حل برخی از معادلات دیفراسیل به کمک معادله انتگرالی فعالیت زیادی داشته است ، در سال ۱۸۲۳ لیوویل بدون آگاهی از کار آبل، معادله انتگرالی به نام خودش در مسئله ی جاذبه از یک شمش با طول متناهی معرفی کرد. وی درسال ۱۸۳۷ بحثی پیرامون رابطه ی معادله دیفرانسیل و معادله انتگرال را مطرح نمود و نشان داد که جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل معین به وسیله ی یک معادله انتگرال داده می شود. در سال ۱۸۷۰ نویمن [8] جواب مسئله دیریکله یعنی تابع φ که دارای مقدار مشخصی روی مرز ناحیه s می باشد و در درون s در معادله لاپلاس $\Delta^2\varphi = 0$ ، صدق می کند را به صورت جوابی از یک معادله انتگرال نشان داد و مسئله دیریکله را به یک معادله انتگرال تبدیل کرد. وی معادله انتگرال را به صورت بسطی از توان های پارامتری معین λحل کرد، که این شبیه روالی بود که پیش از آن توسط پواسن و لیوویل استفاده شده بود. در سال ۱۸۹۶ پوانکاره [9] معادله انتگرال

$$u(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)u(y)dy = f(x)$$

که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی $\bigtriangledown^2 u + \lambda = f(x,y)$, می باشد بدست آورد.

در همان سال ویتو ولترا [10] ، ریاضیدان ایتالیایی ، با وارد کردن متغیر x به عنوان حد بالایی انتگرال، یک رده مهمی از معادلات انتگرال را ایجاد نمود، که به نام وی نام گذاری شده است. لذا ولترا برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرالی رامطرح نمود. صورت کلی معادله ولترا به صورت زیر است.

[6] $Poisson$
[7] $Liouville$
[8] $Noeiman$
[9] $H.Poincare$
[10] $Volterra$

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$$

در حدود سال های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳ معادلات انتگرال به صورت

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt,$$

توسط ریاضیدان سوئدی به نام فردهلم [۱۱] مطالعه و قضایایی در این رابطه بیان شد.

ولترا و لیروکس [۱۲] اولین کسانی بودند که قضایای وجود و یکتایی جواب را برای رده های عمومی معادلات انتگرال ثابت کردند. البته این روش ها خیلی شبیه هم بودند ولیکن کار ولترا بیشتر مورد توجه قرار گرفت. ارائه سمیناری توسط اریک هولمگر در سال ۱۹۰۱ روی کارهای فردهلم علاقه هیلبرت را به تحقیق روی معادلات انتگرال بر انگیخت. سپس هیلبرت تحقیقاتی در این زمینه انجام داد و برای اولین بار اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال به کار می رود، توسط وی پیشنهاد شد. معادله انتگرال در علومی چون : فیزیک، مکانیک، ارتعاش، آمار و احتمال، رشد جمعیت ، مهندسی ، ارتباطات ، پتروشمی ، ساختمان و پل سازی، اشعه لیزر، نیروگاه هسته ای، رآکتورها و غیره، کاربرد دارد. روی هم رفته معادلات دیفرانسیل تاکنون جهان فیزیکی را بخوبی توصیف کرده اند(شبیه معادلات موج و انتشار گرما و غیره) و لیکن همواره لزوم معادلات انتگرال احساس می شود. معادلات انتگرال در مقایسه با معادلات دیفرانسیل دارای مبدأ جدید تری می باشند، به نحوی که بیشترین گسترش آن در قرن حاضر بوده است. هر چند ملا حظه می شود که بسیاری از حالات خاص در قرن نوزدهم نیز مورد بحث قرار گرفته بوده است.

---

[۱۱] $Fredholm$
[۱۲] $Lirox$

روش های کلاسیک و عددی بسیاری برای حل معادلات انتگرال ارائه شده است، در حالت کلی بسیاری از معادلات انتگرال قابل حل به روش هایی تحلیلی نیستند، لذا به کارگیری روشهای عددی جهت حل معادلات انتگرال از اهمیت بسزایی بر خوردار است از جمله این روشها پایه های متعامد را می توان نام برد که در طی فصل های بعدی به آن می پردازیم.

۳.۱ تعاریف کلی و دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۱.۳.۱. معادله ای که تابع مجهول آن ، زیر علامت انتگرال ظاهر شود ، معادله انتگرال نامیده می شود. صورت کلی این معادلات چنین است:

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)F(u(t))dt. \qquad (۱.۱)$$

در این معادله λ پارامترمعلوم، $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ ، $\varphi(x)$ ، $f(x)$ ، F ، توابعی معلوم ،$u(x)$، تابع مجهول، و $k(x,t)$ تابعی معلوم بر حسب x و t است .

هدف از حل معادله انتگرال، به دست آوردن $u(x)$ است به طوری که در معادله (۱ . ۱)صدق کند. اگر در معادله (۱ . ۱) ,$F(u(t))$ بر حسب $u(x)$ خطی یا غیر خطی باشد ، معادله انتگرال را به ترتیب خطی یا غیر خطی می نامیم و چنانچه در این معادله $f(x) = ۰$ باشد، معادله انتگرال را همگن و در غیر این صورت نا همگن می گوییم.

$k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود، که می توان آن را به دو دسته جدایی پذیر و جدایی ناپذیر تقسیم کرد.

تعریف ۲.۳.۱. هسته $k(x,t)$ را جدایی پذیر یا تبهگن گویند هر گاه بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t),$$

که درآن توابع $g_1(x),...,g_n(x)$ و توابع $h_1(t),...,h_n(t)$ به ترتیب توابعی مستقل بر حسب x و t هستند.

مثال ۱.۳.۳. تابع $k(x,t)=x^2-3xt+t^2$ جدایی پذیر است. زیرا آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$k(x,t)=x^2-3xt+t^2=\sum_{k=1}^{3} g_k(x)h_k(t)$$

که در آن داریم:

$$g_1(x)=x^2,\;\; g_2(x)=-3x,\;\; g_3(x)=1,$$

$$h_1(t)=1,\;\; h_2(t)=t,\;\; h_3(t)=t^2.$$

۴.۱ تقسیم بندی معادلات انتگرال

دسته بندی های متفاوتی برای معادلات انتگرال وجود دارد. یکی از این دسته بندی ها بر اساس حدود انتگرال است. متداول ترین معادلات انتگرال را می توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته بندی نمود. ولی ما در این پایان نامه تقسیم بندی زیر را برای معادلات انتگرال در نظر می گیریم،

۱- معادلات انتگرال فردهلم

۲- معادلات انتگرال ولترا

۳- معادلات انتگرال منفرد[۱۳]

۴- معادلات انتگرال - دیفرانسیل

در بخش های بعد، هر کدا م از انواع معادلات فوق به اختصار توضیح داده شده اند.

۵.۱ معادلات انتگرال فردهلم

اگر حدود انتگرال در یک معادله انتگرال اعدادی ثابت باشند، معادله را معادله انتگرال فردهلم گویند. شکل کلی این معادله به صورت زیر است:

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(u(t))dt. \qquad (۲.۱)$$

در معادله بالا a, b و λ اعدادی معلوم ، $\varphi(x)$ ، $f(x)$ ، $k(x,t)$ توابعی معلوم، $F(u(t))$ تابعی بر حسب $u(x)$ و $u(x)$ تابعی مجهول می باشد. بر حسب اینکه $\varphi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم به دو دسته عمده تقسیم می شوند:

[۱۳] *Singular integral equations*

۱- زمانیکه $\varphi(x) = ۰$ معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر تبدیل می شود:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(u(t))dt = ۰,$$

که به آن معادله انتگرال فرد هلم نوع اول می گوییم.

معمولا" تابع جواب در این نوع معادلات به تابع $f(x)$ خیلی حساس است، بدین معنی که تغییر جزیی در $f(x)$ باعث تغیرات زیاد در تابع جواب می شود. به عبارت دیگر این نوع مسائل بد وضع هستند که روش های خاصی برای پیدا نمودن جواب آن ها مورد نیاز است [۱].

۲- زمانیکه $\varphi(x) = ۱$ معادله انتگرال فردهلم به صورت زیر تبدیل می شود:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(u(t))dt,$$

که به آن معادله انتگرال فرد هلم نوع دوم می گوییم.

قضیه ۱.۵.۱. اگر هسته $k(x,t)$ حقیقی و پیوسته روی مربع $a \leqslant t \leqslant b, a \leqslant x \leqslant b$ کراندار باشد: یعنی اگر داشته باشیم

$$|k(x,t)| \leqslant M, a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant t \leqslant b,$$

و همچنین $f(x)$ در فاصله $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته و غیر صفر باشد، آنگاه شرط کافی برای آنکه معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم غیر همگن جواب منحصر به فرد داشته باشد، آن است که [۹]:

$$|\lambda| < \frac{۱}{M(b-a)}. \qquad (۳.۱)$$

البته بایستی به این نکته مهم توجه کرد که یک جواب پیوسته برای معادله انتگرال فردهلم حتی اگر شرط (۱۰۳) برقرار نباشد ، می تواند وجود داشته باشد،

مثال ۲.۵.۱. معادله انتگرال فرد هلم زیر را در نظر بگیرید

$$u(x) = -۴ + \int_{۰}^{۱} (۲x + ۳t)u(t)dt,$$

داریم:

$$(b-a) = ۱, \lambda = ۱, |k(x.t)| \leqslant ۵,$$

لذا

$$۱ = |\lambda| > \frac{۱}{M(b-a)} = \frac{۱}{۵}$$

ولی در حقیقت معادله دارای جواب حقیقی پیوسته به صورت $u(x) = ۴x$ می باشد، این جواب را می توان با جای گذاری مستقیم نشان داد.

تعریف ۳.۵.۱. تابع $u(x)$ یک تابع $\mathcal{L}_۲$ نامیده می شود، هر گاه داشته باشیم $\int_a^b |u(t)|^۲ dt < \infty,$ در اینصورت، $u(x)$ را (مربع انتگرال پذیر) گویند.

تعریف ٤.۵.۱. هسته $k(x,t)$ یک تابع $\mathcal{L}_۲-$ (مربع انتگرال پذیر) نامیده می شود، هر گاه شرط های زیر که به شرط منظم بودن شهرت دارد، با هم بر قرار باشند.

۱- برای هر مجموعه از مقادیر t و x در مربع $a \leqslant t \leqslant b$ و $a \leqslant x \leqslant b$ داشته باشیم:

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^۲ dx dt < \infty.$$