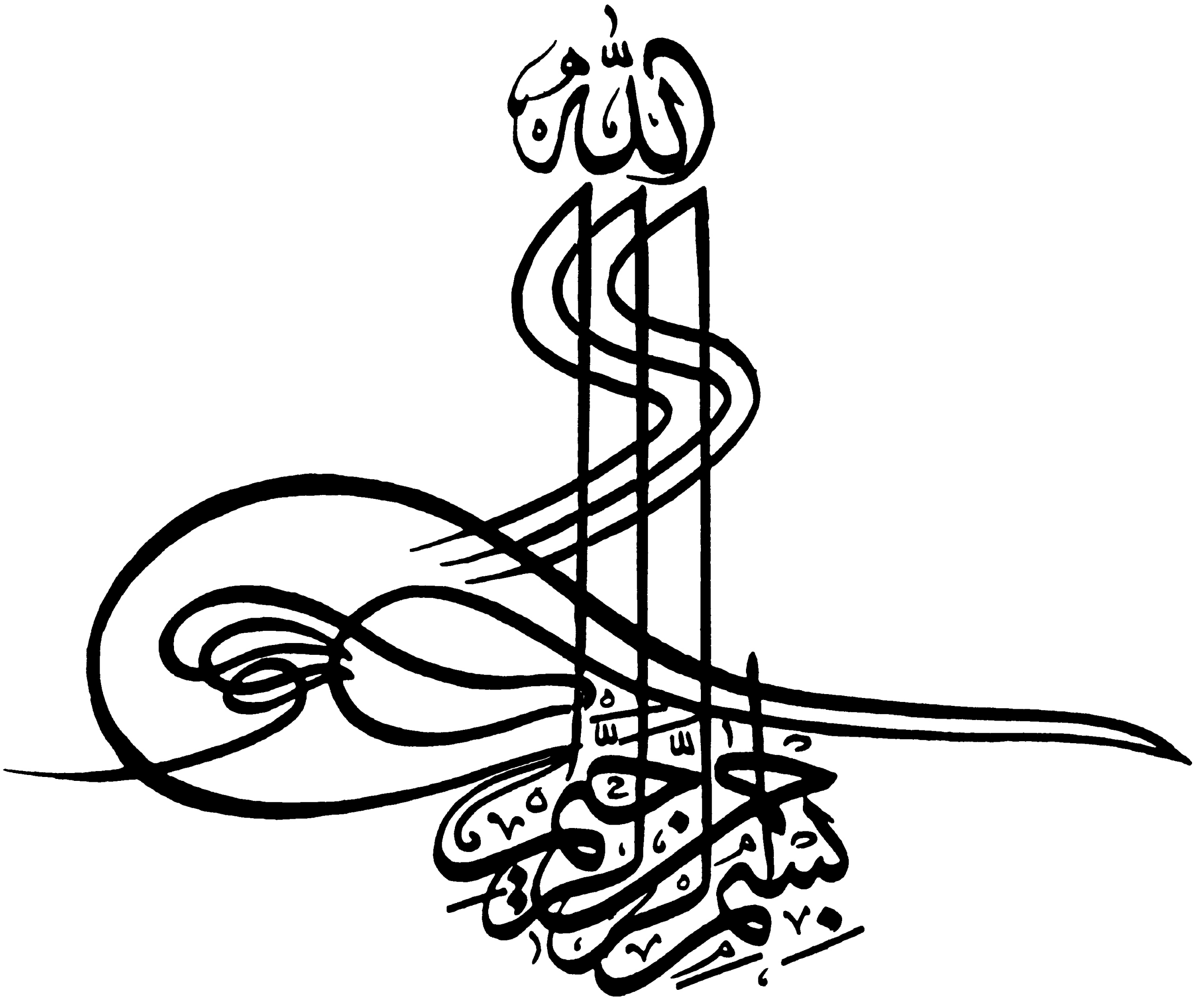
الله
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه قم
دانشکده علوم پایه
پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

بررسی قضایای نقطه ثابت مشترک در فضاهای متریک مخروطی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا باقری ثالث

نگارنده:

مهری ترابی

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به ساحت قدسی

پرده نشین عصر انتظار، حضرت صاحب الامر (عج)

و مادر بزرگوارشان حضرت زهرا (س)

سپاس گزاری

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و درهای علم را برما گشود و عمر و فرصتی عطا فرمود تا بدان بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگارم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند در آغاز وظیفه خود می دانم سپاس و تقدیر بی پایان خود را تقدیم استاد راهنمای ارجمندم آقای دکتر باقری ثالث نمایم و از زحمات بی دریغ ایشان صمیمانه قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این رساله به انجام نمی رسید. در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران محبت و عشق، پدر و مادر عزیزم که گاه روییدنم باران مهربانی بودند و گاه پروریدنم آغوشی گرم که بالنده ام ساخت و گرمای امید بخش وجودشان، در همه حال بهترین پشتیبان من بود. و بعد از خدا وجود مقدس شان را ستایش می کنم.

چکیده

با توجه به اینکه خواص پایه‌ای فضاهای متریک از اعمال جبری اعداد حقیقی بدست می‌آید، این ایده کاملاً طبیعی است که در فضاهای متریک به جای اینکه برد تابع متریک در $\mathbb{R}$ قرار گیرد در یک فضای برداری (و یا باناخ) قرار گیرد. این ایده برای اولین بار توسط هانگ و زانگ تحت عنوان فضاهای متریک مخروطی به طور رسمی مطرح گردید و پس از آن ریاضیدانان زیادی به آن علاقه نشان داده و مباحث مختلف مطرح شده در فضاهای متریک را در فضاهای متریک مخروطی مورد مطالعه قرار داده‌اند. هدف اصلی در این پایان نامه مطالعه نقاط ثابت مشترک درفضاهای متریک مخروطی می باشد. در این راستا ارتباط نقاط انطباق، توابع نوع کیلر-میر، نقاط متناوب و c-فاصله ها با نقاط ثابت مشترک توابع روی فضاهای متریک مخروطی بررسی می شود و نتایج جدیدی از قضایای نقطه ثابت به دست می آید.

کلمات کلیدی:

نقطه ثابت، نقطه انطباق، فضاهای متریک مخروطی، فضای گوی متریک مخروطی

فهرست مطالب

لیست نمادها

مخروط .... P
درون مخروط .... $intP$
نرم .... $\| . \|$
همسایگی به شعاع r .... N_r
قدرمطلق .... $||$
سوپریمم .... $\sup$
اینفیمم .... $\inf$
نقاط ثابت S .... $Fix(S)$
گوی متریک مخروطی .... β
تابع نوع کیلرمیر قوی‌تر .... ψ
اعداد حقیقی .... $\mathbb{R}$
اعداد حقیقی مثبت .... $\mathbb{R}^+$
اعداد طبیعی .... $\mathbb{N}$
مجموعه توابع پیوسته n بار مشتق پذیر .... C_R^n

مقدمه

پس از معرفی فضاهای متریک مخروطی و تعمیم قضیه نقطه ثابت باناخ توسط هانگ و زانگ مطالعات زیادی روی مخروط ها، فضاهای متریک مخروطی و خواص آن ها انجام شده است. یکی از زمینه های تحقیقاتی مطالعه روی نقاط ثابت نگاشت ها، روی فضاهای متریک مخروطی می باشد. در این پایان نامه به مطالعه نقاط ثابت مشترک در فضاهای متریک مخروطی پرداخته شده است.
این پایان نامه در ۵ فصل تنظیم شده است. در فصل اول به مقدمات و تعاریف مورد نیاز پرداخته شده است. در فصل دوم نتایجی در مورد نقاط انطباق و ارتباط آن ها با نقاط ثابت توابع بیان می گردد. درفصل سوم به توابع با شرط کیلر-میر قویتر توجه شده است و نقاط ثابت مشترک توابع روی این نوع فضاها بررسی شده است. در فصل چهارم به ارتباط نقاط انطباق و نقاط ثابت مشترک با قضایای نقاط متناوب پرداخته می شود. در این فصل قضایای نقطه ثابت برای نگاشت هایی که در خاصیت $(E.A)$ صدق می کنند و نیز جفت توابع دارای خاصیت AJو BC بررسی می شود. در فصل پنجم ارتباط مفهوم فاصله با قضایای نقطه ثابت مشترک مورد توجه قرار گرفته و با استفاده از این مفهوم قضایای نقطه ثابت مشترک جدیدی به دست می آید.
مطالب این پایان نامه ازمقالات زیر استخراج شده است،

1.Som coincidence point results in cone metric spaces.

2. common fixed point theorems for the stronger Meir-Keeler cone-type function cone ball-metricspaces.

3. coincidence and common fixed and periodic point theorems in cone

metric spaces.

4. Distance in cone metric spaces and common fixed point theorems.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

خلاصه

در این فصل به ارائه تعاریف و نمادهای مورد نیاز در فصل های بعدی کتاب می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم، E فضای باناخ حقیقی[۱] با عنصر صفر باشد. زیرمجموعه P از E را یک مخروط[۲] می‌نامیم هرگاه دارای شرایط زیر باشد:*

۱. *P بسته باشد، $P \neq \emptyset$ و $P \neq \{0\}$.*

۲. *اگر a, b اعداد حقیقی مثبت و x, y اعضایی از P باشند، آنگاه $ax + by$ عضوی از P باشد.*

۳. *اگر x عضوی از P و $-x$ نیز عضوی از P باشد آنگاه $x = 0$.*

تعریف ۲.۱.۱. *برای هر مخروط $P \subset E$ رابطه ترتیب $\leqslant$ روی E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*

$x \leqslant y$ اگر و تنها اگر $y - x \in P$ ($x < y$ اگر و تنها اگر $x \leqslant y$ و $x \neq y$)

[۱] Real Banach space

[۲] cone

و همچنین رابطه $\gg$ را روی E به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$x \ll y$ اگر و تنها اگر $y - x \in intP$.

تعریف ۳.۱.۱. مخروط P را نرمال[۳] گوییم اگر عدد $K > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in E$ داشته باشیم،

$$۰ \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leq K\|y\|.$$

کوچکترین عدد مثبت K که در شرایط بالا صدق کند را ثابت نرمال[۴] P می‌نامند.

با استفاده از مطالب گفته شده فضای متریک مخروطی[۵] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض می‌کنیم X یک مجموعه نا تهی و E فضای باناخ حقیقی با رابطه مرتب $\leqslant$ ایجاد شده توسط مخروط $P \subset E$ باشد. اگر نگاشت $d : X \times X \longrightarrow E$ در شرایط زیر صدق کند، آنگاه d یک متر مخروطی[۶] روی X و (X, d) یک فضای متریک مخروطی نامیده می‌شود.

۱. برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم: $۰ \leqslant d(x, y)$ و $d(x, y) = ۰ \iff x = y$

۲. برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم: $d(x, y) = d(y, x)$

۳. برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک مخروطی، $\{x_n\}$ دنباله ای در X و $x \in X$ باشد.

۱. اگر برای هر $c \in E$ با شرط $۰ \ll c$ عدد صحیح N وجود داشته باشد که برای هر $n > N$ داشته باشیم $d(x_n, x) \ll c$، آنگاه گوییم $\{x_n\}$ همگرا[۷] به x است و یا نقطه x حد $\{x_n\}$ است و این مطلب را به صورت $x_n \to x$ یا $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ نمایش می‌دهیم.

---

[۳] normal

[۴] normal constant

[۵] cone metric space

[۶] cone metric

[۷] convergent

۲. *اگر برای هر $c \in E$ با شرط $c \gg ۰$ عدد صحیح N وجود داشته باشد که برای هر $m,n > N$ داشته باشیم $d(x_n, x_m) \ll c$ آنگاه دنباله $\{x_n\}$ را یک دنباله کشی[۸] در X می‌نامیم.*

۳. *فضای متریک مخروطی (X, d) کامل[۹] نامیده می‌شود هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.*

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک مخروطی کامل و P یک مخروط نرمال با ثابت نرمال K باشد. همچنین نگاشت $f : X \longrightarrow X$ در شرط انقباضی صدق کند یعنی عدد $۰ \leqslant k < ۱$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(fx, fy) \leqslant kd(x, y)$. در این صورت f در X یک نقطه ثابت یکتا دارد.*

اثبات. یک $x_۰ \in X$ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم،

$$x_۱ = fx_۰, x_۲ = fx_۱ = f^۲x_۰ \cdots x_{n+۱} = fx_n = f^{n+۱}x_۰, \cdots$$

در نتیجه داریم،

$$\begin{aligned} d(x_{n+۱}, x_n) &= d(fx_n, fx_{n-۱}) \\ &\leqslant kd(x_n, x_{n-۱}) \\ &\leqslant k^۲d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) \\ &\leqslant ... \\ &\leqslant k^n d(x_۱, x_۰). \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $n > m$ داریم،

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leqslant d(x_n, x_{n-۱}) + d(x_{n-۱}, x_{n-۲}) + ... + d(x_{m+۱}, x_m) \\ &\leqslant (k^{n-۱} + k^{n-۲} + ... + k^m)d(x_۱, x_۰) \\ &\leqslant \frac{k^m}{۱-k} d(x_۱, x_۰). \end{aligned}$$

---

[۸] cauchy

[۹] complete

پس داریم،
$$\parallel d(x_n,x_m) \parallel \leqslant \frac{k^m}{1-k} K \parallel d(x_1,x_0) \parallel .$$
این نشان می‌دهد که هرگاه $n,m\to\infty$ آنگاه $d(x_n,x_m)\to 0$. پس $\{x_n\}$ یک دنباله کشی است و با توجه به کامل بودن X، عضو $x^*\in X$ وجود دارد به طوری که وقتی $n\to\infty$ داریم $x_n\to x^*$. در نتیجه
$$d(fx^*,x^*) \leq d(fx_n,fx^*)+d(fx_n,x^*) \leqslant kd(x_n,x^*)+d(x_{n+1},x^*),$$
و
$$\parallel d(fx^*,x^*) \parallel \leqslant K[k \parallel d(x_n,x^*) \parallel + \parallel d(x_{n+1},x^*) \parallel] \longrightarrow 0.$$
پس $\parallel d(fx^*,x^*) \parallel = 0$ و این نشان می‌دهد که $fx^*=x^*$ بنابراین x^* یک نقطه ثابت است. حال اگر y یک نقطه ثابت دیگری از f باشد خواهیم داشت
$d(x^*,y)=d(fx^*,fy)\leqslant kd(x^*,y)$ بنابراین $\parallel d(x^*,y) \parallel = 0$ و $x^*=y$ در نتیجه نقطه ثابت f یکتاست.

□

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنیم (X,d) فضای متریک مخروطی و $f,T:X\longrightarrow X$ دو نگاشت باشند. گوییم f,T یک نقطه انطباق در X دارند هرگاه یک نقطه $u\in X$ وجود داشته باشد به طوری که $fu=Tu$.*

تعریف ۷.۱.۱. *مخروط P را منظم[۱۰] گوییم هرگاه هر دنباله افزایشی که از بالا کران دار است همگرا باشد یعنی اگر $\{x_n\}$ دنباله ای به صورت $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant\ldots\leqslant y$ برای یک $y\in E$ باشد، آنگاه عضو $x\in E$ وجود داشته باشد به طوری که وقتی $n\to\infty$ داریم $\parallel x_n-x \parallel \longrightarrow 0$.*

تذکر ۱. ۱. *به راحتی دیده می‌شود مخروط P منظم است اگر و تنها اگر هر دنباله کاهشی که از پایین کران دار است همگرا باشد.*

۲. *هر مخروط منظم نرمال است.*
زیرا اگر فرض کنیم P یک مخروط منظم غیر نرمال باشد در این صورت برای

[۱۰] regular cone

هر $n \geq 1$، t_n, s_n را طوری انتخاب می‌کنیم که $t_n - s_n \in P$ و $\| s_n \| > n^2 \| t_n \|$ (چنین دنباله هایی را می‌توانیم انتخاب کنیم زیرا طبق فرض غیر نرمال بودن مخروط P برای هر $k > 0$، $x, y \in E$ وجود دارد به طوری که $0 \leqslant x \leqslant y$ و $\| x \| > k \| y \|$ در نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$ با قرار دادن $k = n^2$ خواهیم داشت عناصر s_n و t_n موجودند که $\| s_n \| > n^2 \| t_n \|$ و $s_n \leqslant t_n$). در این صورت برای هر $n \geq 1$ قرار می‌دهیم،

$$y_n = \frac{t_n}{\| t_n \|}, x_n = \frac{s_n}{\| t_n \|}.$$

پس برای هر $n \geq 1$ خواهیم داشت،

$$x_n, y_n, \in P, \| y_n \| = 1, n^2 < \| x_n \| .$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \| y_n \|$ همگرا و P بسته است پس یک عضو $y \in P$ وجود دارد به طوری که $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \| y_n \|$. حال توجه می‌کنیم که

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 \leqslant x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 + \frac{1}{3^2}x_3 \leqslant \cdots \leqslant y$$

بنابراین با توجه به منظم بودن P، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_2}x_n$ همگراست. در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \frac{\| x_n \|}{n^2} = 0$ که یک تناقض است.

مثال ۱.۱.۱. فرض کنیم $E = \mathbb{R}^2$ و $P = \{(x, y) \in E : x, y \geqslant 0\}$ و $X = \mathbb{R}$ و $d : X \times X \longrightarrow E$ نگاشت با ضابطه $d(x, y) = (| x - y |, \alpha | x - y |)$ باشد که در آن α یک عدد ثابت مثبت است. در این صورت (X, d) فضای متریک مخروطی و P یک مخروط منظم است. زیرا اگر $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ و $(a, b) \leqslant (c, d)$ آنگاه $(c, d) - (a, b) \in P$ و یا $b \leqslant d$ و $a \leqslant c$ بنابراین $\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant \sqrt{c^2 + d^2}$ و در نتیجه $\| (a, b) \| \leqslant \| (c, d) \|$.

مثال زیر یک فضای متریک مخروطی با مخروط غیر نرمال است.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنیم $E = C^1_R([0, 1])$ با نرم $\| f \| = \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty$ که در آن $\| f \|_\infty$ سوپریمم $| f |$ روی $[0, 1]$ می‌باشد و $P = \{f \in E, f \geqslant 0\}$ باشد. در این صورت P یک مخروط غیر نرمال است.

زیرا اگر برای هر $k \geq 1$ قرار دهیم $g(x) = x^{2k}$ و فرض کنیم $f(x) = x$ آنگاه،

$۰ \leqslant g \leqslant f$ و $\| f \| = ۲$ و $\| g \| = ۲k + ۱$ زیرا،

$$\begin{aligned}
\| f \| &= \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty \\
&= \sup_{۰ \leq x \leq ۱} | f(x) | + \sup_{۰ \leq x \leq ۱} | f'(x) | \\
&= \sup_{۰ \leq x \leq ۱} x + \sup_{۰ \leq x \leq ۱} ۱ \\
&= ۱ + ۱ \\
&= ۲,
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
\| g \| &= \| g \|_\infty + \| g' \|_\infty \\
&= \sup_{۰ \leq x \leq ۱} | g(x) | + \sup_{۰ \leq x \leq ۱} | g'(x) | \\
&= \sup_{۰ \leq x \leq ۱} | x^{۲k} | + \sup_{۰ \leq x \leq ۱} | ۲kx^{۲k۱} | \\
&= ۱ + ۲k.
\end{aligned}$$

بنابراین $k \| f \| < \| g \|$. در نتیجه k ثابت نرمال P نیست و P غیر نرمال است.

حال فرض کنیم $X = [۰, \infty)$، نگاشت $d : X \times X \longrightarrow E$ با ضابطه $d(x, y) = | x - y | f$ را طوری تعریف می‌کنیم که $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(t) = e^t$ باشد. در این صورت (X, d) یک فضای متریک مخروطی است.

تذکر ۲. توجه می کنیم که در هر فضای متریک مخروطی (X, d) با مخروط P اگر $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله ای در X و $x \in X$ و $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = ۰$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

زیرا اگر فرض کنیم $d(x_n, x) \to ۰$ $(n \to \infty)$ در این صورت برای هر $c \in E$ با شرط $c \gg ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد به طوری که اگر $\| x \| = \| c - x - c \| < \delta$ آنگاه $c - x \in intP$. برای این δ، $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n > N$ داریم $\| d(x_n, x) \| < \delta$ بنابراین $c - d(x_n, x) \in intP$ و این یعنی $d(x_n, x) \ll c$، بنابراین x_n به x همگرا است. حال اگر مخروط نرمال باشد عکس این مطلب نیز صحیح است یعنی

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = x) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = ۰$$

زیرا با فرض $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ داریم،

$$\forall c \gg ۰, \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow d(x_n, x) \ll c$$

اما چون P نرمال است از شرط $d(x_n,x) \ll c$ *داریم* $\| d(x_n,x) \| \ll k \| c \|$ *حال چون برای هر* $m \in \mathbb{N}$، $\frac{1}{m}c \in intP$ *و* $\| \frac{1}{m}c \| = \frac{1}{m} \| c \| \to 0$ *پس* $\| d(x_n,x) \| \to 0$ *به طریق مشابه در هر فضای متریک مخروطی نرمال داریم* $\{x_n\}$ *یک دنباله کشی در* X *است اگر و تنها اگر* $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$.

لم ۱.۱.۱. *فرض کنیم* (X,d) *فضای متریک مخروطی و* P *مخروط نرمال با ثابت نرمال* k *باشد و همچنین* $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ *دو دنباله در* X *باشند به طوری که* $x_n \to x$، $y_n \to y$ *در این صورت،*

$$d(x_n,y_n) \longrightarrow d(x,y).$$

اثبات. برای هر $\varepsilon > 0$ عضو $c \in E$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $c \gg 0$ و $\| c \| < \frac{\varepsilon}{4k+2}$ از مفروضات $\{x_n\},\{y_n\}$ نتیجه می‌شود که عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n > N$ داریم: $d(x_n,x) \ll c, d(y_n,y) \ll c$ بنابراین اگر $n > N$ آنگاه خواهیم داشت،

$$d(x_n,y_n) \leqslant d(x_n,x) + d(x,y) + d(y_n,y) \leqslant d(x,y) + 2c,$$

$$d(x,y) \leqslant d(x_n,x) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y) \leqslant d(x_n,y_n) + 2c.$$

در نتیجه،

$$0 \leqslant d(x,y) + 2c - d(x_n,y_n) \leqslant 4c.$$

پس با توجه به نرمال بودن P داریم،

$$\| d(x_n,y_n) - d(x,y) \| \leqslant \| d(x,y) + 2c - d(x_n,y_n) \| + \| 2c \| \leqslant (4k+2) \| c \| < \varepsilon$$

بنابراین وقتی $n \to \infty$ داریم،

$$d(x_n,y_n) \longrightarrow d(x,y).$$

□

تذکر ۳. ۱. *اگر* E *فضای باناخ حقیقی دارای مخروط* P، $a \in P$ *و عدد* $0 < \lambda < 1$ *موجود باشد به طوری که* $a \leqslant \lambda a$ *آنگاه* $a = 0$.

۲. *اگر* $c \in intP$ *و* $c \leqslant a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *و* $a_n \to 0$ *آنگاه عدد صحیح مثبت* n_0 *وجود دارد که برای هر* $n \geqslant n_0$ *داریم* $a_n \ll c$.

۳. *اگر* $y \in intP$ *آنگاه،* $(\forall x, x \geqslant y \Rightarrow x \in intP)$.

۴. *اگر* $a \leqslant b$ *و* $c \ll a$ *آنگاه* $c \ll b$.

۵. *اگر* $a \ll b$ *و* $c \leqslant a$ *آنگاه* $c \ll b$.

۶. $intP + intP \subseteq intP$.

۷. *برای هر* $\alpha \in (۰, \infty)$، $\alpha\ intP \subseteq intP$.

۸. *اگر* $a \leqslant b$ *و* $b \leqslant c$ *آنگاه* $a \leqslant c$. *و همچنین اگر* $a \ll b$ *و* $b \ll c$ *آنگاه* $a \ll c$.

اثبات. ۱. شرط $a \leqslant \lambda a$ نتیجه می‌دهد که $\lambda a - a \in P$ و در نتیجه $-(۱-\lambda)a \in P$.
از طرفی چون $a \in P$ و $۱ - \lambda > ۰$ پس $(۱ - \lambda)a \in P$ در نتیجه،

$$(۱ - \lambda)a \in P \cap (-P) = \{۰\} \Longrightarrow a = ۰.$$

۲. قرارمی دهیم $c \gg ۰$. همسایگی متقارن V از صفر را طوری انتخاب می‌کنیم که
$c + V \subset P$. از شرط $a_n \to ۰$ نتیجه می‌شود که عنصر $n_۰ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $n > n_۰$ داریم، $a_n \in V = -V$. بنابراین $c \pm a_n \in c + V$
از طرفی چون $c + V \subset P$ پس برای هر $n > n_۰$ خواهیم داشت، $c \pm a_n \in P$.
در نتیجه $c \pm a_n \gg ۰$ و $a_n \ll c$.

۳. اگر $x \geqslant y$ آنگاه $x - y \in P$ بنابراین با توجه به این که $x = y + (x - y)$ نتیجه می‌شود که $x \in P$. حال تابع $f : E \to E$ را برای هر $u \in E$ با ضابطه $f(u) = u + (y - x)$ تعریف می‌کنیم. این تابع به وضوح پیوسته و دوسویی است و $f^{-۱} : E \to E$ با ضابطه $f^{-۱}(u) = u + (x - y)$ می‌باشد. حال چون $y \in intP$ پس زیر مجموعه باز U از E موجود است که $y + U \subseteq E$ بنابراین با توجه به پیوستگی f، $f^{-۱}(U)$ نیز در E باز است. از طرفی $f(x) = y \in U$ پس $x \in f^{-۱}(U)$. بنابراین اگر نشان دهیم $f^{-۱}(U) \subseteq P$ ثابت شده است که $x \in intP$. برای این منظور نیز ملاحظه می‌کنیم که

$$f^{-۱}(U) = \{f^{-۱}(t) : t \in U\} = \{u + x - y : u \in U\} \subseteq P.$$

۴. اگر $a \leqslant b$ و $a \ll c$ آنگاه $a - c \leqslant b - c$ پس چون $a - c \in intP$ طبق ۲ $b - c \in intP$.

۵. اگر $a \ll b$ و $c \leqslant a$ آنگاه $b - a \leqslant b - c$ پس چون $b - a \in intP$ طبق ۳ $b - c \in intP$.

۶. اگر $x, y \in intP$ آنگاه $x \leqslant x + y - x = y \leqslant ۰$ بنابراین $x \leqslant x + y$ بنابراین طبق ۳ $x + y \in intP$.

۷. اگر $c \in intP$ گوی بازی به مرکز c و به شعاعی مانند $\delta > ۰$ موجود است که زیرمجموعه P می‌باشد. پس برای هر $x \in E$، $\parallel c - x \parallel < \delta$ آنگاه $x \in P$. این نشان می‌دهد که اگر $\parallel c - \frac{x}{\alpha} \parallel < \alpha\delta$ آنگاه $\parallel \alpha c - x \parallel = \alpha \parallel c - \frac{x}{\alpha} \parallel$ و یا $\frac{x}{\alpha} \in P$ $x \in P$. پس گوی باز به مرکز αc و شعاع $\alpha\delta$ زیرمجموعه P است پس $\alpha \in P$.

۸. از شرط $a \leqslant b$ نتیجه می‌شود $b - a \in P$ و از شرط $b \leqslant c$ نتیجه می‌شود $c - b \in P$. بنابراین، $c - a = (c - b) + (b - a) \in P$. پس $c - a \in P$ در نتیجه $a \leqslant c$.

همچنین از شرط $a \ll b$ نتیجه می‌شود $b - a \in intP$ و از شرط $b \ll c$ نتیجه می‌شود $c - b \in intP$. بنابراین طبق ۶، $c - a = (c - b) + (b - a) \in intP$، پس $a \ll c$.

$\square$

تعریف ۸.۱.۱. *تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را شبه پیوسته از پایین نامیم هرگاه برای هر دنباله صعودی $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از X که همگرا به نقطه $x \in X$ باشد داشته باشیم،*

$$f(x) < \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

تعریف ۹.۱.۱. *نگاشت f، g شبه انقباضی مرتب شده[۱۱] نامیده می‌شود هرگاه، عدد $\lambda \in [۰, ۱)$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ با شرط $gx \sqsubseteq gy$، عضو $u \in M_۰^{f,g}(x, y)$، وجود داشته باشد به طوری که $d(fx, fy) \leqslant \lambda u$ که در آن*

$$M_۰^{f,g} = \{d(gx, gy), d(gx, fx), d(gx, fy), d(gy, fx)\}.$$

[۱۱] ordered -quasi-contraction