بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان

روش هم مکانی گاوس – لژاندر انتقال یافته برای حل مسائل مقدار اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم

تدوین

الهام گوهری

استاد راهنما

دکتر شهنام جوادی

مهر ۱۳۹۰

بسمه تعالی

تاریخ : ....

شماره : ....

پیوست : ....

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ خانم الهام گوهری دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ ریاضی کاربردی تحت عنوان:

روش هم‌مکانی گاوس-لژاندر انتقال یافته برای حل مسائل مقدار اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوم

در روز سه‌شنبه مورخ ۹۰/۷/۱۲ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۸/۲۵ (هجده و بیست و پنج صدم) است.

۱ـ عالی ☑

۲ـ بسیار خوب ☐

۳ـ خوب ☐

۴ـ قابل قبول ☐

۵ـ غیرقابل قبول ☐

داور داخلی	داور خارجی	استاد راهنما
دکتر جمشید سعیدیان	دکتر علیمردان شاهرضایی	دکتر شهنام جوادی

حکیمه ماهیار

معاون آموزشی دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران : خیابان شهید مفتح نرسیده به انقلاب ، پ ۴۳
کدپستی : ۱۴۹۱۱- ۱۵۷۱۹
تلفن : ۳-۸۸۳۲۹۲۲۰-۰۲۱
کرج : انتهای خیابان شهید بهشتی میدان دانشگاه
کدپستی : ۳۷۵۵۱ - ۳۱۹۷۹
تلفن : ۴۵۷۹۶۰۰-۰۲۶۱
Iran - Tehran
NO 43 , mofateh Ave.
Tarbiat Moallem University
www.tmu.ac.ir

تقدیر و تشکر

از همه کسانی که در به ثمر رساندن این پایان‌نامه سهمی داشتند تشکر می‌کنم. از جناب آقای دکتر شهنام جوادی که با راهنمایی‌های مفید و ارزنده و دقت‌نظر خود یاریم رساندند، سپاسگزارم. از داوران داخلی و خارجی محترم جناب آقای دکتر سعیدیان و جناب آقای دکتر شاهرضایی به دلیل مطالعه، داوری و ارایه‌ی پیشنهادات مفید خود که سبب بهبود کیفیت مطالب شدند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

سپاس ویژه دارم از پدر و مادر دلسوزم و خانواده مهربانم، چراکه در لحظه به لحظه تحصیلم از آن زمان که " آ " را آموختم تا امروز مرا تنها نگذاشتند.

سپاسگزارم از همسری که به رغم جوانیش کوله‌باری از تجربه و آرامش و امنیت برایم به ارمغان آورد و حتی در تدوین مطالب یاریم کرد.

از آقای فرزاد نظری که در ویرایش و آقای امین قربانی که در برنامه‌نویسی متلب همکاری نمودند، کمال تشکر را دارم.

نتیجه تلاش و سختی هایم هدیه به

دو بال پروازم

پدر و مادرم

چکیده:

دراین پایان‌نامه یک روش هم‌مکانی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی دوم ارائه شده است. با استفاده از روش درونیابی گاوس—لژاندر جواب عددی مناسبی را برای مسائل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم به دست می‌آوریم که دارای دقت طیفی هستند. همچنین یک روش چندگامی هم‌مکانی گاوس‌ـلژاندر معرفی می‌کنیم که برای محاسبات پیچیده مناسب است.

واژه‌های کلیدی: روش هم‌مکانی گاوس—لژاندر، مسئله مقدار اولیه مرتبه دوم معمولی، دقت طیفی.

رده بندی موضوعی ریاضیات ۲۰۱۰:

32K05, 42C10, 65L05, 65L60.

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی دوم، طبقه‌ی مهمی از معادلات دیفرانسیل هستند که در بسیاری از علوم، رسیدن به نتایج مطلوب، منوط به حل هرچه دقیق‌تر این معادلات است.

این پایان‌نامه که برگرفته از مرجع [۵] می‌باشد، برای حل معادلات مقدار اولیه از این طبقه، روشی ارایه نموده است که با افزایش تعداد نقاط موجود در شبکه، به جواب دقیق‌تری دسترسی پیدا می‌کنیم.

فصل اول، شامل مباحث مقدماتی از جمله معرفی فضاها و چندجمله‌ای‌های متعامد است. در یک قسمت از این فصل به ضرورت استفاده از فضای سوبولوف برای چندجمله‌ای‌های متعامد پرداخته شده است.

در فصل دوم به معرفی روش‌های عددی انتگرال‌گیری و علی‌الخصوص روش هم‌مکانی گاوس — لژاندر انتقال یافته پرداختیم که روش اصلی و مورد بحث ما می‌باشد.

در فصل سوم به تحلیل خطای این روش پرداخته شده است. البته تحلیل خطا با در نظرگرفتن شرایط تحمیل شده بر تابع مسأله یعنی $f(z_1(t), z_0(t), t)$ بررسی شده است و شرایط کافی برای همگرایی استخراج گردیده است.

نهایتاً دو نمونه از مثال‌های موجود در مرجع [۵] با نرم‌افزار مطلب [1] حل شده است که متن اصلی برنامه ارایه خواهد شد. نمودار و جدول حاصل از بررسی خطای نقطه‌وار ،چند مثال دیگر از همان مرجع نیز نشان‌دهنده‌ی کارایی این روش می‌باشد.

---

[1] matlab

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل با انواع فضاها و مخصوصاً فضای سوبولوف و چندجمله‌ای‌های متعامد آشنا می‌شویم. سپس به ارتباط مفید بین فضاهای سوبولوف و چندجمله‌ای‌های متعامد می‌پردازیم. نهایتاً چندجمله‌ای‌های لژاندر و خواص آن‌ها را مطرح می‌کنیم.

۲.۱ فضای باناخ

نظریه‌ی جبری فضاهای برداری جزء لاینفک ریاضیات امروزی است. در آنالیز، فضاهای برداری را ضمن در نظر گرفتن ساختار جبری موجود بر آنها از نقطه نظر توپولوژیکی مورد مطالعه قرار می‌دهند. پر ثمرترین مطالعه وقتی پیش می‌آید که به هر بردار، عددی حقیقی که نرم آن بردار نام دارد، نسبت دهیم. می‌توان نرم را تعمیم مفهوم طول تصور کرد.

تعریف ۱.۲.۱ فضای نرم‌داری را که نسبت به متریک القا شده به وسیله‌ی نرم کامل باشد، فضای باناخ می‌نامیم.

طیفی از مسائل گوناگون متعلق به شاخه‌های مختلف ریاضیات را می‌توان در چارچوب نظریه‌ی فضاهای باناخ مطرح و سپس با استفاده از فنون توانمند این نظریه آن‌ها را حل کرد.

تعریف ۲.۲.۱ تابع حقیقی $\|.\|$ را که روی فضای برداری X تعریف شده است، یک نرم می‌نامیم هرگاه در سه ویژگی زیر صدق کند:

۱) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف ۳.۲.۱ فضای برداری X با نرم $\|.\|$ را یک فضای برداری نرم‌دار یا، به اختصار، یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.

برای اجتناب از موضوعات بدیهی، فضاهای برداری مورد بحث را به طور ضمنی مخالف با $\{0\}$ می‌گیریم. روی فضای برداری نرم‌دار X با استفاده از تابع $d(x, y) = \|x - y\|$ متری بر حسب نرم تعریف می‌کنیم. با توجه به ویژگی‌های نرم، به آسانی می‌بینیم که $d(.,.)$ یک متر روی X است. این متر را متر القایی به‌وسیله‌ی نرم می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ می‌گوییم دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X نسبت به نرم به x همگرا است هرگاه $lim_{n\to\infty}\|x - x_n\| = 0$.

تعریف ۵.۲.۱ می‌گوییم زیر مجموعه‌ی A از فضای نرم‌دار X نسبت به نرم کراندار است هرگاه عددی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in A$، $\|x\| \leq M$.

در فضاهای نرم‌دار، هر دنباله‌ی کوشی دنباله‌ای کراندار است. برای اثبات، فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی باشد. بنابراین $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد که به ازای هر $n, m \geq k$، $\|x_n - x_m\| < 1$ و قرار می‌دهیم $M = \max\{\|\mathrm{x}_1\|, \dots, \|\mathrm{x}_{\mathrm{N}_1}\|, \|\mathrm{x}_{\mathrm{N}_1+1}\| = \|\mathrm{x}_{\mathrm{N}_1}\| + 1\}$. در این صورت، $\|x_n\| \leq \|x_n - x_{N_1}\| + \|x_{N_1}\| \leq 1 + \|x_{N_1}\|$. پس نتیجه می‌شود که به ازای هر n داریم $\|x_n\| \leq M$.

تعریف ۶.۲.۱ فضای نرم‌دار X یک فضای باناخ است هرگاه به ازای هر دنباله‌ی کوشی مانند $\{x_n\}$ در X، عنصری مانند $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$.

بدین ترتیب، فضای باناخ مثال خاصی از فضای متریک کامل است. برای درک بهتر مطلب، چند مثال از فضای باناخ را مطرح می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۱ فضای برداری $\mathbb{R}^۲$ مجهز به نرم $\|x\| = \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$، که در آن $x = (x_۱, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$، یک فضای باناخ است. این نرم را اقلیدسی می‌نامیم و متر حاصل از آن همان متر اقلیدسی است.

مثال ۲.۲.۱ بازه‌ی $[a,b]$ و عدد طبیعی k را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $C^k[a,b]$ گردایه‌ی همه‌ی توابع حقیقی معین بر $[a,b]$ را نشان می‌دهد که دارای مشتق k ام پیوسته بر$[a,b]$ هستند. البته در نقاط انتهایی، مشتق‌های راست و چپ مورد نظراند. روشن است که $C^k[a,b]$ مجهز به اعمال جبری نقطه‌وار فضایی برداری است. علاوه بر این اگر به ازای هر$f \in C^k[a,b]$ قرار دهیم $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(k)}\|_\infty$. در این صورت $\|.\|$ یک نرم روی $C^k[a,b]$ تعریف می‌کند و $C^k[a,b]$ مجهز به آن یک فضای باناخ است.

تعریف ۷.۲.۱ تابع $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای برداری را یک عملگر خطی، یا به اختصار، عملگر می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنیم $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی بین دو فضای نرم‌دار باشد. نرم T را با فرمول $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = ۱\}$ تعریف می‌کنیم. اگر $\|T\|$ متناهی باشد، T را یک عملگر کراندار و اگر $\|T\| = \infty$، T را یک عملگر بی‌کران می‌نامیم. ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر $x \in X$ داریم $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$. برای اثبات، می‌بینیم که اگر $x \neq ۰$، آنگاه بردار $y = \frac{x}{\|x\|}$ در $\|y\| = ۱$ صدق می‌کند و از این رو،

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|\frac{T(x)}{\|x\|}\right\| = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|T(y)\| \leq \|T\|.$$

به ویژه از نابرابری اخیر نتیجه می‌گیریم که $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq ۱\}$.

برای مثال از عملگرهای کراندار، عملگر دیفرانسیل انتخاب شده است .

مثال ۳.۲.۱ فرض کنیم X فضای برداری همه‌ی توابع حقیقی معین بر $[\circ, ۱]$ باشد که مشتق پیوسته دارند. روی X نرم بی‌نهایت را در نظر می‌گیریم. همین طور فرض کنیم $Y = C[\circ, ۱]$ مجهز به نرم بی‌نهایت باشد. تابع $D : X \longrightarrow Y$ را با ضابطه ی $D(f) = f'$ تعریف می‌کنیم. (D را عملگر دیفرانسیل می‌نامیم.) به آسانی می‌بینیم که D عملگر خطی است و $\|D\| = \infty$. در حقیقت اگر $f_n(x) = x^n; n \geq ۲$، آنگاه $\|f_n\| = ۱$ و به ازای هر n، $\|D(f_n)\| = \sup\{nx^{n-۱} : x \in [\circ, ۱]\} = n$. در نتیجه، $\|D\| = \infty$. بنابراین، D عملگری بی‌کران است:

$$\|D\| = \sup\{\|D(f_n)\|_\infty\} \Rightarrow \|D\| \geq n.$$

مثال ۴.۲.۱ فرض کنیم $C^k[a, b]$ در فضای باناخ مثال (۳.۲.۱) باشد که $C[a, b]$ مجهز به نرم sup، یعنی $\|\cdot\|_\infty$، است. k تابع $p_\circ, p_۱, \ldots, p_{k-۱}$ را در $C[a, b]$ ثابت نگه می‌داریم. اکنون $L : C^k[a, b] \to C[a, b]$ را به ازای هر $y \in C^k[a, b]$ با $L(y) = y^{(k)} + p_{k-۱}y^{(k-۱)} + \cdots + p_۱y' + p_\circ y$ تعریف می‌کنیم. روشن است که L یک عملگر (دیفرانسیل) خطی است. از طرف دیگر، اگر $M = ۱ + \|p_\circ\|_\infty + \|p_۱\|_\infty + \cdots + \|p_{k-۱}\|_\infty$ به آسانی می‌بینیم که

$$\|L(y)\|_\infty \leq M \left[\|y^{(k)}\|_\infty + \|y^{(k-۱)}\|_\infty + \cdots + \|y'\|_\infty + \|y\|_\infty\right] = M\|y\|.$$

این نشان می‌دهد که L عملگری کراندار است. همچنین، L پوشاست.

اکنون نشان می‌دهیم که اختلالات کوچک در مقادیر اولیه‌ی یک معادله دیفرانسیل موجب پیدایش اختلالات کوچک در جواب‌ها می‌شوند. برای این کار یک لم و سپس قضیه‌ی نگاشت باز را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی پیوسته‌ی پوشا باشد. اگر صفر یک نقطه‌ی درونی زیرمجموعه‌ی $A \subseteq X$ باشد، آنگاه صفر یک نقطه‌ی درونی $T(A)$ نیز هست.

(برای اثبات به [۱] رجوع کنید.) ■

تعریف ۹.۲.۱ $f : X \longrightarrow Y$ نگاشت باز است در صورتی که O در X باز باشد، $f(O)$ در Y باز است.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه نگاشت باز) فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد. اگر T پوشا باشد، آنگاه T نگاشتی باز است (و اگر T یک به یک نیز باشد، آنگاه یک همسان‌ریختی است.)

(برای اثبات به [۱] رجوع کنید.) ■

معادله‌ی دیفرانسیل

$$y^{(k)} + p_{k-۱}y^{(k-۱)} + \cdots + p_۱y' + p_۰y = q \qquad (۱.۲.۱)$$

را که در آن $q, p_{k-۱}, \ldots, p_۱, p_۰$ توابع پیوسته‌ی مفروضی هستند که بر بازه‌ی بسته و کراندار $[a,b]$ تعریف شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر y یک جواب (۱.۲.۱) باشد و $c \in [a,b]$، در این صورت k عدد حقیقی $y^{(k-۱)}(c), \ldots, y'(c), y(c)$ را مقادیر آغازی y در c می‌نامیم. بنابر قضیه‌های متعارف معادلات دیفرانسیل معمولی می‌دانیم که اگر $c \in [a,b]$ و k عدد حقیقی $\alpha_k, \ldots, \alpha_۱$ مفروض باشند، آنگاه دقیقا یک جواب مانند y برای (۱.۲.۱) وجود دارد به طوری که $\alpha_k, \ldots, \alpha_۱$ مقادیر آغازی آن در c هستند، یعنی در رابطه‌های $y^{(k-۱)}(c) = \alpha_k, \ldots, y'(c) = \alpha_۲, y(c) = \alpha_۱$ صدق می‌کند.

فضای باناخ $C^k[a,b]$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که نرم این فضا یعنی $\|y\| = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty + \cdots + \|y^{(k-۱)}\|_\infty$، اندازه‌ی توابع و مشتق آنها را کنترل می‌کند. همچنین، عملگر خطی کراندار $L : C^k[a,b] \longrightarrow C[a,b]$ در مثال (۴.۲.۱) را در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم $L(y) = y^{(k)} + p_{k-۱}y^{(k-۱)} + \cdots + p_۱y' + p_۰y$. اکنون $c \in [a,b]$ را ثابت می‌گیریم و تابع $T : C^k[a,b] \longrightarrow C[a,b] \times \mathbb{R}^k$ را به ازای هر $y \in C^k[a,b]$ با فرمول $T(y) = \left(L(y), y(c), y'(c), \ldots, y^{(k-۱)}(c)\right)$ تعریف می‌کنیم. می‌توان به آسانی تحقیق کرد که T خطی و پیوسته است. از طرف دیگر، وجود و یکتایی جواب‌های معادله(۱.۲.۱) با توجه به مقادیر اولیه مفروض تضمین می‌کند که T یک به یک و پوشاست. بدین ترتیب، بنابر قضیه‌ی نگاشت باز، $T^{-۱}$ که موجود و خطی است، پیوسته می‌باشد. پیوستگی $T^{-۱}$ به این معنی است که به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ هست به‌طوری‌که وقتی (f,x) و (g,z)، متعلق به $C[a,b] \times \mathbb{R}^k$، در $\|f - g\|_\infty + \|x - z\|_\infty < \delta$ صدق کنند، آنگاه $\|T^{-۱}(f,x) - T^{-۱}(g,z)\| < \varepsilon$. اگر این گزاره را برای معادله‌ی دیفرانسیل (۱.۲.۱) بازنویسی کنیم، نتایج زیر حاصل می شوند:

فرض کنیم $y_۱$ و $y_۲$ دو جواب (۱.۲.۱) باشند که در شرایط آغازی $y_۱(c) = \alpha_۱, \ldots, y_۱^{(k-۱)}(c) = \alpha_k$ و $y_۲(c) = \beta_۱, \ldots, y_۲^{(k-۱)}(c) = \beta_k$ صدق می‌کنند. اگر به ازای هر $i = ۱, \ldots, k$ داشته باشیم $|\alpha_i - \beta_i| < \delta$ آنگاه

$$\|y_۱ - y_۲\|_\infty + \|y'_۱ - y'_۲\|_\infty + \cdots + \|y_۱^{(k-۱)} - y_۲^{(k-۱)}\|_\infty < \varepsilon$$

یعنی جواب‌های معادله دیفرانسیل (۱.۲.۱) به طور پیوسته به مقادیر اولیه بستگی دارند.

۳.۱ فضای L_p

حال به مطالعه فضاهای تابعی می‌پردازیم. بسیاری از فضاهای کلاسیک در آنالیز فضاهایی هستند که از توابع اندازه پذیر تشکیل و بیشتر نرم‌های مهم روی این فضاها با استفاده از انتگرال تعریف شده‌اند. نظریه‌ی انتگرال، ما را قادر می‌سازد تا ویژگی‌های این فضاها را مطالعه کنیم. با توجه به این نکته که اگر f تابعی اندازه پذیر باشد، آنگاه به ازای هر $p > 0$، تابع $|f|^p$ نیز اندازه پذیر است به بحث اصلی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم $0 < p < \infty$. گردایه‌ی همه‌ی توابع اندازه پذیر مانند f را به طوری که $|f|^p$ انتگرال‌پذیر باشد با $L_p(\mu)$ نشان می‌دهیم. اگر لازم باشد به فضای اندازه‌پذیر X اشاره کنیم، در این صورت $L_p(\mu)$ را با $L_p(X)$ یا حتی با $L_p(X, S, \mu)$ نشان می‌دهیم.

به آسانی ثابت می‌شود که $L_p(\mu)$ فضایی برداری است. در حقیقت اگر $f \in L_p(\mu)$، به ازای هر $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ داریم $\alpha f \in L_p(\mu)$. از طرف دیگر، نابرابری $|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$ که بین اعداد حقیقی برقرار است نشان می‌دهد که $L_p(\mu)$ نسبت به جمع بسته است.

تعریف ۲.۳.۱ به ازای هر $f \in L_p(\mu)$ قرار می‌دهیم $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$، عدد $\|f\|_p$ را L_p ـنرم f می‌نامیم. آشکار است که به ازای هر $f \in L_p(\mu)$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم $\|f\|_p \geq 0$ و $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$.

برای بدست آوردن ویژگی‌های دیگر L_p ـنرم ها، لم زیر را بیان می‌کنیم:

لم ۱.۳.۱ اگر $0 < \lambda < 1$، آنگاه به ازای هر جفت از اعداد حقیقی نامنفی مانند a, b داریم $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$.

(برای اثبات به [1] رجوع کنید.) ■

قضیه ۱.۳.۱ (نابرابری هولدر) فرض کنیم $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$ چنان باشند که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. اگر $f \in L_p(\mu)$ و $g \in L_q(\mu)$، آنگاه $fg \in L_1(\mu)$ و

$$\|f \cdot g\|_1 = \int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(برای اثبات به [۱] رجوع کنید.) ■

در حالت خاص $p=q=2$، نابرابری هولدر را نابرابری کوشی‌شوارتز می‌نامیم. مشابه نابرابری مثلثی در فضای L_p، نابرابری مینکوفسکی است که در قالب قضیه زیر به بیان آن می‌پردازیم.

قضیه ۲.۳.۱ (نابرابری مینکوفسکی) فرض کنیم $1 \leq p < \infty$. در این صورت به ازای هر دو تابع $f,g \in L_p(\mu)$ نابرابری ذیل برقرار است:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(برای اثبات به [۱] رجوع کنید.) ■

در تعریف (۱.۳.۱) چنانچه $p=2$ باشد، فضای $L_2(X,\mu)$ حاصل می‌شود. یعنی برای هر تابع متعلق به این فضا خواهیم داشت، $\int_X |f|^2 \, d\mu < \infty$.

ضرب داخلی دو تابع f و g از فضای $L_2(X,\mu)$ به صورت:

$$< f,g >= \int_X f(t)\bar{g(t)}d\mu(t).$$

تعریف می‌شود. با ضرب داخلی تعریف‌شده می‌توان ثابت کرد که L_2 فضای کامل است.

تعریف ۳.۳.۱ اگر w تابعی اندازه پذیر و مثبت باشد، فضای همه‌ی توابع اندازه‌پذیر f روی بازه‌ی $[0,1]$ که در $\int_0^1 |f(t)|^2 w(t)dt < \infty$ صدق می‌کنند، فضای وزن‌دار L_2، $L_2w([0,1])$، نامیده می‌شود. تابع w با چنین ویژگی را تابع وزن می‌نامند. در این فضا، ضرب داخلی به صورت $< f,g >= \int_0^1 f(t)\bar{g(t)}w(t)dt$ تعریف می‌شود. چنین فضاهای وزن‌داری، برای مطالعه‌ی چندجمله‌ای‌های متعامد سودمنداند چراکه خانواده‌های مختلف از چندجمله‌ای‌های متعامد، دارای وزن‌های متفاوتی هستند که نسبت به آن وزن متعامداند.

۴.۱ فضای هیلبرت

مفهوم نرم را می‌توان به عنوان تعمیم مفهوم اقلیدسی طول تلقی کرد. از این رو، فضاهای نرم‌دار یا باناخ را می‌توان به عنوان مشابه متناهی البعد یا نامتناهی البعد فضای دو بعدی یا سه بعدی در هندسه‌ی اقلیدسی تصور کرد. البته در فضای دو بعدی یا سه بعدی هندسه‌ی اقلیدسی، مفهوم مهم دیگری نیز هست که طول بردارها را توصیف می‌کند. این طول را می‌توان به وسیله‌ی همان ضرب

داخلی آشنا به دست آورد. یعنی طول بردار دلخواهی مانند x عبارت است از: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ و در آن y و x حاصل‌ضرب داخلی بردارهای x و y را نشان می‌دهد. به طور کلی، حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $x, y \in \mathbb{R}^n$ را که به صورت $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ تعریف می‌شود، می‌توان به عنوان تابعی از دو متغیر در نظر گرفت که در ویژگی‌های خطی و همگن معینی صدق می‌کنند. ضرب داخلی علاوه بر اینکه در محاسبه‌ی نرم بردارها به کار می‌رود، این امکان را نیز فراهم می‌آورد تا اندازه‌ی زاویه‌ی بین آنها را روی خطوط و صفحات بیان کنیم. به همین سبب، گرچه همه‌ی نرم‌های معین بر $\mathbb{R}^n$ هم ارزند ولی مناسب‌ترین نرم برای کاربردهای فیزیکی، نرم اقلیدسی است.

اولین جرقه‌های پدید آمدن فضای هیلبرت یعنی تعمیم فضای اقلیدسی در اولین دهه‌ی قرن ۲۰ توسط دیوید هیلبرت[۱]،ارهارد اشمیت[۲] و فریگز ریس[۳]، زده شد. در آن زمان، این سه نفر در طی مطالعه بر معادلات انتگرال دریافتند که دو تابع حقیقی و مجذوراً انتگرال‌پذیر f و g بر بازه‌ی $[a, b]$ دارای ضرب داخلی $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$ هستند که خواص بسیار مشابهی با ضرب نقطه‌ای در فضای اقلیدسی دارد.

تعریف ۱.۴.۱ هر ضرب داخلی بر فضای برداری حقیقی مانند X، تابعی حقیقی از دو متغیر مانند $(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow R$ است به طوری که:

۱) به ازای هر $x \in X$ داریم $(x, x) \geq 0$ ،$(x, x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۲) $(\cdot, \cdot)$ متقارن است، یعنی به ازای هر$x, y \in X$ ، $(x, y) = (y, x)$.

۳) $(\cdot, \cdot)$ نسبت به متغیر اول خطی است، یعنی به ازای هر $x, y, z \in X$ و هر دو عدد حقیقی α, β، $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

با توجه به ویژگی (۱) و (۲) می بینیم که هر ضرب داخلی بر یک فضای برداری حقیقی، نسبت به متغیر دوم خطی است.

اگر X یک فضای برداری مختلط باشد، تابعی مختلط از دو متغیر مانند $(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow C$ را یک ضرب داخلی بر X می‌نامیم هرگاه

۱) به ازای هر $x \in X$ داریم $(x, x) \geq 0$ ،$(x, x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر$x, y \in X$ ، $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

---

[۱] *David Hilbert*
[۲] *Erhard Schmidt*
[۳] *Frigyes Riesz*

۳) $(\cdot,\cdot)$ نسبت به متغیر اول خطی باشد، یعنی به ازای هر $x, y, z \in X$ و هر دو عدد مختلط α, β داشته باشیم، $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

هر فضای برداری مختلط مجهز به یک ضرب داخلی را یک فضای با ضرب داخلی مختلط می‌نامیم. به آسانی دیده می‌شود که ضرب داخلی یک فضای با ضرب داخلی مختلط، نسبت به متغیر دوم دارای ویژگی جمعی و همگن مزدوج است. یعنی

۱) به ازای هر $x, y \in X$، $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$.

۲) به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in C$، $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$.

هر فضای برداری حقیقی مانند X را می‌توان با استفاده از مختلط‌سازی آن به یک فضای برداری مختلط توسیع داد. فرایند مختلط‌سازی روی فضای X به صورت زیر انجام می‌گیرد:
X_C فضای مختلط حاصل از X است که به صورت $X_C = X \oplus iX = \{x + iy \ : \ x, y \in X\}$ تعریف می‌شود. سپس آن را به اعمال جبری زیر مجهز می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(x_۱ + iy_۱) + (x_۲ + iy_۲) &= x_۱ + x_۲ + i(y_۱ + y_۲),\\ (x_۱ + iy_۱) \cdot (x_۲ + iy_۲) &= x_۱ x_۲ - y_۱ y_۲ + i(y_۱ x_۲ + x_۱ y_۲).\end{aligned}$$

با این وصف می‌توان X را زیر فضای برداری از X_C دانست. اکنون اگر X را زیر فضای با ضرب داخلی حقیقی باشد و مختلط‌سازی آن را X_C بنامیم، آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که تابع $< \cdot, \cdot >: X_C \times X_C \longrightarrow C$ باضابطه‌ی

$$< x_۱ + iy_۱, x_۲ + iy_۲ >= (x_۱, x_۲) + (y_۱, y_۲) + i[(y_۱, x_۲) - (x_۱, y_۲)]$$

یک ضرب داخلی بر X_C است و $< x_۱ + ۰i, x_۲ + ۰i >= (x_۱, x_۲)$. یعنی ضرب داخلی $< \cdot, \cdot >$، یک توسیع ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)$ از X به مختلط‌سازی‌شده آن یعنی X_C است.

تعریف ۲.۴.۱ فضای برداری را که نرم آن از یک ضرب داخلی به‌دست آید، یک فضای با ضرب داخلی می‌نامیم. اگر این فضا کامل نیز باشد، آن را یک فضای هیلبرت گویند.

تعریف ۳.۴.۱ سری $\sum_{n=۰}^{\infty} x_n$ را که x_i ها متعلق به فضای برداری X هستند، همگرای مطلق گوئیم هرگاه $\sum_{k=۰}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. یعنی برداری چون L متعلق به فضای X موجود باشد که هرگاه $N \to \infty$، داشته باشیم $\left\| L - \sum_{k=۰}^{N} x_k \right\| \to ۰$.

تعریف ۴.۴.۱ فضای اقلیدسی، کامل است هرگاه هر سری دارای همگرایی مطلق، همگرا نیز باشد.

با توجه به تعاریف فوق، اگر فضای هیلبرت را با H نشان دهیم، نرم و متر القایی ضرب داخلی تعریف شده روی آن به صورت $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$, $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{<x-y,x-y>}$ است. از سوی دیگر، چون خواص توپولوژیکی مانند باز یا بسته بودن زیر مجموعه‌ها در H برقرار است، می‌توان فضای هیلبرت را یک فضای باناخ نیز دانست.

۵.۱ فضای سوبولف

شاخه‌ی مهمی از فضاهای هیلبرت، فضاهای سوبولف هستند. این فضا، نوع خاصی از فضای تابعی است که مشتق، بدون تغییر ساختار ضرب داخلی بر آن تعریف می‌شود. به همین دلیل این فضا برای بررسی نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی مناسب به نظر می‌رسد.

تعریف ۱.۵.۱ فرض کنیم $v \in L_1(a,b)$ انتگرال پذیر لبگ باشد ولی مشتق‌پذیر نباشد. v مشتق ضعیف u است هرگاه

$$\int_a^b u(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b v(t)\varphi(t)\,dt,$$

برای هر تابع مشتق‌پذیر φ که $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ برقرار باشد.

به‌طور مثال تابع $u : [-1,1] \to [0,1]$ که به صورت $u(t) = |t|$ تعریف می‌شود در $t = 0$ مشتق‌پذیر نیست. ولی دارای مشتق ضعیف v با تعریف زیر است:

$$v : [-1,1] \to [-1,1], \qquad v(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

برای عدد صحیح نامنفی s و $\Omega \subset \mathbb{R}^n$، فضای سوبولف $H^s(\Omega)$ شامل توابعی L_2 می‌باشد که مشتقات ضعیف[۴] این توابع تا مرتبه‌ی sام نیز L_2 هستند. ضرب داخلی در $H^s(\Omega)$ به صورت ذیل تعریف می‌شود

$$< f, g >= \int_\Omega f(x)\bar{g}(x)\,dx + \int_\Omega Df(x)D\bar{g}(x)\,dx + \cdots + \int_\Omega D^s f(x)D^s\bar{g}(x)\,dx,$$

[۴] *weak derivatives*

که ضرب نقطه‌ای انتگران همان ضرب داخلی در فضای اقلیدسی مشتقات جزئی هر مرتبه است. فضای سوبولف را می‌توان با s غیر صحیح نیز تعریف نمود. فضای سوبولف از منظر نظریه‌ی طیفی نیز دارای اهمیت است.

فرض کنید $\Lambda = \{x \mid |x| < ۱\}$ و $\chi(x)$ تابع وزن مشخصی باشد. برای هر $s \in \mathbb{N}$، فضای وزن‌دار سوبولف $H^s_\chi(\Lambda)$ مطابق فوق تعریف می‌شود و ضرب داخلی و نیم‌نرم و نرم آن به ترتیب با $(u,v)_{s,\chi}, |v|_{s,\chi}$ و $\|v\|_{s,\chi}$ نشان داده می‌شود. علی الخصوص

$$\|v\|_\chi = \|v\|_{\circ,\chi}, (u,v)_\chi = (u,v)_{\circ,\chi}, L_{۲,\chi}(\Lambda) = H^\circ_\chi(\Lambda)$$

برای هر عدد حقیقی $s = [s] + \theta, \circ < \theta < ۱$، فضای درونیابی را به صورت $H^s_\chi(\Lambda) = [H^{[s]+۱}_\chi(\Lambda), H^{[s]}_\chi(\Lambda)]_{۱-\theta}$ تعریف می‌کنیم. همچنین نابرابری گاگلیاردو-نیرنبرگ[۵] یعنی $\|v\|_{s,\chi} \le \|v\|^\theta_{[s]+۱,\chi}\|v\|^{۱-\theta}_{[s],\chi}$ به ازای هر $v \in H^{[s]+۱}_\chi(\Lambda)$ برقرار است. (برای اثبات رجوع کنید به [۴]). $H^s_{\circ,\chi}(\Lambda)$ برای بیان فضای $H^s_\chi(\Lambda)$ روی مجموعه $D(\Lambda)$ یعنی مجموعه‌ی همه‌ی توابع دیفرانسیل‌پذیر نامتناهی با دامنه‌ی فشرده روی Λ به کار می‌رود. وقتی $\chi(x) \equiv ۱$، اندیس χ را در نمادگذاری‌ها حذف می کنیم.

۶.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد

مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های $\varphi_\circ(x), \varphi_۱(x), \ldots, \varphi_r(x), \ldots$ را روی بازه‌ی $[a,b]$ نسبت به تابع وزن نامنفی $w(x)$ متعامد گوییم هرگاه هر عضو از مجموعه بر دیگر اعضای مجموعه عمود باشد. می‌توان تعریف فوق را به صورت دیگری نیز بیان کرد: مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های $\varphi_\circ(x), \varphi_۱(x), \ldots, \varphi_r(x), \ldots$ را روی بازه‌ی $[a,b]$ نسبت به تابع وزن نامنفی $w(x)$ متعامد گوییم هرگاه $\varphi_r(x)$ بر تمام چندجمله‌ای‌های با درجه‌ی کمتر از r، عمود باشد یعنی [۹]

$$\int_a^b w(x)\varphi_r(x)\varphi_i(x)\,dx = \circ, \qquad \circ \le i \le r-۱. \tag{۱.۶.۱}$$

حال می‌خواهیم به فهم بهتری از مطلب فوق دست پیدا کنیم. با توجه به اینکه $\varphi_i^{(r)} \equiv \circ, \ \circ \le i \le r-۱$ و نماد گذاری $w(x)\varphi_r(x) \equiv \frac{d^r}{dx^r}U_r(x)$، پس از r بار انتگرال‌گیری از (۱.۶.۱) به روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{d^r}{dx^r}U_r(x)\varphi_i(x)\,dx &= \Big(\frac{d^r}{dx^r}U_r(x)\varphi_i(x) - \frac{d^{r-۱}}{dx^{r-۱}}U_r(x)\varphi_i'(x)\\ &+ \cdots + (-۱)^{k-۱}\frac{d^{r-k}}{dx^{r-k}}U_r(x)\varphi_i^{(k-۱)}(x)\end{aligned}$$

---
[۵] $Gagliardo - Nirenberg$