بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

رادیکال زیرمدول‌ها و ایده‌آل‌های اول وابسته

استاد راهنما:

دکتر ناصر زمانی

استاد مشاور:

دکتر محمدباقر مقیمی

دکتر جعفر اعظمی

پژوهشگر:

سیده خدیجه عظیمی اسمرود

دانشگاه محقق اردبیلی

مهر ۱۳۹۰

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی یکدار و M یک $R-$مدول یکانی باشد. در این پایان‌نامه به دنبال تجزیه‌ای از رادیکال یک زیرمدول مانند N از $R-$مدول M، به صورت یک اشتراک از زیرمدول‌های اول شناخته شده از M هستیم. برای رسیدن به این مطلب، نشان می‌دهیم که اگر M یک $R-$مدول مولد متناهی و $p=(N:M)$، آنگاه $cl_p(N)$ زیرمدول اول مینیمال روی N است و $p=(cl_p(N):M)$. همچنین درصورتی که R نوتری و $AP(radN)=\{p_۱,p_۲,...,p_n\}$، نشان می‌دهیم $radN=\ \cap_{i=۱}^{n}\ cl_{p_i}\ (N+p_iM)$.
بعلاوه برای هر ایده‌آل اول مینیمال p روی $(N:M)$، نشان می‌دهیم که p عضو مقطع اول‌های وابسته N و اول‌های وابسته $radN$ است. همچنین با معرفی اول‌های وابسته تعمیم یافته یک زیرمدول مانند N، نشان می‌دهیم اول‌های وابسته $radN$ زیرمجموعه‌ای از اول‌های وابسته تعمیم یافته N است. در نهایت ثابت می‌کنیم در صورتی که M مولد متناهی باشد $radN\ =\ \cap_{p_i\in GAP(N)}\ cl_{p_i}\ (N+p_iM)$.

کلید واژه : ایده‌آل اول وابسته، رادیکال زیرمدول، $p-$بستار

نام خانوادگی: عظیمی اسمرود **نام: سیده خدیجه**

عنوان پایان‌نامه: رادیکال زیرمدول‌ها و ایده‌آل‌های اول وابسته

استاد راهنما : دکتر ناصر زمانی

استادان مشاور: دکتر محمدباقر مقیمی و دکتر جعفر اعظمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی **گرایش:** جبر

دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰/۷/۷ **تعداد صفحه: ۷۷**

کلید واژه : ایده‌آل اول وابسته، رادیکال زیرمدول، p−بستار

چکیده : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی یکدار و M یک R−مدول یکانی باشد. در این پایان‌نامه به دنبال تجزیه‌ای از رادیکال یک زیرمدول مانند N از R−مدول M، به صورت یک اشتراک از زیرمدول‌های اول شناخته شده از M هستیم. برای رسیدن به این مطلب، نشان می‌دهیم که اگر M یک R−مدول مولد متناهی و $p = (N : M)$، آنگاه $cl_p(N)$ زیرمدول اول مینیمال روی N است و $p = (cl_p(N) : M)$. همچنین درصورتی که R نوتری و $AP(radN) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$، نشان می‌دهیم $radN = \cap_{i=1}^{n} cl_{p_i}(N + p_iM)$.
بعلاوه برای هر ایده‌آل اول مینیمال p روی $(N : M)$، نشان می‌دهیم که p عضو مقطع اول‌های وابسته N و اول‌های وابسته $radN$ است. همچنین با معرفی اول‌های وابسته تعمیم یافته یک زیرمدول مانند N، نشان می‌دهیم اول‌های وابسته $radN$ زیرمجموعه‌ای از اول‌های وابسته تعمیم یافته N است. در نهایت ثابت می‌کنیم در صورتی که M مولد متناهی باشد $radN = \cap_{p_i \in GAP(N)} cl_{p_i}(N + p_iM)$.

فهرست مندرجات

مقدمه

در سراسر این پایان‌نامه، R حلقه‌ای یکدار و جابجایی و M یک $R-$ مدول یکانی است. حلقه R لزوماً نوتری نیست و هر کجا نوتری باشد صریحاً قید خواهد شد. اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ و اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ و اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان خواهیم داد.

در سالهای اخیر کارهای نسبتاً زیادی در مورد زیرمدول‌های اول و رادیکال زیرمدول‌ها انجام شده است. بویژه برخی توصیفات صریح از رادیکال زیرمدولی مانند N در حالتی که حلقه نوتری باشد ارائه شده است.

زیرمدول‌های اول عمدتاً توسط افرادی مانند لو[۱]، اسمیت[۲]، مک‌کاسلند[۳]، مور[۴] و غیره مطالعه شده و منجر به نتایج جالبی در مورد شناسایی ساختار مدول‌ها شده‌اند.

رادیکال یک زیرمدول در سال ۱۹۸۰ توسط مک‌کاسلند ارائه شد. واضح است که مجموعه همه اعضای پوچ‌توان یک حلقه جابجایی یک ایده‌آل از آن است و مساوی است با مقطع تمام ایده‌آل‌های اول حلقه. این مطلب توسط مک‌کاسلند به مدول‌ها تعمیم داده شد.

روشی برای حساب کردن رادیکال زیرمدولی مانند N از یک مدول آزاد مانند F توسط مارسلو[۵] و رودریگز[۶]، در[۱۰] ارائه شده است.

[۱] Lu
[۲] Smith
[۳] McCasland
[۴] Moore
[۵] Marcelo
[۶] Rodriguez

در اینجا منظور از رادیکال N عبارت است از مقطع تمام زیرمدول‌های اول شامل N. یک مزیت چنین توصیفی از رادیکال یک زیرمدول مانند N از $R-$مدول M این است که امکان محاسبه بعد یکنواخت $\frac{M}{radN}$ را مقدور می سازد. برای دیدن جزییات بیشتر به[۱۸] مراجعه کنید.

هدف عمده در این پایان‌نامه شناسایی رادیکال N در یک مدول نوتری است به طوری که محاسبه آن به طور دستی در حالت‌های ساده و توسط محاسبات کامپیوتری در حالت‌های پیچیده، قابل حصول باشد. همچنین تجزیه‌ای از رادیکال یک زیرمدول به صورت مقطع تعداد متناهی زیرمدول اول شناخته شده، ارائه می‌دهیم. نتایج به دست آمده را با مثال تشریح خواهیم کرد.

محتوای این پایان‌نامه در چهار فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

فصل اول شامل تعاریف ومقدماتی است که در فصل‌های آتی مورد نیاز است.

در فصل دوم ایده‌آل‌های اول وابسته به یک زیرمدول را مورد بررسی قرار می‌دهیم و غیر از برخی نتایج دیگر نشان می‌دهیم که اگر R حلقه‌ای نوتری و N زیرمدول سره $R-$مدول مولد متناهی M باشد، آنگاه $radN = \cap_{i=1}^{n} cl_{p_i}(N + p_iM)$ یک تجزیه اول مینیمال است که در آن ایده‌آل‌های اول $p_1, p_2, ..., p_n$ طوری هستند که $AP(radN) = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. بعلاوه در حالتی که بعدکرول حلقه R متناهی باشد تحت شرایطی روی ایده‌آل اول p، توصیف صریحی از $cl_p(N)$ ارائه می‌دهیم.

درفصل سوم ایده‌آل‌های اول وابسته تعمیم یافته مورد مطالعه قرار می‌گیرند. همان طور که در فصل دوم دیده می‌شود $AP(N)$ و $AP(radN)$ می‌توانند دو مجموعه کاملاً متفاوت باشند. با این وجود در این فصل دیده خواهد شد که نوعی ارتباط بین این دو مجموعه وجود دارد. همچنین نشان می‌دهیم برخی موارد نوتری وجود دارند که اگر زیرمدول اولی شامل اشتراک

تعدادی از زیرمدول‌ها باشد، آنگاه باید شامل یکی از این زیرمدول‌ها باشد. همچنین در این فصل به کمک اول‌های وابسته تعمیم یافته تجزیه‌ای از $radN$ ارائه می‌دهیم.
در فصل چهارم نتیجه‌ای ارائه می‌دهیم که به طور مؤثر جمله‌های زایدی را که ممکن است در تجزیه ارائه شده در فصل سه موجود باشند، حذف می‌کند.
حذف زیرمدول‌های اول زاید در تجزیه‌ی اول (که لزوماً نرمال نیست)، تعیین عضوهایی از $GAP(N)$ را که عضو $AP(radN)$ نیستند، مقدور می‌سازد.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل تعاریف و مطالبی که در فصل‌های آتی مورد نیاز است، جمع آوری می‌کنیم.
فرض کنیم R حلقه‌ی یکدار جابجایی و M یک R ــ مدول یکانی باشد. به ازای هر دو زیرمدول N و L از M، نماد $(N :_R L)$ را برای نمایش $(\circ :_R \frac{L+N}{N})$ بکار خواهیم برد. بنابراین

$$(N :_R L) = \{r \in R \ \mid \ rL \subseteq N\}$$

ایده‌آلی از R است. بویژه $(\circ :_R M)$ پوچساز M را نشان می‌دهد. پوچساز M را با علامت $ann(M)$ و $(N :_R M)$ را با $(N : M)$ نیز نشان می‌دهیم. به طور مشابه فرض کنیم به ازای هر $s \in R$، $(N :_M s) = \{m \in M \ \mid \ sm \in N\}$.
نماد $\dim R$ بُعد (کرول) حلقه‌ی R را نشان می‌دهد که بنا به تعریف عبارت است از سوپریمم طول زنجیرهای ایده‌آل‌های اول R. در صورتی که این سوپریمم موجود نباشد $\dim R = \infty$. اگر p ایده‌آل اول R باشد قرار می‌دهیم $ht(p) = \dim R_p$. در حالت کلی اگر a ایده‌آل دلخواهی از R باشد

$$ht(a) = \min\ \{ht(p) \ \mid \ p \in Spec(R)\ , \quad a \subseteq p\}.$$

که در آن $Spec(R)$ نشان دهنده مجموعه همه ایده‌آل‌های اول R است.
اگر S زیر مجموعه بسته ضربی از R و N زیرمدول R ـ مدول M باشد، قرار می‌دهیم

$$cl_S(N) = \{x \in M \ \mid \ \exists s \in S\ ;\ sx \in N\}.$$

به راحتی دیده می‌شود که $cl_S(N)$ زیر مدولی از M شامل N است.
$cl_S(N)$ را S ــ بستار N در M خواهیم گفت. در حالتی که p ایده‌آل اول R و $S = R\backslash p$، $cl_S(N)$ را با $cl_p(N)$ را نشان خواهیم داد و به آن p ـ بستار N می‌گوییم.
می‌توان نشان داد که $cl_p(N) = \cup_{r\in R\backslash p}(N :_R r)$. برای دیدن این مطلب فرض

کنیم $m \in \cup_{r\in R\backslash p}(N :_R r)$. در این صورت $r \in R\backslash p$ وجود دارد که $m \in (N :_R r)$. بنابراین $mr \in N$ و از تعریف $cl_p(N)$ نتیجه می‌گیریم که $m \in cl_p(N)$. پس $\cup_{r\in R\backslash p}(N :_R r) \subseteq cl_p(N)$. حال فرض کنیم $m \in cl_p(N)$. بنابراین $r \in R\backslash p$ وجود دارد به طوری که $rm \in N$. پس $m \in (N :_R r) \subseteq \cup_{r\in R\backslash p}(N :_R r)$ و این نتیجه می‌دهد که

$$cl_p(N) \subseteq \cup_{r\in R\backslash p}(N :_R r).$$

چون در تمام این پایان‌نامه مفهوم زیرمدول‌های اول به کرّات استفاده خواهد شد، برای مناسبت، تعریف زیرمدول اول را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. زیرمدول سره P از R ـ مدول M را اول می‌گوییم هرگاه به ازای هر $r \in R$ و $x \in M$، شرط $rx \in P$ نتیجه بدهد که $r \in (P :_R M)$ یا $x \in P$.

در این صورت $p = (P :_R M)$ یک ایده‌آل اول R است.

نیز می‌توان دید که P یک زیرمدول اول M است اگر وتنها اگر به ازای هر $r \in R$ و هر زیر مدول K از M، $rK \subseteq P$ نتیجه بدهد که $r \in (P : M)$ یا $K \subseteq P$.

حال چند مثال از زیر مدول‌های اول بیان می کنیم.

مثال ۲.۱ هر زیر فضای سره از یک فضای برداری یک زیرمدول ۰ ـ اول آن است.

اثبات. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و U زیرفضای سره‌ای از V باشد. $r \in F$ و $v \in V$ را طوری در نظر می‌گیریم که $rv \in V$. چون $(U :_F V)$ ایده‌آلی از میدان F می‌باشد، لذا $(U :_F V) = F$ یا $(U :_F V) = ۰$.

اگر $(U :_F V) = F$، آنگاه $۱_F \in (U :_F V)$. پس $U = V$ که با سره بودن U در تناقض است. می توان فرض کرد $r \neq ۰$. در این صورت r دارای وارون است و چون $rv \in U$، پس داریم

$U \ni rv^{-1}r$. در نتیجه $v \in U$. بنابراین U زیرمدول اول V است. چون $(U :_F V) = 0$، پس U زیرمدول 0 ـ اول V است. ■

مثال ۳.۱ مجموعه اعداد گویا به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول تنها زیرمدول اولش 0 است.

اثبات. فرض کنیم $A = 0$ زیر مدولی از $\mathbb{Q}$ باشد. نشان می‌دهیم اول است. فرض کنیم $n \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{Q}$ باشند به طوری که $nq \in A$. بنابراین $nq = 0$. پس $n = 0$ یا $q = 0$. در نتیجه $q = 0$ یا $n\mathbb{Q} \subseteq A$ پس A زیر مدول اول $\mathbb{Q}$ است.

حال اگر $A \neq 0$ زیر مدول $\mathbb{Q}$ باشد نشان می‌دهیم اول نیست. فرض کنیم A زیر مدول اول $\mathbb{Q}$ باشد. چون $A \neq \mathbb{Q}$، لذا عضو $b = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad (n \neq 0 \ , \ m, n \in \mathbb{Z})$ وجود دارد به طوری که $b \notin A$. چون $A \neq 0$، عضو ناصفر $a = \frac{p}{q} \in A \quad (q \neq 0 \ , \ p, q \in \mathbb{Z})$ وجود دارد. می‌دانیم $p = q(\frac{p}{q}) \in A$ پس $p \in A$. چون $np \in \mathbb{Z}$ و $np\frac{m}{n} = pm \in A$، بنابراین $b \in A$ یا $np\mathbb{Q} \subseteq A$. چون $b \notin A$ پس $np\mathbb{Q} \subseteq A$، اما $\frac{m}{n^2p} \in \mathbb{Q}$. ولی $np(\frac{m}{n^2p}) = \frac{m}{n} \notin A$، که تناقض است. ■

مثال ۴.۱ $\mathbb{Z}(p^\infty)$ به عنوان $\mathbb{Z}$ ـ مدول، زیرمدول اول ندارد.

اثبات. فرض کنیم $P = \langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \rangle$ زیرمدول اولی از $\mathbb{Z}(p^\infty)$ باشد. $\frac{1}{p^{n+1}} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^\infty) \backslash P$، ولی $p\ (\frac{1}{p^{n+1}} + \mathbb{Z}) \in P$. بنابراین $p\ \mathbb{Z}(p^\infty) \subseteq P$. اما $p\ (\frac{1}{p^{n+2}} + \mathbb{Z}) = \frac{1}{p^{n+1}} + \mathbb{Z} \notin P$، که تناقض است. ■

مجموعه همه زیرمدول‌های اول M را با $Spec(M)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم R حوزه صحیح و M یک R ـ مدول باشد، در این صورت زیر مجموعه‌ی

$$T(M) = \{m \in M \ \mid \ \exists 0 \neq r \in R; \ rm = 0\}$$

از M یک زیرمدول آن می‌باشد. $T(M)$ را زیرمدول تابی می‌نامیم. همچنین اگر $T(M) = M$، M را تابدار و اگر $T(M) = 0$، M را فارغ از تاب می‌نامیم.

گزاره ۵.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول و N زیرمدول M باشد. در این صورت N یک زیرمدول اول M است اگر وتنها اگر $(N :_R M)$ ایده‌آل اول بوده و $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{(N:_R M)}-$ مدول فارغ از تاب باشد.

اثبات. $(\Longleftarrow)$ فرض کنیم $p = (N :_R M)$. نشان می‌دهیم $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{p}-$ مدول فارغ از تاب است. اولاً $p(\frac{M}{N}) = 0_{\frac{M}{N}}$ زیرا $p = (N :_R M)$، لذا $\frac{M}{N}$، $\frac{R}{p}-$ مدول است. ثانیاً $\frac{M}{N}$ فارغ از تاب است زیرا فرض کنیم $(r+p)(m+N) = N$ که $m \in M$ و $r \in R$. در این صورت $rm + N = N$ و در نتیجه $rm \in N$. بنابراین با توجه به اول بودن N داریم $m \in N$ یا $r \in (N :_R M)$. اگر $m \in N$، آنگاه $m + N = N$ و اگر $r \in (N :_R M)$، آنگاه $r \in p$ و در نتیجه $r + p = p$. لذا $\frac{M}{N}$ یک $\frac{R}{(N:_R M)}-$ مدول فارغ از تاب است.
$(\Longrightarrow)$ اولاً $M \neq N$ زیرا اگر $N = M$، آنگاه $(N :_R M) = R$ که تناقض است. حال فرض کنیم $rm \in M$ که $r \in R$ و $m \in M$. بنابراین $rm + N = N$. در نتیجه $(r+p)(m+N) = N$. چون $\frac{M}{N}$ یک مدول فارغ از تاب است، پس $r + p = p$ یا $m + N = N$. لذا $r \in p$ یا $m \in N$. بنابراین N زیرمدول اول M است. ■

تعریف ۶.۱. فرض کنیم R حوزه صحیح باشد. R ـ مدول M را بخش پذیر می‌نامیم هرگاه به ازای هر $0 \neq c \in R$، $M = cM$.

تعریف ۷.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه و M یک R ـ مدول باشد. زیرمدول N از M ماکسیمال نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمدول سره K از M که $N \subseteq K$، $N = K$.

لم ۸.۱ فرض کنیم M یک R ـ مدول و N زیرمدولی از M باشد که $p = (N : M)$. در این صورت N زیرمدول اول است اگر و تنها اگر به ازای هر $r \in R\backslash p$، $N = (N :_M r)$.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنیم N زیرمدول اول باشد. نشان می‌دهیم به ازای هر $r \in R\backslash p$، $(N :_M r) = N$. به وضوح $N \subseteq (N :_M r)$. فرض کنیم $m \in (N :_M r)$. در این صورت $rm \in N$. از طرفی $r \in R\backslash(N : M)$. چون N اول است بنابراین $m \in N$. در نتیجه $(N :_M r) \subseteq N$.

($\Longrightarrow$) فرض کنیم به ازای هر$r \in R\backslash p$ $(N :_M r) = N$. نشان می‌دهیم N زیرمدول اول است. فرض کنیم $r \in R\backslash p$ و $x \in M$ وجود دارند به طوری که $xr \in N$. چون $r \notin p = (N : M)$ نشان می‌دهیم $x \in N$. اگر $x \notin N = (N :_M r)$،آنگاه $xr \notin N$ و این تناقض است. در نتیجه N اول است. ■

گزاره ۹.۱ فرض کنیم p ایده‌آل اول R، M یک $R-$مدول و N زیرمدولی از M باشد که در بین زیرمدول‌های M مانند B که $(B : M) = p$، ماکسیمال است. در این صورت N زیرمدول اول است.

اثبات. چون p اول است بنابراین به ازای هر $r \in R\backslash p$، $((N :_M r) : M) = p$. زیرا $N \subseteq (N :_M r)$ و N ماکسیمال است پس $(N :_M r) = N$. حال از لم ۷.۱ نتیجه می‌شود که N اول است. ■

تعریف ۱۰.۱. زیرمدول سره Q از R ـ مدول M را اولیه می‌گوییم هرگاه به ازای هر $r \in R$ و $x \in M$، شرط $rx \in Q$ نتیجه بدهد که $r \in \sqrt{(Q :_R M)}$ یا $x \in Q$.

گزاره ۱۱.۱ اگر Q زیرمدول اولیه‌ی M باشد، آنگاه $(Q :_R M)$ ایده‌آل اولیه‌ی R است. در این حالت Q را $q = \sqrt{(Q :_R M)}$ ـ اولیه می‌گوییم.

اثبات. نشان می‌دهیم که به ازای هر $a, b \in R$ به طوری که $ab \in (Q :_R M)$ آنگاه $a \in (Q :_R M)$ یا $b \in \sqrt{(Q :_R M)}$.

فرض کنیم $a \notin (Q :_R M)$ نشان می‌دهیم $b \in \sqrt{(Q :_R M)}$. چون $a \notin (Q :_R M)$ بنابراین $m \in M$ وجود دارد به طوری که $am \notin Q$. از طرفی داریم $ab \in (Q :_R M)$، لذا $abm \in Q$. چون Q اولیه است پس باید داشته باشیم $b \in \sqrt{(Q :_R M)}$. ■

قابل ذکر است که اگر q یک ایده‌آل اولیه‌ی حلقه R باشد، آنگاه q به مفهوم بالا یک زیرمدول اولیه‌ی R ـ مدول R است. همچنین هر زیرمدول اول زیرمدول اولیه است. برای حلقه‌ی R و R ـ مدول M، ایده‌آل‌های اول وابسته به یک ایده‌آل R (زیرمدول M) به طور گسترده در جبر جابجایی مطالعه شده‌اند. در جبر جابجایی تعاریف متفاوتی از ایده‌آل‌های اول وابسته به یک ایده‌آل (زیرمدول) ارائه شده است.

برای دیدن بخشی از آن‌ها می‌توان به منابع [۲] و [۵] مراجعه کرد.

اگر N زیرمدول M باشد، ایده‌آل اول p را یک اول وابسته کرول[۱] برای N می‌گوییم هرگاه به ازای هر $t \in p$، عضو $x \in M$ وجود داشته باشد به طوری که $t \in (N :_R x) \subseteq p$.

ایده‌آل اول p را یک اول وابسته بورباکی ضعیف [۲] برای N گوییم هرگاه $x \in M \backslash N$ موجود باشد به طوری که p ایده‌آل اول مینیمال $(N :_R x)$ باشد.

ایده‌آل اول p را اول وابسته N می‌گوییم هرگاه $x \in M \backslash N$ موجود باشد به طوری که

[۱] Krull
[۲] Weakly bourbaki

$(N:_R x)=p$.

در بخشی از این پایان‌نامه به مطالعه اول‌های وابسته به زیرمدول‌ها، به ویژه وابسته به رادیکال زیرمدول‌ها علاقه‌مند هستیم. این مطالب شناخته شده است که در حلقه‌های نوتری سه تعریف ارائه شده در بالا با هم معادلند و بعلاوه اول‌های وابسته به یک ایده‌آل با اول‌های وابسته به رادیکال آن یکسانند. با وجود این در حالتی که با اول‌های وابسته به زیرمدول‌ها سروکار داریم موضوع نسبتاً پیچیده است.

با نماد گذاری [۱] اگر N زیرمدولی از R ـ مدول M باشد، مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول وابسته به N را با $AP_R(N)$ یا $AP(N)$ نشان خواهیم داد.

گزاره ۱۲.۱ اشتراک هر تعداد متناهی از زیرمدول‌های p ـ اول، p ـ اول است و اشتراک هر تعداد متناهی از زیرمدول‌های p ـ اولیه، p ـ اولیه است.

اثبات. فرض کنیم $N=N_1\cap\cdots\cap N_n$ که در آن N_i ها به ازای هر $1\leq i\leq n$، p ـ اولند. نشان می‌دهیم N نیز اول است. داریم

$$(\cap_{i=1}^{n}N_i:_R M)=\cap_{i=1}^{n}(N_i:_R M)=p.$$

حال برای هر $r\in R$ و $m\in M$ به طوری که $rm\in N$، فرض کنیم $m\notin N$. نشان می‌دهیم $r\in(N:_R M)$.

چون $m\notin N$ پس i ای وجود دارد به طوری که $1\leq i\leq n$ و $m\notin N_i$. از طرفی $rm\in N\subseteq N_i$ و N_i، p ـ اول است بنابراین

$$r\in(N_i:_R M)=p=(N:_R M).$$

اثبات قسمت دوم به طریق مشابه است. ■

فرض کنیم M یک R ـ مدول و N زیرمدولی از M باشد، می‌گوییم N دارای تجزیه اولیه است هرگاه $N = Q_۱ \cap Q_۲ \cap \cdots \cap Q_n$ که در آن به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، Q_i زیرمدول اولیه است.

تجزیه اولیه بالا را غیر زائد گوییم هرگاه به ازای هر $۱ \leq i \leq n$

$$N \neq Q_۱ \cap \cdots \cap Q_{i-۱} \cap Q_{i+۱} \cap \cdots \cap Q_n.$$

تجزیه اولیه‌ی غیر زائد $N = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_n$ نرمال است هرگاه به ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$، $i \neq j$، $\sqrt{(Q_i : M)} \neq \sqrt{(Q_j : M)}$.

قابل ذکر است که تجزیه اولیه نرمال را مینیمال یا کاهش یافته نیز می گویند.

توجه می کنیم که اگر N دارای تجزیه اولیه باشد، دارای تجزیه اولیه مینیمال نیز است.

فرض کنیم N زیرمدول M باشد. اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های اول M، شامل N را رادیکال N می گوییم و با نماد $rad(N)$ نشان می‌دهیم. اگر N مشمول هیچ زیر مدول اولی نباشد، قرار می‌دهیم $radN = M$. توجه می کنیم که این تعریف، با تعریف متداول رادیکال ایده آلی از R سازگار است.

مانند آنچه در حلقه‌های با تولید متناهی صادق است و آنچه لم زیر نشان می‌دهد، R ـ مدول‌های با تولید متناهی، دارای زیرمدول ماکسیمال و لذا دارای زیرمدول اول هستند که نتیجه می‌شود هر زیرمدول سره‌ی M مانند N، مشمول یک زیرمدول اول است. ولی در حالتی که M مولد متناهی نباشد، تعیین شرایطی که M دارای زیرمدول اول باشد کاملاً شناخته شده نیست. ثابت می‌شود که اگر R حوزه صحیح باشد و M دارای زیرمدول اول باشد، آنگاه M بخش‌پذیر نیست یا تابدار نیست.

لم ۱۳.۱ اگر $M \neq \circ$ یک R ـ مدول مولد متناهی باشد، آنگاه M دارای زیرمدول ماکسیمال است. به ویژه، هر زیر مدول سره از M مشمول یک زیرمدول اول است.

اثبات. قرار می‌دهیم $\sum = \{L \mid L \subsetneqq M\}$. در این صورت $\circ \in \sum \neq \emptyset$.
$(\sum, \subseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی است به طوری که هر زنجیر آن دارای کران بالاست. پس بنا به لم زورن $\sum$ دارای عضو ماکسیمال مانند P است. به وضوح P زیرمدول ماکسیمال است. نشان می‌دهیم P یک زیرمدول اول M است. فرض می‌کنیم $r \in R$ و $x \in M$ به طوری که $rx \in P$ و $x \notin P$. دراین صورت $P \subsetneqq P + Rx \subseteq M$.
چون P یک زیرمدول ماکسیمال است پس $P + Rx = M$. در نتیجه به ازای هر $m \in M$، $s \in R$ و $y \in P$ وجود دارد به طوری که $m = y + sx$. بنابراین $rm = ry + srx \in P$. درنتیجه $r \in (P :_R M)$. حال اگر N زیرمدول سره از M باشد، آنگاه بنا به آنچه ثابت شد، $\frac{M}{N} \neq \circ$ دارای زیرمدول اول مانند $\frac{P}{N}$ است. لذا P زیرمدول اول M شامل N است. ■

تعریف ۱۴.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه و M یک R ـ مدول باشد. زیرمدول اول N از M مینیمال نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمدول اول K از M که $K \subseteq N$، $K = N$.

هر زیرمدول اول M مانند P ، شامل یک زیرمدول اول مینیمال M است. برای دیدن این مطلب قرار می‌دهیم

$$\Lambda = \{ K \mid K \subseteq P, \text{ زیر مدول اول } M \text{ است } K \}.$$

در این صورت $P \in \Lambda \neq \emptyset$. حال $(\Lambda, \leq)$ که در آن $\leq$ عکس رابطه‌ی شمول است، یک مجموعه مرتب جزئی است. طبق لم زورن، Λ دارای عضو ماکسیمال است که این عضو زیرمدول اول مینیمال M است.

حال واضح است که $radN$، در واقع مقطع تمام زیرمدول‌های اول مینیمال N است.

در ادامه برای هر ایده‌آل R مانند $\underline{a}$، مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول R شامل $\underline{a}$ را با $V(\underline{a})$ نشان خواهیم داد.

گزاره ۱.۱۵ به ازای هر زیرمدول سره N از M داریم $AP(N) \subseteq V\big(N :_R M\big)$.

اثبات. با توجه به تعریف $AP(N)$ بدیهی است. ∎

گزاره ۱.۱۶ فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، M یک $R-$مدول و N زیرمدولی از M باشد که تجزیه اولیه دارد. در این صورت هر ایده‌آل اول مینیمال $(N :_R M)$ یک ایده‌آل اول وابسته N است.

اثبات. فرض کنیم $N = K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$ تجزیه نرمالی از N باشد که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، ایده‌آل اولی از R مانند p_i وجود دارد که K_i زیرمدول p_i-اولیه M است. در این صورت عدد صحیح مثبتی مانند k وجود دارد به طوری که به ازای هر $(1 \leq i \leq n)$، $p_i^k \subseteq (K_i :_R M)$. بنابراین $(p_1 \cdots p_n)^k \subseteq (N :_R M) \subseteq p_1 \cap \cdots \cap p_n$. فرض کنیم p ایده‌آل اول مینیمال دلخواه $(N :_R M)$ باشد. در این صورت $(p_1 \cdots p_n)^k \subseteq p$ و در نتیجه i ی $(1 \leq i \leq n)$، وجود دارد به طوری که $p_i \subseteq p$. بنابراین $p = p_i$. ∎

گزاره ۱.۱۷ فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، p یک ایده‌آل اول R، M یک $R-$مدول و N زیرمدولی از M باشد که تجزیه اولیه دارد. در این صورت عبارات زیر معادلند.

الف) p یک ایده‌آل اول وابسته N است.

ب) زیرمدولی از M مانند L وجود دارد به طوری که $L \nsubseteq N$ و $p = (N : L)$.

اثبات. **الف)** $\Longleftarrow$ **ب)** فرض کنیم $N = K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$ تجزیه نرمالی از N باشد که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، ایده‌آل اولی از R مانند p_i وجود دارد که K_i زیرمدول p_i-اولیه M

است. فرض کنیم به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $H_i = K_1 \cap \cdots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \cdots \cap K_n$. در این صورت عدد صحیح مثبتی مانند $k(i)$ وجود دارد به طوری که $p_i^{k(i)} M \subseteq K_i$. بنابراین $p_i^{k(i)} H_i \subseteq N$. حال چون $H_i \not\subseteq N$ بنابراین $t(i)$ ی وجود دارد به طوری که $1 \leq t(i) \leq k(i)$ و $p_i^{t(i)} H_i \subseteq N$ ولی $p_i^{t(i)-1} H_i \not\subseteq N$. فرض کنیم $L_i = p_i^{t(i)-1} H_i$. پس L_i زیرمدولی از M است که $L_i \not\subseteq N$ و $p_i L_i \subseteq N$.

فرض کنیم $a = (N : L_i)$ و توجه می‌کنیم که $p_i \subseteq a$. از طرفی $aL_i \subseteq N \subseteq K_i$. اگر $L_i \subseteq K_i$، آنگاه $L_i \subseteq N$ و این یک تناقض است. بنابراین $a \subseteq p_i$ و درنتیجه $p_i = (N : L_i)$.

ب) $\Longleftarrow$ **الف)** فرض کنیم زیرمدولی از M مانند L وجود دارد به طوری که $L \not\subseteq N$ و $p = (N : L)$. در این صورت i ی $(1 \leq i \leq n)$ وجود دارد به طوری که $L \not\subseteq K_i$. بدون خلل به کلیت مسئله می‌توان فرض کرد m ی$(1 \leq m \leq n)$ وجود دارد که $L \not\subseteq K_i \ (1 \leq i \leq m)$ و $L \subseteq K_i \ (m+1 \leq i \leq n)$. به وضوح $pL \subseteq N \subseteq K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_m$. در نتیجه $p \subseteq p_1 \cap p_2 \cap \cdots \cap p_m$. از طرفی عدد صحیح مثبت s ی وجود دارد به طوری که $(p_1 \cap p_2 \cap \cdots \cap p_m)^s M \subseteq K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_m$ و در نتیجه $(p_1 \cap p_2 \cap \cdots \cap p_m)^s L \subseteq N$. پس $(p_1 \cap p_2 \cap \cdots \cap p_m)^s \subseteq p$. همچنین داریم $p_1 \cap p_2 \cap \cdots \cap p_m \subseteq p$ و بنابراین $p = p_1 \cap p_2 \cap \cdots \cap p_m$. در نتیجه i ی $(1 \leq i \leq m)$ وجود دارد که $p = p_i$. ■

لم ۱۸.۱ فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری و S زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از R و M یک R–مدول باشد. در این صورت

$$AP_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \left\{ pS^{-1}R \ \mid \ p \cap S = \emptyset \ , \ p \in AP_R(M) \ \right\}.$$