همه‌ی امتیازهای این پایان نامه به دانشگاه بوعلی سینا تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب این پایان نامه در مجلات، کنفرانس ها و یا سخنرانی ها، باید نام دانشگاه بوعلی سینا(یا استاد راهنمای پایان نامه) و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت طبق مقررات برخورد خواهد شد.

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

گرایش جبر

عنــوان:

اندازه زیر گروه جا به جا گر در گروه های متناهی

اساتید راهنما:

دکتر اشرف دانشخواه

دکتر زهره مستقیم

پژوهشگر:

نسرین بهرام نژاد

پاییز ۱۳۸۸

تقدیم به

همسر مهربانم و

پدر و مادر عزیزم

قدر دانی

به نام آن که یادش مایه آرامش است.

سپاس و ستایش خدای را که بر بنده‌اش منت نهاد و خاک قدوم پویندگان علم و طریقت را توتیای روح و روان گمراه او قرار داد تا نور چشم بینش و ادراک را جهت دست یابی به افق های روشن حقیقت فزونی بخشد. از این که توانستم ورق هایی از دفتر عمر را به نام دانش مزین کنم، خداوند یکتا را شکرگزارم. اینک که توفیق تهیه و تدوین این مجموعه را یافته‌ام، بر خود لازم می‌دانم از تمام سرورانی که در این مدت از محضرشان کسب فیض و علم نموده‌ام، تشکر و قدردانی نمایم. استاد عزیزم در علم و اخلاق خانم دکتر دانشخواه که همواره باصحبت های روشنگرانه خود در به ثمر رساندن این پایان نامه راهنما و مشوق من بوده‌اند کمال تشکر را دارم. هم چنین از خانم دکتر مستقیم که در به ثمر رساندن این رساله مرا یاری نمودند سپاس گزارم. هم چنین از استاد محترم آقای دکتر سامعی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشته و از نقطه نظرات خویش مرا بهره مند ساختند، قدردانی می نمایم.

بر خود لازم می دانم از اساتید محترم گروه ریاضی و کارشناس گروه، سرکار خانم کاشفی تقدیر و تشکر کنم.

هم چنین تشکر و قدردانی ویژه خود را از خانواده‌ی عزیزم، که در تمام مراحل زندگی یاور و پشتیبان من بوده‌اند و تمام ناملایمات و سختی ها را صبورانه تحمل کرده‌اند، ابراز می کنم.

چکیده:

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این پایان نامه به بررسی اندازه‌ی زیر گروه جا به جا گر G می پردازیم. به عنوان مثال نشان می دهیم اگر G یک گروه غیر آبلی متناهی باشد به طوری که $\Phi(G) = 1$، آن گاه $|G'| > [G : Z(G)]^{\frac{1}{2}}$. هم چنین نشان می دهیم، اگر G یک گروه غیر آبلی از مرتبه‌ی $p^\alpha q^\beta$ به طوری که p و q اعداد اولی باشند که $p < q$ و $\alpha, \beta \geq 1$ و $\Phi(G) = 1$، در این صورت $|U(G)| \geq 2^{\frac{1}{2}}[G : Z(G)]^{\frac{1}{2}}$. با این شرط که $(p, q) \notin (2, \mathcal{M}) \cup (2, \mathcal{F})$.

واژه های کلیدی: زیر گروه جا به جا گر، مرکز، زیر گروه فراتینی

فهرست مندرجات

مقدمه

مفهوم «گروه» نخستین بار در سده‌ی نوزد هم معرفی شد. ولی ریشه های آن را می توان در گذشته های بسیار دور جستجو کرد. در سده‌ی هجد هم و اوایل سده‌ی نوز دهم دانشمندانی مانند لاگرانژ[۱]، آبل[۲]، گالوا [۳] و ژوردان[۴]، گروه، به معنای گروه جایگشتی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. اما تنها در اواخر سده‌ی نوز دهم بود که تعریف گروه با اصول مو ضوعه توسط کیلی[۵] و کرو نکر[۶] انجام گرفت. پس از آن دانشمندانی چون کلاین[۷] و بر نساید[۸] نظریه گروه ها را تو سعه دادند، به طوری که این نظریه نقش مهمی در همه‌ی شا خه های ریا ضیات و حتی در علوم دیگر مانند کریستال شناسی، فیزیک نظری و شیمی مو لکو لی ایفا نموده است. هدف نهایی نظریه گروه ها مشخص سازی تمام گروه ها با تقریب یکریختی است که این مهم در اواخر سده‌ی بیستم در مورد گروه های ساده ی متناهی به تحقق انجامید. همه‌ی گروه ها یی که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرند متناهی فرض می‌شوند و از نمادهای استاندارد $Z(G)$ و $\Phi(G)$ به ترتیب برای مرکز و زیرگروه فراتینی گروه G استفاده می‌کنیم و هم چنین از نماد $F(G)$ و $U(G)$ به ترتیب

---

[۱] J.Lagrange
[۲] N.H. Abel
[۳] E.Galois
[۴] C.Jordon
[۵] A.Cayley
[۶] L.Kronecker
[۷] F.Klein
[۸] W.Burnside

برای نمایش زیر گروه فیتینگ و زیر گروه پوچتوان مانده، یعنی کوچک ترین زیرگروه نرمال G به طوری که گروه خارج قسمتی آن پوچتوان باشد استفاده می‌کنیم. این پایان نامه شامل سه فصل است. فصل ا ول را به بیان تعاریف و قضایایی که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند اختصاص داده‌ایم. مراجع اصلی این فصل[۱۸] و [۱۹] می باشند.

در فصل دوم بعد از تعریف گروه های پوچتوان به وسیله پوچتوان و پوچتوان مانده، به مطالعه اندازه زیر گروه جا به جا گر در گروه های متناهی و توسیع گروه های پوچتوان و قضایای مربوط به آن ها می‌پردازیم. مرجع اصلی این فصل [۱۰]می باشد.

در فصل سوم با توجه به نتایجی که از فصل دوم به دست آوردیم، به بیان قضایای اصلی این پایان نامه می پردازیم. اخیراً دانشمندانی از جمله هرزوگ [۹] ثابت کردند، اگر G یک گروه غیربدیهی و از مرتبه فرد باشد به طوری که $\Phi(G) = Z(G) = ۱$، آن گاه $|G'| > |G|^{\frac{۲}{۵}}$. هم چنین نشان دادند برای یک گروه حلپذیر غیربدیهی G به طوری که $\Phi(G) = Z(G) = ۱$ داریم $|G'| > |G|^{\frac{۱}{۳}}$.

در این پایان نامه نشان می‌دهیم، اگر G یک گروه غیرآبلی متناهی باشد به طوری که $\Phi(G) = ۱$، آن گاه $|G'| > [G : Z(G)]^{\frac{۱}{۲}}$.

هم چنین نشان می‌دهیم، اگر G یک گروه غیرآبلی از مرتبه‌ی $p^{\alpha}q^{\beta}$ به طوری که p و q اعداد اولی باشند که $p < q$ و $\alpha, \beta \geq ۱$ و $\Phi(G) = ۱$، در این صورت $|U(G)| \geq ۲^{\frac{۱}{۲}}[G : Z(G)]^{\frac{۱}{۲}}$. با

[۹] M. Herzog

این شرط که $(p,q) \notin (۲,\mathcal{M}) \cup (۲,\mathcal{F})$ که در آن $\mathcal{M}$ و $\mathcal{F}$ به ترتیب مجموعه اعداد اول مرسن و اعداد اول فرما هستند. از جمله کسانی که در این زمینه کارکرده اند، هرزوگ و کاپلن [۱۰] و لوی[۱۱] می‌باشند. این پایان نامه مستخرج از مرجع [۱۱] است.

---

[۱۰] G. Kaplan

[۱۱] A. Lev

فصل ۱

مفاهیم اولیه

مقدمه

این فصل مشتمل بر نه بخش است. در بخش اول به معرفی پیشنیاز ها می پردازیم. بخش دوم به مطالعه‌ی عمل گروه و برخی مباحث و قضایای مربوط به آن اختصاص دارد. در بخش سوم به معرفی p گروه ها و در بخش چهارم به معرفی حاصل ضرب گروه ها می پردازیم. در بخش پنجم دسته‌ی وسیعی از گروه ها یعنی گروه های پوچتوان و حلپذیر را بررسی می کنیم و در بخش ششم به معرفی زیر گروه فیتینگ و فراتینی می‌پردازیم. در بخش هفتم نیز به معرفی گروه های فرو بنیوس می پردازیم.

در بخش هشتم گروه های خطی را مورد مطالعه قرار می دهیم و در بخش آخر نیز به مطالعه نظریه نمایش و سرشت گروه ها می پردازیم. در این فصل مطا لبی که به طور مستقیم در برهان قضایای فصل دوم و سوم مورد استفاده قرار گرفته، آورده

شده است. هم چنین فرض بر این است که خواننده با مفاهیم اولیه نظریه گروه ها آشنایی دارد. لازم به ذکر است که مراجع اصلی مورد استفاده در این فصل [۱۸] و [۱۹] می باشد.

۱.۱ پیشنیاز ها

در این بخش مفاهیمی از نظریه گروه ها را مرور خواهیم کرد. هدف از این بخش علاوه بر یادآوری، فراهم آوردن اصطلاحات، علامات و مقدماتی است که در بخش های بعد به آن نیاز داریم.

۱−۱ نکته. فرض کنیم G یک گروه و H زیر گروهی از آن باشد. در این صورت زیر گروه $\bigcap\limits_{x\in G} H^x$ را با نماد $Core_G(H)$ نمایش می دهیم وآن را مغز H در G می نامیم.

[۱۹، صفحه‌ی ۵]

۱−۲ نکته. $Core_G(H)$ بزر گ ترین زیر گروه نرمال G است، به طوری که مشمول در H است.

برهان: به ازای هر زیر گروه نرمال G مانند K به طوری که $K \leq H$ و برای هر $x \in G$ داریم $K^x \leq H^x$. در نتیجه $K \leq \bigcap H^x = Core_G(H)$، لذا $Core_G(H)$ بزرگ ترین زیر گروه نرمال G است که مشمول در H است. □

۱–۳لم.(قاعده دد کیند [1]) فرض کنیم A و B وC زیر گروه هایی از G باشند، به طوری که $B \leq A$، در این صورت

$$A \cap (BC) = B(A \cap C).$$

برهان: [۱۸، لم ۳.۷] $\square$

۱–۴لم. فرض کنیم A و B وC زیر گروه هایی از G باشند، به طوری که $B \trianglelefteq A \leq G$ و $C \trianglelefteq G$. در این صورت

$$BC \trianglelefteq AC.$$

برهان: [۱۸، لم ۴.۷] $\square$

۱–۵ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. زیرگروه H را یک زیرگروه مشخّصِ G می نامیم در صورتی که به ازای هر خودریختی G مانند φ، $(H)\varphi \leq H$ که در آن

$$(H)\varphi = \{(h)\varphi \mid h \in H\}$$

به آسانی معلوم می شود که اگر H زیر گروه مشخّصِ G باشد، آن گاه به ازای هر خود ریختی G مانند φ، $(H)\varphi = H$. هر گاه H زیر گروه مشخّصِ G باشد، می نویسیم $H\ ch\ G$.

[1] Dedekind Rule

[۱۹، صفحه‌ی ۹]

۱-۶ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد و $K \leq H \leq G$. در این صورت

۱) اگر $K\ ch\ H$ و $H\ ch\ G$، آن گاه $K\ ch\ G$.

۲) اگر $H \lhd G$ و $K\ ch\ H$، آن گاه $K \lhd G$.

برهان: [۱۹، قضیه‌ی ۵.۱.۱] $\square$

۱-۷ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه نرمال غیربدیهی H را زیرگروه نرمال مینیمال G گوییم هر گاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمال G به جز خود H و ۱ نباشد. به عبارت دیگر، هرگاه $N \lhd G$ و $N \subseteq H$، آن گاه $N = H$ یا $N = ۱$.

[۱۹، صفحه‌ی ۱۰۴]

به آسانی می توان دید هر گروه متناهی غیر بدیهی، دارای یک زیر گروه نرمال مینیمال است.

۱-۸ تعریف. فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی باشد، زیرگروه سره M از گروه G را ماکسیمال نامیم هرگاه برای هر $M \leq H \leq G$ نتیجه شود $H = M$ یا $H = G$.

[۱۹، صفحه‌ی ۹]

۱-۹ تعریف. فرض کنیم G یک گروه و H یک زیر گروه سره و نرمال در G باشد. گوییم H نرمال ماکسیمال است، اگر برای هر $L \trianglelefteq G$ که $H \leq L \leq G$ داشته باشیم $H = L$ یا$G = L$.

[۱۸، صفحه‌ی ۱۴۴]

۱—۱۰ مثال. $A_۳$ زیر گروه نرمال مینیمال $S_۳$ است. $A_۳$ زیر گروه نرمال ماکسیمال $S_۳$ نیز است.

۱—۱۱ تعریف. گروه غیر بدیهی G را مشخصاً ساده گوییم، در صورتی که تنها زیرگروه های مشخّصِ آن ۱ و G باشند.

[۱۹، صفحه‌ی ۱۰۶]

۱—۱۲ نکته. فرض کنیم H زیرگروه نرمال مینیمال از G باشد. در این صورت H مشخصاً ساده است.

برهان: فرض کنیم K زیرگروه مشخّصِ H باشد. در این صورت بنابر قضیه‌ی ۱—۶، $K \lhd G$. از آن جایی که H زیرگروه نرمال مینیمال G است، لذا $K = ۱$ یا $K = H$. بنابراین H زیرگروه مشخّصِ غیربدیهی ندارد، لذا H مشخصاً ساده است. □

در این بخش هم چنین به معرفی زیر گروه جا به جا گر می پردازیم. در واقع به هر گروه دلخواه G یک سری مشتق، نظیر می کنیم که در مطالعه‌ی گروه های حلپذیر بسیار مفید است.

۱—۱۳ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و A و $B \leq G$. زیر گروه

$$< [a,b] \mid a \in A, b \in B >$$

از G را زیر گروه تعویض گر A و B می نامیم و آن را با علامت $[A,B]$ نشان می دهیم.

[۱۹، صفحه‌ی ۲۲۰]

۱−۱۴ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت زیرگروه مشتق G که با G' نشان داده می‌شود را چنین تعریف می‌کنیم:

$$G' = [G,G] = < x^{-1}y^{-1}xy : x,y \in G >$$

به این زیرگروه، زیرگروه جابه جا گر نیز گفته می‌شود و به طور کلی مشتق مرتبه n ام G را چنین تعریف می‌کنیم: $G^{(0)} = G$ و $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$ که در آن $n \geq 1$.

[۱۹، صفحه‌ی ۲۵۷]

۱−۱۵ تعریف. در تعریف فوق اگر $G' = G$ ، گروه G را تام گوییم.

[۱۹، صفحه‌ی ۹]

۱−۱۶ مثال. A_n ها به ازای هر $n \geq 5$ گروه تام هستند.

۱−۱۷لم. فرض کنیم $H,K \leq G$. در این صورت

۱) $[H,K] = [K,H]$.

۲) اگر $H_1 \leq H$ و $K_1 \leq K$، آن گاه $[H_1,K_1] \leq [K,H]$.

۳) اگر $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$، آن گاه $[H,K] \trianglelefteq G$.

۴) $[H,K] = 1$ اگر و تنها اگر هر عضو H با هر عضو K جا به جا شود.

برهان: [۱۹، صفحه‌ی ۲۲۰] $\square$

۱—۱۸ نکته. فرض کنیم N زیرگروه نرمال G باشد و ۱ $= N\cap G'$، در این صورت $N \subseteq Z(G)$.

برهان: برای هر $y \in N$ و $x \in G$ داریم، ۱ $y^{-1}x^{-1}yx \in N \cap G' =$ لذا $yx = xy$. در نتیجه $N \subseteq Z(G)$. $\square$

۱—۱۹ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد، اگر $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت $[H,K] \leq H \cap K$.

برهان: [۱۸، لم ۵۳.۳] $\square$

۱—۲۰ لم. فرض کنیم G یک گروه و $H \leq K \leq G$. در این صورت به ازای هر $n \in N$ داریم:

$$H^{(n)} \leq K^{(n)}.$$

برهان: [۲۰، لم ۱۴.۴] $\square$

۱—۲۱ لم. فرض کنیم G یک گروه و $N \trianglelefteq G$. در این صورت برای هر $n \in N$ داریم:

$$(\frac{G}{N})^{(n)} = \frac{G^{(n)}N}{N}.$$

برهان: [۲۰، لم ۱۴.۴] $\square$

این بخش را با بیان چند لم در مورد خود ریختی های یک گروه به پا یان می رسا نیم.

یادآوری می کنیم که هر یکریختی $f: G \to G$ یک خود ریختی از G نامیده می شود و مجموعه‌ی تمام خود ریختی های گروه G را با $Aut(G)$ نشان می دهیم.

اگر $a \in G$ باشد، آن گاه نگاشت $\varphi_a : G \to G$ که برای هر $x \in G$ به صورت $(x)\varphi_a = axa^{-1}$ تعریف می شود، یک خود ریختی ازG است که آن را خود ریختی داخلی متناظر با a از G گوییم و مجموعه‌ی تمام خود ریختی های داخلی G رابا $Inn(G)$ نمایش می دهیم.

به سادگی می توان ثابت کرد که $Inn(G)$ زیر گروه نرمال از $Aut(G)$ می باشد. پس گروه خارج قسمتی $\frac{Aut(G)}{Inn(G)}$ موجود است که آن را گروه خود ریختی های خارجی G نامیده و با نماد $Out(G)$ نمایش می دهیم.

۱ــ۲۲لم. اگر G یک گروه باشد، آن گاه $Inn(G) \cong \frac{G}{Z(G)}$.

برهان: [۲۱، قضیه‌ی ۱۰.۱۲.۳] $\square$

اگر G یک گروه ساده و غیر آبلی باشد، داریم $Z(G) = 1$ یا $Z(G) = G$. از آن جا که G غیر آبلی است لذا $Z(G) = 1$. از طرفی بنا بر لم ۱ــ۲۲، $Inn(G) \cong \frac{G}{Z(G)}$ پس $G \cong Inn(G)$. از طرفی بنا بر یادآوری بالا $Out(G) = \frac{Aut(G)}{Inn(G)}$. بنا بر این $Out(G) \cong \frac{Aut(G)}{G}$. یعنی می توانیم G را به عنوان زیر گروهی از $Aut(G)$ در نظر بگیریم.

۱—۲۳لم. اگر G گروهی ساده و غیر آبلی باشد، آن گاه $Out(G) \cong \frac{Aut(G)}{G}$ و اگر G گروهی ساده و آبلی باشد، آن گاه $Out(G) \cong Aut(G)$

برهان: [۲۱، قضیه‌ی ۱۰.۱۲.۳] □

۲.۱ عمل گروه

در این بخش به معرفی عمل یک گروه بر مجموعه می پردازیم. اعمال گروهی ابزار توانایی در اثبات بعضی از قضیه های نظریه‌ی گروه ها می باشند. هم چنین مفاهیمی از نظریه گروه ها، تعاریف و قضایای مورد نیاز را ارائه می کنیم.

۱—۲۴ تعریف. فرض کنیم X مجموعه ای نا تهی باشد. هر تناظر ۱ − ۱ مانند $f : X \to X$ را یک جایگشت X گویند. مجموعه‌ی همه‌ی جایگشت های X با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می دهد. این گروه را گروه متقارن بر X می خوانند و آن را با S_X نشان می دهند.

[۱۹، صفحه‌ی ۹]

۱—۲۵ تعریف. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه ای ناتهی باشد. فرض کنیم به ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با $g \bullet x$ نشان می دهیم وجود داشته باشد به طوری که

۱) به ازای هر $x \in X$ ، $x \bullet 1 = x$.

۲) به ازای هر $g_1, g_2 \in G$ و هر $x \in X$، $x \bullet (g_1 g_2) = (x \bullet g_1) \bullet g_2$.

در این صورت گوییم گروه G بر X عمل می کند و $\bullet$ راعمل G بر X گوییم. ومی نویسیم $(G|X)$.

برای سهولت در نوشتن به جای $x \bullet g$ معمولاً خوا هیم نوشت xg.

[۱۹، صفحه‌ی ۲۵]

۱–۲۶نکته. یک گروه به دو طریق مهم روی خود عمل می کند. یکی عمل منتظم است که برای هر $g \in G$ و x، $x \bullet g = xg$ تعریف می شود. عمل مهم دیگر G بر خود، عمل تزویج است که در آن $x \bullet g = x^g = g^{-1}xg$.

[۱۹، صفحه‌ی ۲۵]

۱–۲۷ تعریف. فرض کنیم گروه G بر مجموعه X عمل کند و$g \in G$ و$x \in X$. گوییم g عضو (یا نقطه‌ی) x را ثابت نگه می دارد هر گاه $x^g = x$. مجموعه‌ی اعضایی ازG را که هر عضو X راثابت نگه می دارند، هسته‌ی عمل می نامیم.

[۱۹، صفحه‌ی ۲۵]

۱–۲۸ تعریف. فرض کنیم گروه G بر مجموعه X عمل کند. را بطه‌ی $\sim$ را در X چنین تعریف می کنیم:

گوییم $x_1 \sim x_2$، در صورتی که به ازای عضوی از G مانند g داشته باشیم، $x_1 g = x_2$. رابطه $\sim$