بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی (آنالیز)

موجک های دوگان متعامد اسپلاینی

توسط:

شهرزاد خلوصی

استاد راهنما:

دکتر عبدالعزیز عبدالهی

شهریور ماه ۱۳۸۶

به نام خدا

موجک‌های دوگان متعامد اسپلاینی

به وسیله‌ی:

شهرزاد خلوصی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: ....عالی...............

دکتر عبدالعزیز عبدالهی، دانشیار ریاضی ....

دکتر محسن تقوی، دانشیار ریاضی ....

دکتر کریم هدایتیان، دانشیار ریاضی ....

شهریور ماه ۱۳۸٦

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم و برادر مهربانم

سپاسگزاری

خدای خوبم را سپاسگزارم که بر من منت نهاد تا اندکی خوشه چین راه علم و معرفت باشم و سعادت حضور در مکتبی از علم را نصیب من نمود که مزین به نام عالم‌ترین بشر، مهدی موعود (عج) است. هر چند که «دراز است ره مقصد و من نوسفرم».

در پرتو لطف الهی از راهنمایی استاد ارجمندم، دکتر عبدالهی، بهره‌مند بوده‌ام. در این صفحات هر چه کاستی است از من است و هر چه منسوب به ایشان است، با ارزش. اساتید محترم، دکتر تقوی و دکتر هدایتیان با دقت نظر داوری این پایان‌نامه را برعهده داشته‌اند. ضمن سپاس از ایشان و همه آنانی که وجودم را به آموختن حرفی آراستند، از تمام معلمان تحصیلم سپاسگزارم.

سپاسگزارم از مهربان‌ترین معلمان زندگی‌ام، پدر و مادرم، کسانی که شعر زندگی‌ام ترنم آهنگ مهربانی آنان است و از نگاهشان چگونه زیستن را آموخته‌ام. عزیزانی که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت. آنانی که امروزم را مدیون سال‌ها مهر و عشق بی‌دریغشان هستم و آن چه امروز به دستشان می‌سپارم تحفه‌ایست ناچیز. من مدیون خوبی‌های برادرم، عزیزترین همراه زندگی‌ام هستم. حضورش در زندگی‌ام مصداق بی‌ریای مهر و لطف است.

از یاران و همدمان، خوبانی که در لحظات این دوره با من شریک بودند و مرا مدیون خوبی‌ها و دوستی‌هایشان نمودند، سپاسگزارم. خاطره‌ی خوبی‌هایشان در ذهنم جاودان است.

مهربان خدا، سعادتی بالاتر از خدمت به بندگان تو نیست. این افتخار را نصیب من نما. مرا در مقام شاکرین که همان مخلصین درگاهت هستند، قرار ده.

چکیده

موجک‌های دوگان متعامد اسپلاینی

بوسیله‌ی:

شهرزاد خلوصی

تعریف: $\varphi(t)$ را تابع مقیاس متعامد با درجه‌ی تقریبی $p-1$ گویند هرگاه در معادله‌ی تظریف $\varphi(t)=\sum_k c_k\varphi(2t-k)$ صدق کند و برای ضرایب تظریف آن خواص زیر برقرار باشد.

$$(i)\qquad c_k=0, k\notin\{0,1,...,2p-1\};\qquad (ii)\sum_k c_k=2;$$
$$(iii)\qquad \sum_k(-1)^k k^m c_k=0,\qquad 0\leq m\leq p-1;$$
$$(iv)\qquad \sum_k c_k c_{k-2m}=2\delta_{0m},\qquad 1-p\leq m\leq p-1$$

به طور کلی هدف از این پایان‌نامه، ساخت توابع مقیاس اسپلاینی $\bar{\varphi}_n$ است که از ضرب پیچشی φ و تابع B_اسپلاین از مرتبه n، به صورت $\bar{\varphi}_n=\varphi*B_n$ بدست می‌آیند. در فصل سوم از این پایان‌نامه نشان خواهیم داد که $\bar{\varphi}_n$ یک تابع مقیاس با درجه‌ی تقریبی $p+n-1$ است و معادله‌ی تظریف آن را بدست می‌آوریم. اما نشان می‌دهیم که شرط (iv)، موسوم به شرط تعامد، لزوماً به وسیله‌ی $\bar{\varphi}_n$ حفظ نمی‌شود، از این رو توابع مقیاس دوگان متعامد و موجک‌های دوگان متعامد از $\bar{\varphi}_n$ را در فصل چهارم، خواهیم ساخت و سرانجام با ذکر مثال‌هایی از این نوع موجک، به بحث خاتمه می‌دهیم.

فهرست

عنوان | صفحه

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱ – پیش‌نیازها

۱–۱ نکاتی در مورد فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۱: یک ضرب داخلی[1] روی فضای برداری مختلط V یک تابع $\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ است که دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) مثبت بودن: برای هر $\circ \neq v \in V$، $\langle \nu, \nu \rangle > \circ$.

۲) مزدوج متقارن: برای هر $\nu, \omega \in V$، $\overline{\langle \nu, \omega \rangle} = \langle \omega, \nu \rangle$.

۳) همگن: برای هر $\nu, \omega \in V$ و اسکالر $c \in \mathbb{C}$، $\langle c\nu, \omega \rangle = c\langle \nu, \omega \rangle$.

۴) جمعی: برای هر $u, \nu, \omega \in V$، $\langle \nu + u, \omega \rangle = \langle \nu, \omega \rangle + \langle u, \omega \rangle$.

تعریف ۲.۱: به یک فضای برداری همراه با ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی می‌گوییم.

تعریف ۳.۱: اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد،

۱) بردارهای u و ν در V را متعامد گویند اگر $\langle u, \nu \rangle = \circ$.

۲) مجموعه بردارهای $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ را متعامد یکه گویند اگر $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است.

[1] inner product

۳) دو زیر فضای $V_۱$ و $V_۲$ را متعامد گوییم اگر هر بردار در $V_۱$ بر هر بردار در $V_۲$ عمود باشد.

تعریف ۴.۱: هر فضای ضرب داخلی که تحت متر تولید شده توسط ضرب داخلی، یعنی

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

کامل باشد را فضای هیلبرت[۲] می‌گوییم. کامل بودن بدین معنی است که هر دنباله کوشی در آن فضا همگراست.

تعریف ۵.۱: فضای $L^۲(\mathbb{R})$، گردایه همه توابع اندازه‌پذیر[۳] f بر $\mathbb{R}$ است که $\int_{\mathbb{R}} |f|^۲ d\mu < \infty$.

در این نوشته منظور از μ اندازه لبگ[۴] است.

ضرب داخلی روی $L^۲(\mathbb{R})$ برای هر f و g متعلق به $L^۲(\mathbb{R})$ به صورت

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)d\mu$$

می‌باشد.

تعریف ۶.۱: در این پایان‌نامه، منظور از یک سیگنال[۵] تابعی در فضای $L^۲(\mathbb{R})$ است.

قضیه ۷.۱: (اتحاد پارسوال[۶]): برای هر $f \in L^۲[۰, ۲\pi]$، که $f = \sum_k c_k f_k$ است، داریم:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| = \|f\|_۲^۲$$

---

۲ Hilbert space
۳ measurable function
۴ lebesgue measure
۵ signal
۶ parsval's identity

برهان: به مرجع [۱۱] مراجعه شود.

قضیه ۸.۱: (نامساوی کوشی_شوارتز[۷]): فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. آن‌گاه برای هر $x, y \in H$،

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

به ویژه برای فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$، اگر $f, g \in L^2(\mathbb{R})$، آن‌گاه

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

همچنین اگر $\{b_n\}_{n\in Z} \in L^2(\mathbb{Z})$ و $\{a_n\}_{n\in Z}$، آن‌گاه

$$\left|\sum_{n\in Z} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n\in Z} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\in Z} |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

برهان: به مرجع [۱۱] مراجعه شود.

تعریف ۹.۱: (عملگرهای انتقال و اتساع روی $L^2(\mathbb{R})$ [۸]):

عملگر یکانی انتقال $T_a : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(T_a f)(x) = f(x - a)$$

همچنین عملگر یکانی اتساع $D_b : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ عبارت است از

$$(D_b f)(x) = \sqrt{b} f(bx)$$

[۷] cauchy-Schwarz inequality

[۸] Transalation and dilation operators on $L^2(\mathbb{R})$

۱—۲ آنالیز فوریه

تعریف ۱۰.۱: تبدیل فوریه تابع $f \in L^1(I\!R) \cap L^2(I\!R)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{f}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\varepsilon x} dx$$

و همچنین تبدیل فوریه معکوس به صورت

$$\check{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) e^{i\varepsilon x} d\varepsilon,$$

می‌باشد.

قضیه ۱۱.۱: اگر f و g توابع مشتق‌پذیر روی $I\!R$ باشند که برای $|x|$های بزرگ $f(x) = 0$، آن گاه:

۱) تبدیل فوریه و معکوس آن عملگرهایی خطی هستند، یعنی برای هر ثابت c داریم:

$$(\widehat{f+g}) = \hat{f} + \hat{g} \quad , \quad (\hat{cf}) = c\hat{f}$$

$$(f \check{+} g) = \check{f} + \check{g} \quad , \quad (\check{cf}) = c\check{f}$$

۲) $$(\widehat{x^n f(x)})(\varepsilon) = i^n \frac{d^n}{d\varepsilon^n}\{\hat{f}(\varepsilon)\}$$

۳) $$(x^n \check{f}(x))(\varepsilon) = (-i)^n \frac{d^n}{d\varepsilon^n}\{\check{f}(\varepsilon)\}$$

برهان: به مرجع [۲۴] مراجعه شود.

قضیه ۱۲.۱: (پلانشرل[۹]) اگر f و g توابعی متعلق به $L^2(I\!R)$ باشند، آن گاه

$$\frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2} = \langle f, g\rangle_{L^2}.$$

[۹] plancherel

برهان: به مرجع [۲۴] مراجعه شود.

قضیه بالا بیان می‌کند که تبدیل فوریه، ضرب داخلی L^{2} را حفظ می‌کند.

قضیه ۱.۱۳: برای $f \in L^{1}(\mathbb{R})$ داریم:

الف) $\hat{f}$ پیوسته و کراندار است و $\lim_{|\omega|\longrightarrow\infty} \hat{f}(\omega) = 0$. (لم ریمان_لبگ [۱۰])

ب) برای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\widehat{T_a}f(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$$

پ) برای هر $b > 0$ داریم:

$$\widehat{D_b}f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{b}}\hat{f}(\frac{\omega}{b})$$

ت) اگر $f \in L^{1}(\mathbb{R})$ آن گاه:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

ج) $[\check{\hat{f}}] = f$

برهان: به مرجع [۲۴] مراجعه شود.

۱—۳ موجک‌ها و آنالیز چند ریزه‌ساز

در بحث موجک‌ها [۱۱] دو تابع نقش اساسی دارند، یکی تابع مقیاس [۱۲] که معمولاً با φ نمایش داده می‌شود و به موجک پدر معروف است و دیگری تابع موجک که با ψ نمایش داده می‌شود و به آن موجک مادر نیز می‌گویند.

تعریف ۱.۱۴: تابع ψ یک موجک است اگر $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^{j}x-k) \mid j,k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^{2}(\mathbb{R})$ باشد.

[۱۰] Riemann-lebesgue Lemma
[۱۱] Wavelet
[۱۲] Scaling function

تعریف ۱.۱۵: یک آنالیز چندریزه‌ساز برای $L^{2}(\mathbb{R})$ یک دنباله $\{V_n\}_{n\in Z}$ از زیرفضاهای بسته خطی $L^{2}(\mathbb{R})$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$MRA1$ – برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $V_n \subset V_{n+1}$.

$MRA2$ – برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $f(.) \in V_n$ اگر و تنها اگر $f(2.) \in V_{n+1}$.

$MRA3$ – $\overline{\bigcup_{n\in Z} V_n} = L^{2}(\mathbb{R})$.

$MRA4$ – $\bigcap_{n\in Z} V_n = \{0\}$.

$MRA5$ – تابعی مانند $\varphi \in V_0$ وجود دارد به طوری که خانواده $\{\varphi(. - n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد برای V_0 است.

نکته ۱.۱۶: به راحتی از شرط $MRA5$، دریافتیم که انتقال‌های تابع $\varphi(.)$ یک پایه متعامد یکه برای V_0 است. حال با در نظر گرفتن این شرط و شرط $MRA2$، به این نتیجه می‌رسیم که انتقال‌های $\varphi(2.)$ یک پایه متعامد برای V_1 است؛ همچنین با m– بار استفاده از شرط $MRA2$، پایه بودن انتقال‌های $\varphi(2^{m}.)$ را برای فضای V_m خواهیم داشت.

نکته ۱.۱۷: با توجه به تو در تو بودن فضاهای V_m، اگر یک سیگنال را با تابعی در V_k تقریب بزنیم، با افزایش مقدار k نه تنها هیچ اطلاعاتی از آن تابع از بین نمی‌رود، بلکه جزئیات بیشتری از آن آشکار می‌شود و در نهایت، با توجه به شرط $MRA3$، تابع تقریبی با سیگنال اولیه در بی‌نهایت یکی خواهد شد.

برای تشکیل یک آنالیز چندریزه‌ساز روش‌های متفاوتی وجود دارد. دو روش در زیر پیشنهاد شده است:

۱) ابتدا سعی می‌کنیم به طریقی دنباله‌ای از زیرفضاهای $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را تعریف کنیم. اغلب از V_0 شروع کرده و آن را به صورت $\overline{span}\{g(. - n) : n \in \mathbb{Z}\}$، که g یک تابع مشخص است،

تعریف می‌کنیم و سپس از رابطه $V_n = D_{۲}^{n} V_{۰}$، برای $n \in \mathbb{Z}$ سایر V_nها را بدست می آوریم. معمولاً شرایط $MRA۱$ تا $MRA۴$ به راحتی برآورده می‌شوند و تنها باید یک تابع مقیاس بیابیم که در شرط $MRA۵$ صدق کند.

۲) با توجه به اینکه تبدیل فوریه تابعی یک به یک است، تابع $\hat{\varphi}$ مناسبی را می‌یابیم که تبدیل فوریه شرایط $MRA۱$ تا $MRA۵$ برقرار باشد و سپس آنالیز چندریزه‌ساز را تشکیل می‌دهیم.

اگر $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک آنالیز چندریزه ساز برای $L^{۲}(I\!R)$ باشد، بنابر شرط $MRA۱$، برای $n \in \mathbb{Z}$ داریم: $V_n \subset V_{n+۱}$. فرض کنیم

$$W_n = \{f \in V_{n+۱} : f \perp V_n\},$$

در این صورت $W_n = V_{n+۱} \oplus W_n$. یعنی هر $f \in V_{n+۱}$ را می‌توان به صورت یکتای $f = f_n + g_n$ که $f_n \in V_n$ و $g_n \in W_n$ است، نوشت. بنابر تعریف W_nها برای $j < n$،

$$W_j \subset V_{j+۱} \subset V_n \quad , \quad W_n \perp V_n$$

در نتیجه برای $j \neq n$، $W_n \perp W_j$. بنابراین

$$\begin{aligned} V_{n+۱} &= V_n \oplus W_n \\ &= V_{n-۱} \oplus W_{n-۱} \oplus W_n \\ &\vdots \\ &= \cdots \oplus W_{n-۲} \oplus W_{n-۱} \oplus W_n = \bigoplus_{j=-\infty}^{n} W_j. \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

چون $\overline{\bigcup_{u\in\mathbb{Z}} V_n} = L^{۲}(I\!R)$،

$$L^{۲}(I\!R) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \oplus W_n \qquad (۱-۱)$$

در این جا هماهنگ با تعریف (۱۴.۱) برای $j,k \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم:

$$\psi_{j,k} := D_{۲^j} T_k \psi = ۲^{\frac{j}{۲}} \psi(۲^j x - k).$$

تساوی (۱−۱) نشان می‌دهد که برای یافتن یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R})$ کافی است برای هر W_n، پایه متعامد یکه‌ای بیابیم. بنابراین یافتن تابعی مانند ψ، که مجموعه‌ی $\{\psi_{j,k} \quad j,k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R})$ باشد، به یافتن تابع ψ به طوری که $\{\psi_{n,m} : m \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه برای W_n باشد، تقلیل می‌یابد.

تعریف ۱۸.۱: به متمم متعامد فضای V_{j-1} در V_j، که با W_{j-1} نمایش می‌دهیم، فضای موجکی گوییم.

تعریف ۱۹.۱: به هر یک از زیرفضاهای بسته خطی $L^2(\mathbb{R})$ که در تعریف آنالیز چندریزه ساز صدق کنند، یک فضای مقیاس گوییم.

تعریف ۲۰.۱: یک تابع مقیاس برای آنالیز چندریزه‌ساز $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$، به تابع φ گفته می‌شود که در شرط $MRA5$، از تعریف آنالیز چندریزه ساز، به آن اشاره شد.

قضیه ۲۱.۱: فرض کنید $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ یک آنالیز چندریزه‌ساز برای $L^2(\mathbb{R})$ و همچنین $\{\psi(x-n) : n \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه برای $W_0 = V_1 \cap V_0^{\perp}$ باشد. آن گاه:

الف) برای هر $m \in \mathbb{Z}$، $\{\psi_{m,n} : n \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه برای $W_m = V_{m+1} \cap V_m^{\perp}$ است.

ب) $\{\psi_{m,n} : m,n \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R})$ است، یعنی ψ یک موجک است.

برهان: به مرجع [۳] مراجعه شود.

قضیه ۲۲.۱: فرض کنید $\{V_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ یک آنالیز چندریزه‌ساز با تابع مقیاس $\varphi(x) = \sum_k p_k \varphi(2x-k)$ باشد همچنین فرض کنید W_j توسط $\{\psi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ تولید شده باشد، که

$$\psi(t) = \sum_k (-1)^{k-1} \bar{p}_{-k-1} \varphi(2t-k)$$

آن‌گاه $W_j \subset V_{j+1}$، متمم متعامد V_j در V_{j+1} است. به علاوه:

$$\{\psi_{jk}(x) := 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

یک پایه متعامد یکه برای W_j است.

اثبات: به مرجع [3] مراجعه شود.

تعریف ۲۳.۱: ساده‌ترین آنالیز موجک روی تابع مقیاس هار[13] پایه‌ریزی شده است. این موجک با تابع مقیاس

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲۴.۱: گوییم $\varphi(x)$ از درجه تقریبی p است، هرگاه ترکیب‌های خطی $\varphi(x-k)$ بتوانند به وسیله چندجمله‌های از درجه ۰ تا $p-1$، $1, x, x^2, ..., x^{p-1}$، بیان شوند.

[13] Haar scaling function

۱—۴ موجک‌های اسپلاینی

تعریف ۲۵.۱: برای دو تابع $f, g \in L^{1}(\mathbb{R})$، پیچش[۱۴] f و g که با $f * g$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲۶.۱: فرض کنید $a > 0$، $n \in \mathbb{Z}^+$، یک اسپلاین از درجه n با گره‌هایی[۱۵] در $a\mathbb{Z} = \{an : n \in \mathbb{Z}\}$، تابعی مانند $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که $f \in C^{n-1}$ و برای هر $j \in \mathbb{Z}$، $f\mid_{[ja,(j+1)a]}$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است.

در این تعریف طبق معمول C^k نمایش مجموعه توابع k مرتبه مشتق‌پذیر است. با این استثنا که C^{-1} مجموعه همه توابع اندازه‌پذیر و C^{0} مجموعه همه توابع پیوسته را نشان می‌دهد.

تعریف ۲۷.۱: فرض کنیم $B_1(x) = \mathcal{X}_{[0,1)}(x)$ و برای $n = 2, 3, \ldots$، تعریف می‌کنیم:

$$B_n = B_{n-1} * B_1 = B_1 \underbrace{* \cdots *}_{\text{مرتبه پیچش}-(n-1)} B_1$$

B_n، یک B_اسپلاین یکنواخت از درجه $n-1$ نامیده می‌شود.

قضیه ۲۸.۱: برای یک B_اسپلاین از درجه $n-1$ با گره‌هایی در $x_0, x_1, \ldots, x_n$ که با $M(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ نمایش می‌دهیم، داریم:

$$M(x, x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \frac{n(x-x_i)_+^{n-1}}{\omega'(x_i)}$$

به طوری که $x_+^n = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ و $\omega(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$.

---
[۱۴] Convolution

[۱۵] Knots

برهان: به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

نتیجه ۲۹.۱: برای B_اسپلاین از درجه $n-1$ با گره‌هایی در $0, 1, ..., n$ داریم:

$$M(x; 0, 1, ..., n) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} (x-i)_+^{n-1}$$

به طوری که

$$x_+^{n-1} = \begin{cases} x^{n-1} & \text{اگر} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{اگر} \quad x < 0 \end{cases}$$

برهان: از قضیه (۲۸.۱)، داریم:

$$M(x, 0, 1, ...n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^n \frac{n(x-i)_+^{n-1}}{\omega'(i)}$$

که $\omega(x) = x(x-1)\cdots(x-n)$.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\omega'(x) = \sum_{j=0}^{n} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (x-k)$$

از این رو، $\omega'(i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (i-k)$

$$\begin{aligned}
M(x, 0, 1, ..., n) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n n(x-i)_+^{n-1}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (i-k)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n n(x-i)_+^{n-1}}{i \times (i-1) \times \cdots \times 1 \times (-1) \times (-2) \times \cdots \times (i-n)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n n(x-i)_+^{n-1}}{i!(-1)^{n-i}(n-i)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i n(x-i)_+^{n-1}}{i!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i n!(x-i)_+^{n-1}}{(n-i)!i!(n-1)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \binom{n}{i} (x-i)_+^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

■