بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

بررسی خواص گراف کلی متناظر با حلقه‌های جابجایی و یکدار

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

فاطمه بیژنی

استاد راهنما: **دکتر علی اکبر یزدان پور**

شهریور ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به خانواده‌ی مهربانم

پدرم که شانه‌هایش بلندترین نقطه‌ی زمین است،

مادرم که عشق تنها در آغوش او خلاصه می‌شود،

برادرانم که آرامش‌بخش روح و روانم هستند،

خواهرم که زیباترین چشم انداز تندیس نگاه اوست.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس خداوند رحمان و رحیم را که عالم را بر اساس "حساب" و "هندسه" آفرید. آری ریاضیدان بزرگی که همه چیز دنیا را بر اساس حساب استوار کرد و بر پایه‌ی هندسه نظم بخشید. هزاران شکر این راهنمای عظیم را که دستان پر مهرش مرا در نیل به آرزوهایم یار و یاور بوده و صدها سپاس که با پشتیبانیش فرصتی ارزانی شد تا بتوانم پژوهشی هر چند کوتاه در یکی از باب‌های گسترده‌ی ریاضی داشته باشم.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر یزدان پور که با صبر و مهربانی راهنما و راهگشای بنده بودند نهایت تشکر و قدردانی را به جا آورم. همچنین از تمامی اساتیدم که از محضر پر فیض تدریسشان بهره برده‌ام تشکر و قدردانی می‌کنم. در نهایت بوسه بر دستان پدر و مادر عزیزم می‌زنم که در تمامی دوران زندگی علی‌الخصوص دوران تحصیل مشوق و تکیه‌گاهم بودند. خورشیدهایی که هرگاه دنیا برایم به تاریکی می‌گراید روشنای راهم هستند.

امید که سپاس کوچک مرا پذیرا باشند.

چکیده

فرض کنید R حلقه جابجایی و یکدار باشد که $0 \neq 1$ و $Z(R)$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R باشد. منظور از گراف کلی حلقه R ، گرافی با رأس‌های متشکل از عناصر R است به‌طوری‌که دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x + y \in Z(R)$ که آن را با $T(\Gamma(R))$ نشان می‌دهیم.

گراف‌های کلی متناظر با حلقه‌های جابجایی و یکدار دارای ویژگی‌های جالبی هستند که برخی از آن‌ها توسط ریاضی دانانی مانند اندرسون و بداوی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بر اساس کارهای اندرسون و بداوی، در این پایان‌نامه ویژگی‌های گراف کلی متناظر با حلقه‌هایی که $Z(R)$ یک مجموعه متناهی است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بویژه کلاس همه حلقه‌های متناهی را که گراف کلی آن‌ها دارای گونای حداکثر یک است ، رده‌بندی می‌کنیم . در بخشی دیگر، به بررسی همبندی گراف کلی و زیرگراف‌های آن و محاسبه برخی از کمیت‌های گرافی مانند قطر و کمر خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: *گراف کلی، مقسوم‌علیه صفر، گونا، گراف مسطح، گراف چنبره‌ای* .

فهرست

فهرست تصاویر

پیش گفتار

اخیراً توجه ویژه‌ای به رابطه‌ی ساختارهای جبری و گراف‌ها شده است که یکی از آنها، گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه جابجایی R است. اوّلین بار بک [۱] در سال ۱۹۹۸ به یک حلقه‌ی یکدار و جابجایی یک گراف نسبت داد. که در واقع علاقه‌ی او بیشتر در رنگ‌آمیزی این گراف بود. در این کار تمام عناصر حلقه رئوس گراف بودند. بک با استفاده از مفاهیم نظریه گراف، خواص جالبی از حلقه‌ها بدست آورد. بعدها اندرسون [۲] و لیوینگستون [۳] به این موضوع علاقه‌مند شدند و نظریه گراف مقسوم‌علیه صفر را با ارائه یک تعریف دقیق و بررسی خواص گرافی و مقایسه آن‌ها با خواص حلقه‌ای پایه گذاری کردند. گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌ی یکدار و جابجایی R را با نماد $\Gamma(R)$ نمایش می‌دهیم. در این گراف رئوس گراف $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ یعنی مجموعه مقسوم علیه صفر ناصفر است و برای $x, y \in Z(R)^*$ متمایز رأس x و y مجاور هستند اگر و تنها اگر $xy = 0$. مفهوم گراف مقسوم علیه صفردر واقع پلی بین نظریه گراف و نظریه حلقه است.

در فصل اوّل این پایان‌نامه، پس از یادآوری مفاهیم مقدماتی در مورد گراف‌ها و حلقه‌ها به ارائه‌ی مفهوم گراف‌کلی یک حلقه جابجایی و یکدار R می‌پردازیم که نخستین بار در سال ۲۰۰۸ توسط اندرسون و بداوی [۴] معرفی شد. این گراف با نماد $T(\Gamma(R))$ نمایش داده می‌شود که همه عناصر R به عنوان رأس‌های این گراف در نظر گرفته می‌شود و در آن دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها

[۱] Beek

[۲] D.D.Anderson

[۳] Livingston

[۴] A.Bedawi

اگر $x+y$ یک مقسوم علیه صفر باشد. همچنین در این بخش، زیرگراف‌های (القایی) این گراف، از جمله $Z(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ که رأس‌های آن به‌ترتیب مجموعه مقسوم علیه صفر و عناصر منظم حلقه R هستند، معرفی خواهد شد. در فصل دوم فرمول اویلر و خواصی از حلقه‌های آرتینی را بیان می‌کنیم. در فصل سوم کمیت‌های گرافی مانند قطر، کمر و همبندی را برای گراف کلی و زیرگراف‌های آن در دو حالت که $Z(R)$ یک ایدآل از R باشد و $Z(R)$ یک ایدآل از R نباشد بررسی می‌کنیم. زیرگراف $Z(\Gamma(R))$ از $T(\Gamma(R))$ همیشه همبند است و $Z(\Gamma(R))$ کامل است اگروتنها اگر $Z(R)$ یک ایدآل از R باشد و اگر $Z(R)$ یک ایدآل از R باشد آنگاه زیرگراف‌های $Z(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ زیرگراف‌های متمایزاز $T(\Gamma(R))$ است و $Reg(\Gamma(R))$ اجتماع زیرگراف‌های متمایز است که هر کدام از آن ها گراف کامل یا گراف کامل دوبخشی است. اگر $Z(R)$ یک ایدآل از R نباشد، آنگاه زیرگراف‌های $Z(\Gamma(R))$ و $Reg(\Gamma(R))$ زیرگراف‌های متمایزاز $T(\Gamma(R))$ نیستند و $T(\Gamma(R))$ همبند است اگر وتنها اگر $R=(Z(R))$. همچنین نشان خواهیم داد که چه زمانی $Reg(\Gamma(R))$ همبند یا کامل است و قطر و کمر این زیرگراف‌ها را محاسبه می‌کنیم. همچنین با چند نتیجه راجع به گراف‌های ایدآل سازی از $R(+)M$، بخش به پایان می‌رسد.

در فصل پایانی گونای گراف کامل n رأسی، گراف کامل دوبخشی و حاصلضرب دکارتی دو گراف را محاسبه می‌کنیم و کلاس همه حلقه‌های متناهی که گراف کلی آن‌ها دارای گونای حداکثر یک است(یعنی یک گراف مسطح یا گراف چنبره‌ای باشد) را رده بندی می‌کنیم.

این پایان‌نامه از مقاله‌های [۱۰] و [۲] اقتباس شده است.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل با برخی از تعاریف ، نکات، مثال‌ها و مفاهیم نظریه گراف و نظریه حلقه‌ها آشنا می‌شویم. در بخش اوّل مفاهیمی از نظریه گراف همراه با مثال‌هایی بیان می‌کنیم. در بخش دوّم به یادآوری برخی مفاهیم و تعاریف نظریه حلقه پرداخته و در آخر گراف کلی یک حلقه و زیرگراف‌های آن را معرفی می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیمی از نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک مجموعه ناتهی و E خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های دو عضوی V باشد. در این صورت $G = (V, E)$ را یک **گراف** ، V را **مجموعه رأس ها** و E را **مجموعه یال ها** می‌نامیم. تعداد رأس های یک گراف را **مرتبه ی گراف** و تعداد یال های گراف را **اندازه ی گراف** گوییم و به ترتیب با $|V(G)|$ و $|E(G)|$ نشان می دهیم. یک گراف n رأسی، یک **n ـ گراف** نامیده می‌شود.

اگر دو رأس با یالی به هم متصل باشند آن دو رأس را **رأس های مجاور** گوییم و یال با دو سر یکسان **طوقه** نامیده می شود. اگر مجموعه رأس ها و مجموعه یال های گراف متناهی باشد گراف را **متناهی** می‌گوییم. گراف $G = (V, E)$ **گراف ساده** است اگر هیچ طوقه ای نداشته باشد و بین هر دو رأس بیش از یک یال نباشد.

در طول این پایان‌نامه، گراف‌های معرفی شده (بجز در مواردی که به‌طور صریح ذکر شود)، همگی گرافهای متناهی و ساده می‌باشند همچنین یک یال $\{u, v\} \in E(G)$ را به اختصار با uv نمایش می‌دهیم.

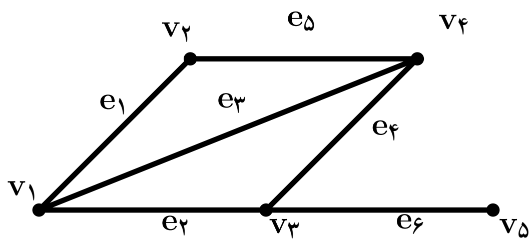
مثال ۲.۱.۱. گراف G_1 در شکل ۱.۱ را در نظر بگیرید. مجموعه رأس های این گراف برابر است با

$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

و مجموعه یال های آن برابر است با

$$E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6\}$$

لذا یک گراف ساده از مرتبه ۵ و از اندازه ۶ است.



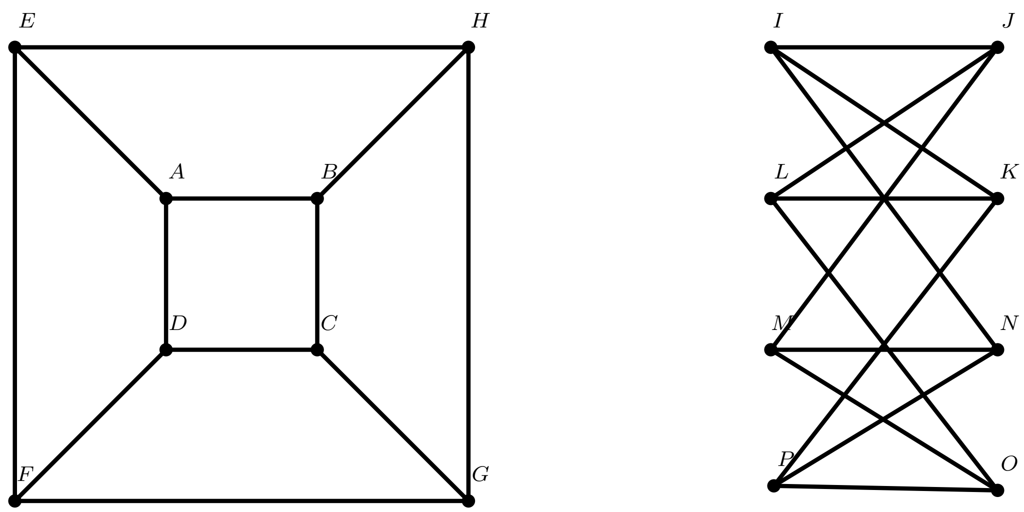
شکل ۱.۱: گراف G_1

تعریف ۳.۱.۱. **گراف تهی** گرافی است که هیچ یالی نداشته باشد. گراف تهی را گراف کاملاً ناهمبند گویند.

تعریف ۴.۱.۱. دو گراف G و H گراف های **یکریخت** هستند اگر تابعی یک به یک و پوشا به صورت $f : V(G) \to V(H)$ بین مجموعه رأس های دو گراف وجود داشته باشد به طوری که $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. در این صورت دو گراف G و H را یکریخت گویند و با $G \cong H$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۵.۱.۱. دو گراف نشان داده شده در شکل ۲.۱ با اینکه ظاهر متفاوتی دارند اما یکریخت هستند و برای آنها داریم

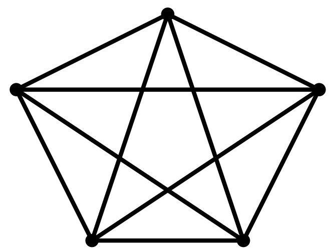
$$f(I) = E, f(J) = A, f(L) = B, f(K) = H, f(M) = D, f(N) = F, f(P) = G, f(O) = C$$



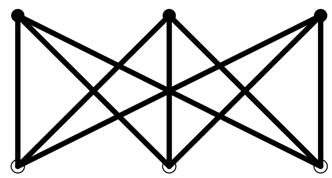
شکل ۲.۱: گراف‌های یکریخت

تعریف ۶.۱.۱. گراف ساده G را کامل گوییم هر گاه هر دو رأس آن مجاور باشند. با در نظر گرفتن یکریختی تنها یک **گراف کامل** n رأسی وجود دارد و آن را با K_n نشان می دهیم. شکل ۳.۱ یک گراف کامل ۵ رأسی است.

تعریف ۷.۱.۱. **گراف** k**-بخشی**، گرافی است که می توان مجموعه ی رأس های آن را به k زیرمجموعه



شکل ۳.۱: گراف$K_۵$



شکل ۴.۱: $K_{۳,۳}$

مجزا طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیر مجموعه نباشد. **گراف k-بخشی کامل،** یک گراف ساده k -بخشی است که در آن هر رأس به تمام رأس هایی که در زیر مجموعه ای غیر یکسان با آن قرار دارند، وصل شده اند. شکل ۴.۱ یک گراف $K_{۳,۳}$ می باشد.

تعریف ۸.۱.۱. گراف H را **زیرگراف** G می نامیم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر H زیر گراف G باشد می نویسیم $H \subseteq G$. گراف H را **زیر گراف سره ی** گراف G می نامیم هر گاه داشته باشیم $H \subseteq G$ و $H \neq G$. اگر H زیر گراف سره ی G باشد می نویسیم $H \subset G$. در صورتی که زیر گراف H در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را **زیرگراف فراگیر** می نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید V' زیرمجموعه ی ناتهی از V باشد. زیرگرافی از G که مجموعه رأس‌های

آن V' و مجموعه یال‌هایی از گراف G باشد که هر دو رأس آن‌ها در V' واقع است، زیرگراف القاء شده توسط V' می‌نامیم و با $G[V']$ نمایش می دهیم و به آن **زیرگراف القایی** G روی رأس‌های V' می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۰. یک **مسیر** از رأس u به رأس v دنباله‌ای از رأس‌های دوبه‌دو متمایز گراف G است که از u آغاز و به v ختم می‌شود و دو رأس متوالی این دنباله مجاور هستند. به **تعداد** یال‌های یک مسیر **طول مسیر** گفته می‌شود. کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v را با $d(u,v)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱۱. یک **دور** دنباله‌ای به‌صورت $v_۱, v_۲, ..., v_{n+۱} = (v_۱)$ با شرط $n \geq ۳$ متشکل از n رأس دو به دو متمایز است به‌طوری‌که هر دو رأس متوالی این دنباله مجاور هستند. دور n رأسی را با C_n نشان می‌دهیم. یک k -دور را وابسته به اینکه k زوج یا فرد باشد، یک **دور زوج** یا **فرد** می‌نامیم. همچنین یک ۳- دور، را **مثلث** گویند.

تعریف ۱.۱.۱۲. **قطر یک گراف** مانند G را با $\mathrm{diam}(G)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

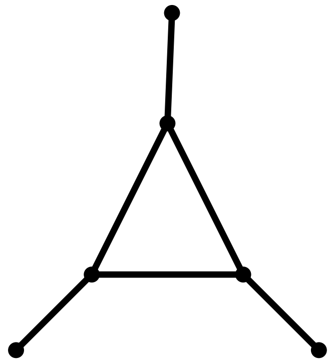
$$\mathrm{diam}(G) = \sup\{d(x,y) | x, y \in V(G)\}$$

تعریف ۱.۱.۱۳. به طول کوچکترین دور G ، **کمر** G گفته می‌شود و آن را با $\mathrm{gr}(G)$ نشان می‌دهیم.

قرارداد ۱.۱.۱۴. برای رأس‌های u و v از گراف G داریم $d(u,u) = ۰$ و $d(u,v) = \infty$ اگر و تنها اگر مسیری بین u و v وجود نداشته باشد. اگر گراف G شامل دور نباشد، آنگاه $\mathrm{gr}(G) = \infty$.

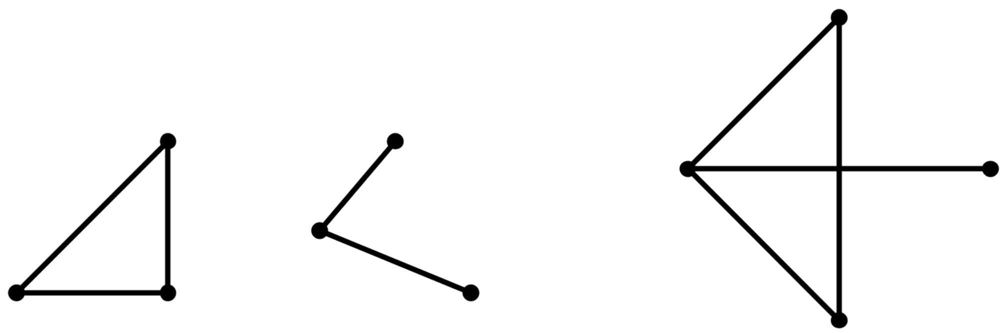
مثال ۱.۱.۱۵. در گراف شکل(۱.۵) داریم $\mathrm{diam}(G) = ۳$ و $\mathrm{gr}(G) = ۳$.

تعریف ۱.۱.۱۶. گراف G را **همبند** گوییم هر گاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. همبندی یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه رأس‌های $V(G)$ تشکیل می‌دهد. بنابراین افرازی از $V(G)$ به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_۱, V_۲, \cdots, V_i$ وجود دارد که در آن دو رأس u و v با مسیری به هم متصل هستند اگر و تنها اگر هر دو متعلق به V_i یکسانی باشتد. زیرگراف‌های $G[V_۱]$، $G[V_۲]$،... و $G[V_i]$ **مؤلفه‌های همبندی** گراف G نامیده می‌شوند.



شکل ۵.۱: گرافG

مثال ۱۷.۱.۱. در شکل ۶.۱ گراف G گرافی همبند و گراف H گرافی ناهمبند با دو مؤلفه همبندی است.



(آ) G (ب) H

شکل ۶.۱: گراف همبند G و گراف ناهمبند H

تعریف ۱۸.۱.۱. یک گراف همبند بدون دور را **درخت** گویند.

قضیه ۱۹.۱.۱. *اگر G یک درخت باشد در این صورت* $|E| = |V| - 1$.

اثبات. به مرجع [۱۳] مراجعه شود. □

تعریف ۲۰.۱.۱. **خوشه** زیرمجموعه‌ای مانند S از $V(G)$ است بطوری که $G[S]$ گرافی کامل باشد. عدد خوشه‌ای گراف G برابر با اندازه بزرگترین خوشه از گراف G است و آن را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۱.۱. اگر G و H دو گراف باشند، در این صورت اجتماع مجزای دو گراف یعنی $G \cup H$, به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$$

و

$$E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$$

توجه داشته باشید که اجتماع مجزای m گراف کامل n رأسی را با نماد mK_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۱.۱. **درجه‌ی هررأس** v در گراف G ، برابر تعداد یال‌های واقع بر v می‌باشد و با $d_G(v)$ نشان داده می‌شود. کمترین و بیشترین درجه رأس‌های G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. گراف G را k **-منتظم** گوییم هر گاه درجه‌ی تمام رأس‌های آن برابر k باشد. **گراف منتظم،** گرافی است که به ازای یک مقدار k ، k -منتظم باشد. گراف‌های کامل و گراف‌های دو بخشی کامل $K_{n,n}$، منتظم هستند.

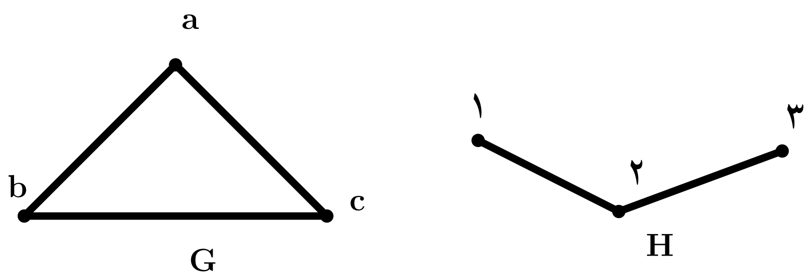
تعریف ۲۴.۱.۱. گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ را در نظر می‌گیریم. **حاصل ضرب دکارتی** $G_1 \times G_2$ گرافی است با مجموعه رأس‌های

$$V(G_1 \times G_2) = \{(v_1, v_2) : v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)\}$$

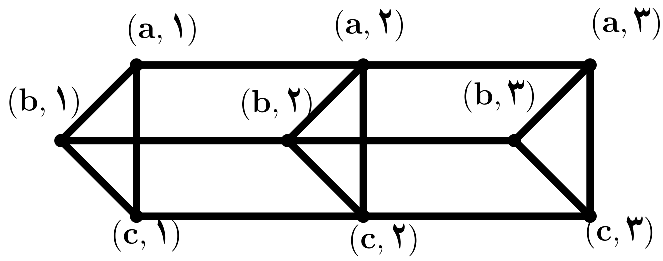
و رأس (v_1, v_2) با رأس (u_1, u_2) مجاور است اگر $v_1 = u_1$ و v_2 با u_2 در گراف G_2 مجاورند و یا

$u_۲ = v_۲$ و $v_۱$ با $u_۱$ در گراف $G_۱$ مجاورند .

مثال ۲۵.۱.۱. فرض کنید گراف G و H به‌صورت شکل ۷.۱ باشد. آنگاه گراف $G \times H$ به صورت شکل ۸.۱ خواهد بود.



شکل ۷.۱: گراف G و H



شکل ۸.۱: گراف $G \times H$

اکنون عمل اشتقاق یال را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. می‌گوییم یال e **مشتق** شده، هر گاه آن یال را برداشته، به‌جای آن مسیر جدیدی به طول دو قرار دهیم که دو سر یال را به یکدیگر متصل می‌کند. رأس داخلی این مسیر یک رأس جدید