چکیده

در این پایان نامه بخش‌های گلیسون جبرهای تابعی یکنواخت را معرفی می‌کنیم. سپس همریختی‌های فشرده‌ی ضعیف بین جبرهای باناخ یکنواخت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که بیشتر آنها فشرده‌اند. هم چنین نشان می‌دهیم که یک همریختی از جبر با اندازه نمایشگر یکتا به توی یک جبر باناخ منظم فشرده‌ی ضعیف یا فشرده است و ثابت می‌کنیم که یک همریختی از جبر با اندازه نمایشگر یکتا به توی $D^1(X)$ فشرده است. سرانجام طیف درونریختی‌های فشرده‌ی جبرهای با اندازه نمایشگر یکتا تعریف شده بر یک فضای همبند فشرده‌ی هاسدورف X را مشخص می‌کنیم.

پیش گفتار

در سال ۱۹۹۹، گالیندو[۱] و لیندستروم[۲] بخش‌های گلیسون و همریختی‌های فشرده‌ی ضعیف بین جبرهای باناخ یکنواخت را مورد مطالعه قرار دادند[7]. سوانتون[۳] در سال ۱۹۷۶ عملگرهای ترکیبی فشرده بر $H^{\infty}(D)$ را مشخص کرد [16]. هم چنین آرون[۴]، گالیندو و لیندستروم در سال ۱۹۹۷ به بررسی همریختی‌های فشرده بین جبرهای توابع تحلیلی پرداختند [1]. و پیش از آن، اُهنو[۵] و وادا[۶] در سال ۱۹۸۱ شرایط کافی بر جبرهای یکنواخت را برای رسیدن به این که همریختی‌های فشرده‌ی ضعیف بین آنها دقیقاً فشرده‌اند را به دست آوردند [13]. فینشتین[۷] و کاموویتز[۸] در سال ۱۹۹۹ نشان دادند که هرگاه T یک درونریختی فشرده‌ی $H^{\infty}(D)$ القاشده توسط تابع تحلیلی $\psi : D \to D$ باشد آنگاه به وسیله‌ی مشتق ψ در یک نقطه‌ی ثابت آن، طیف T تعیین می‌شود[6]. و در سال ۲۰۰۴ بهروزی و ماهیار همریختی‌های فشرده از جبرهای با اندازه نمایشگر یکتا به توی جبرهای یکنواخت، جبرهای باناخ منظم و $D^{1}(X)$ را مورد مطالعه قرار دادند و طیف درونریختی‌های فشرده‌ی جبرهای با اندازه نمایشگر یکتا بر یک فضای همبند فشرده‌ی هاسدورف را تعیین کردند.

این پایان نامه مشتمل بر ۴ فصل است. در فصل اول تعاریف، قضایا و نتایج مقدماتی از توپولوژی، آنالیز تابعی و آنالیز مختلط را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند.

فصل دوم از دو بخش تشکیل شده است. در بخش اول این فصل ابتدا نگاشت‌های موبیوس را معرفی می‌کنیم و با استفاده از خواصی از نگاشت‌های موبیوس، یک رابطه‌ی هم‌ارزی در فضای ایده‌ال ماکسیمال یک جبر تابعی یکنواخت ارائه می‌دهیم. در بخش دوم، با استفاده از رابطه‌ی هم‌ارزی ارائه شده در فضای ایده‌ال ماکسیمال یک جبر تابعی یکنواخت، بخش‌های گلیسون برای

---

[۱] Galindo
[۲] Lindstrom
[۳] Swanton
[۴] Aron
[۵] Ohno
[۶] Wada
[۷] Feinstein
[۸] Kamowitz

یک جبر تابعی یکنواخت را معرفی می‌کنیم. سپس با بیان لم‌ها و قضایایی، ارتباط بین بخش‌های گلیسون جبرهای تابعی یکنواخت و اندازه‌ی نمایشگر اعضای فضای ایده‌ال ماکسیمال این جبرها را عنوان می‌کنیم. و در پایان این بخش، رابطه‌ی هم‌ارزی جدیدی بر یک زیرمجموعه از فضای دوگان یک جبر تابعی یکنواخت تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این رابطه‌ی هم‌ارزی و رابطه‌ی هم‌ارزی که در فضای ایده‌ال ماکسیمال این جبرها تعریف شد، معادلند. در ارائه‌ی مطالب این فصل از مرجع [12] استفاده شده است.

فصل سوم مشتمل بر ۲ بخش است. در بخش اول نشان می‌دهیم که هر بخش گلیسون فضای ایده‌ال ماکسیمال یک جبر تابعی یکنواخت بر یک فضای فشرده‌ی هاسدورف با توپولوژی ضعیف، بسته—باز است. سپس ارتباط بین بخش‌های گلیسون و مجموعه‌های قله‌ای یک جبر تابعی یکنواخت بر یک فضای فشرده‌ی هاسدورف را مشخص می‌کنیم. در بخش دوم همریختی‌های فشرده‌ی ضعیف بین جبرهای باناخ یکنواخت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که بیشتر آنها فشرده‌اند و حتی تحت فرض‌های اضافی تک‌بعدی‌اند. در این فصل، مقاله‌ی [7] تقریباً به طور کامل باز شده است.

فصل چهارم از ۲ بخش تشکیل شده است. در بخش اول با تعریف جبر با اندازه نمایشگر یکتا و جبر لگامدولی، نشان می‌دهیم که هر جبر باناخ لگامدولی یک جبر با اندازه نمایشگر یکتا است. هم چنین نشان می‌دهیم $C(X)$ و $H^{\infty}(D)$ جبرهایی با اندازه نمایشگر یکتا هستند که X یک فضای فشرده‌ی هاسدورف و D قرص واحد باز در صفحه‌ی مختلط است. سپس به بیان قضیه‌ی ورمر—هافمن—لومر می‌پردازیم که نقش کلیدی در اثبات بسیاری از قضایای این فصل دارد. با توجه به این که برهان این قضیه به مقدمات زیادی نیاز دارد به مرجع [17] ارجاع داده‌ایم. نشان می‌دهیم که نرم—توپولوژی و توپولوژی ضعیف بر فضای ایده‌ال ماکسیمال یک جبر با اندازه نمایشگر یکتا بر هم منطبق هستند و با بیان چند قضیه، شرایطی را که یک همریختی از یک جبر با اندازه نمایشگر یکتا به یک جبر باناخ یکنواخت، فشرده‌ی ضعیف یا فشرده است، عنوان می‌کنیم و این نتایج را برای جبر $H^{\infty}(D)$ به عنوان یک جبر با اندازه نمایشگر یکتا به دست می‌آوریم. هم چنین فشردگی و فشردگی ضعیف یک همریختی از یک جبر با اندازه نمایشگر یکتا به یک جبر

باناخ منظم را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که هر همریختی از یک جبر با اندازه نمایشگر یکتا به $D^{1}(X)$ به عنوان یک جبر نامنظم، فشرده است که در آن X یک مجموعه‌ی خوب است. در بخش دوم این فصل، با بیان چند قضیه‌ی مورد نیاز و با استفاده از فرمول مشتق توابع مرکب فادا برونو، طیف درونریختی‌های فشرده‌ی جبرهای با اندازه نمایشگر یکتا، القاشده توسط یک تابع ناثابت را تعیین می‌کنیم.

فهرست مطالب

⋆ ⋆ ⋆

فصل ۱

مقدمه

در این فصل که مشتمل بر ۹ بخش است، مقدماتی راجع به فضاهای برداری توپولوژیک، جبرهای باناخ[1]، همپیوستگی و قضیه آسکولی[2]، تبدیل گلفاند[3] و فضای ایده‌ال ماکسیمال جبرهای باناخ تعویض‌پذیر، همریختی‌های بین جبرهای باناخ، جبرهای تابعی باناخ، چند قضیه اساسی در آنالیز تابعی، جبر توابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته و اندازه نمایشگر را که در فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشند، عنوان می‌کنیم.

۱.۱ فضاهای برداری توپولوژیک

در این بخش با معرفی فضاهای برداری توپولوژیک و فضاهای باناخ، به بیان مقدماتی در زمینه‌ی دوگان یک فضای برداری توپولوژیک، عملگر و طیف یک عملگر می‌پردازیم.

---

[1] Banach
[2] Ascoli
[3] Gelfand

۱.۱.۱ تعریف.

یک فضای برداری مختلط مجموعه‌ای است مانند X است که عناصرش را بردار نامند و در آن دو عمل به نامهای جمع و ضرب اسکالر (تابعی از $X \times \mathbb{C}$ به توی A) تعریف شده‌اند که از خواص جبری زیر بهره‌منداند:

به هر جفت بردار x و y بردار $x+y$ چنان نظیر است که $x+y = y+x$ و $x+(y+z) = (x+y)+z$، X شامل بردار منحصر به فرد 0 (بردار صفر یا مبدا X) است به طوری که به ازای هر $x \in X$، $x + 0 = x$، و به هر $x \in X$ بردار منحصر به فرد $-x$ چنان نظیر است که $x + (-x) = 0$. به هر جفت (α, x) که $x \in X$ و α اسکالر(عدد مختلط) است بردار $\alpha x \in X$ چنان نظیر است که $1x = x$، $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$، و دو قانون پخشپذیری

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \text{و} \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

برقرارند.

۲.۱.۱ تعریف.

یک فضای برداری مختلط X را یک فضای نرمدار گوییم هرگاه به ازای هر عضو x از X یک عدد حقیقی نامنفی $||x||$ (نرم x) نظیر شود به طوری که:

(الف) $(x, y \in X) \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

(ب) $(x \in X, a \in C) \quad ||ax|| = |a|.||x||$

(ج) $(x \in X) \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

۳.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متریک بر X نامیم هرگاه:

(الف) به ازای هر x و y از X، $d(x,y) \geq 0$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x = y$؛

(ب) به ازای هر x و y از X،$d(x,y) = d(y,x)$؛

(ج) به ازای هر x و y و z از X،

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

اگر در یک فضای نرمدار فاصله بین دو عنصر فضا را به صورت $d(x,y) = ||x - y||$ تعریف کنیم، آنگاه d یک متریک بر فضای نرمدار می‌باشد. لذا هر فضای نرمدار با متر مذکور را می‌توان یک فضای متریک در نظر گرفت.

۴.۱.۱ تعریف.

یک فضای باناخ عبارت است از یک فضای نرمدار که تحت متریک حاصل از نرمش تمام باشد، به عبارت دیگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

۵.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط و τ یک توپولوژی بر X باشد به طوری که:

(الف) به ازای هر $x \in X$، مجموعه تک عضوی $\{x\}$ بسته است؛

(ب) اعمال جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته اند؛

در این صورت X را یک فضای برداری توپولوژیک می‌نامیم.

به عنوان مثال فضاهای نرمدار، فضاهایی برداری توپولوژیک‌اند.

۶.۱.۱ تعریف.

فضای برداری توپولوژیک X را موضعاً محدب گوئیم در صورتیکه X دارای یک پایه موضعی محدب در 0 باشد.

۷.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم A و B دو فضای نرمدار باشند. نگاشت $T : A \to B$ را یک یکمتری نامیم هرگاه به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$||Ta|| = ||a||$$

۸.۱.۱ تعریف.

نگاشت T از فضای برداری X به توی فضای برداری Y را یک تبدیل خطی (نگاشت خطی) گوییم، هرگاه:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad (x, y \in X \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

هر تبدیل خطی از فضای برداری X به توی میدان Φ را یک تابعک خطی می‌نامیم.

۹.۱.۱ قضیه **(قضیه نگاشت باز)** [10;1.6].

اگر E و F فضاهایی باناخ و T یک نگاشت خطی پیوسته از E به F باشد، آنگاه $T(U)$ در F برای هر مجموعه باز U در E باز است.

۱۰.۱.۱ تعریف.

اگر X و Y دو فضای نرمدار باشند، نگاشت خطی T از X به Y را کراندار نامیم هرگاه عددی ثابت مانند M وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$||Tx|| \leq M||x||$$

در این صورت $\sup\{||Tx|| : x \in X, ||x|| \leq ۱\}$ را نرم T نامیده و آن را با $||T||$ نمایش می‌دهیم.

۱۱.۱.۱ تعریف.

اگر X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند، آنگاه $B(X,Y)$ عبارت است از گردایه تمام نگاشت‌های خطی کراندار از X به Y.

۱۲.۱.۱ قضیه [14;4.17].

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند:

(الف) به هر $\Lambda \in B(X,Y)$ عدد $||\Lambda|| = \sup\{||\Lambda x|| : x \in X, ||x|| \leq ۱\}$ را مربوط می‌کنیم و آن را نرم عملگری Λ می‌نامیم. این تعریف فضای $B(X,Y)$ را به یک فضای نرمدار تبدیل می‌کند. اگر Y فضای باناخ باشد، آنگاه $B(X,Y)$ نیز فضایی باناخ است.

(ب) اگر $\Lambda \in B(X,Y)$، آنگاه $||\Lambda x|| \leq ||\Lambda|| \, ||x||$.

۱۳.۱.۱ تعریف.

اگر X یک فضای برداری توپولوژیک و Y میدان اسکالر باشد، آنگاه $B(X,Y)$ را فضای دوگان X نامیم و آن را با X^* نشان می‌دهیم. هم چنین دوگان X^* را دوگان دوم X نامیده و آن را با X^{**} نشان می‌دهیم.

۱۴.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم $(A, ||.||)$ یک فضای باناخ بر میدان Φ و A^{**} دوگان دوم A بر Φ باشد. نگاشت $\pi : A \to A^{**}$ با ضابطه‌ی $\pi(a)(\Lambda) = \Lambda a (\Lambda \in A^* \ , \ a \in A)$، یک نگاشت خطی یکمتری است که آن را نگاشت نشاننده‌ی متعارف می‌نامیم.

۱۵.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک بر میدان Φ با توپولوژی برداری τ باشد به طوری که X^* دوگان X نقاط X را جدا کند. در این صورت توپولوژی تولید شده بوسیله X^* بر X، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی τ بر X که هر $\Lambda \in X^*$ نسبت به τ پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف بر X می‌نامیم. اگر $x_\circ$ عنصری دلخواه از X و $\varepsilon > \circ$ و $\Lambda \in X^*$، آنگاه

$$U(\Lambda, x_\circ, \varepsilon) = \{x \in X : |\Lambda x - \Lambda x_\circ| < \varepsilon\} \qquad (۱)$$

یک مجموعه باز (یک همسایگی از $x_\circ$) نسبت به توپولوژی ضعیف است. در حقیقت دسته‌ی تمام مجموعه‌های $U(\Lambda, x_\circ, \varepsilon)$ وقتی که Λ و $x_\circ$ و ε تغییر می‌کنند، تشکیل یک زیرپایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند و تمام اشتراکهای متناهی از مجموعه‌های به فرم (۱)، تشکیل یک پایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند.

۱۶.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک بر میدان Φ و X^* دوگان X باشد، برای هر $x \in X$، نگاشت $f_x : X^* \to \Phi$ را به صورت $f_x(\Lambda) = \Lambda x$ که $\Lambda \in X^*$، تعریف می‌کنیم. در این صورت $\{f_x : x \in X\}$—توپولوژی بر X^* یعنی کوچکترین توپولوژی بر X^* که برای هر $x \in X$ نگاشت f_x نسبت به آن پیوسته باشد، توپولوژی ضعیف—ستاره بر X^* می‌نامیم.
یک مجموعه‌ی زیر پایه‌ای باز برای توپولوژی ضعیف—ستاره به شکل زیر است:

$$U(\Lambda_\circ, x_\circ, \varepsilon) == \{\Lambda \in X^* : |f_x(\Lambda) - f_x(\Lambda_\circ)|\} = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x - \Lambda x_\circ| < \varepsilon\}$$

که در آن $x \in X$،$\Lambda_\circ \in X^*$ و $\varepsilon > \circ$. و یک مجموعه‌ی پایه‌ای برای توپولوژی ضعیف—ستاره به شکل زیر است:

$$(\Lambda_\circ, x_۱, ..., x_n \varepsilon_۱, ..., \varepsilon_n) = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda(x_i) - \Lambda_\circ(x_i)| < \varepsilon_i, \quad ۱ \leq i \leq n\}$$

که در آن $x_۱, ..., x_n \in X$ و اعداد $\varepsilon_۱, ..., \varepsilon_n$ مثبت هستند.

۱۷.۱.۱ قضیه[14;3.12].

فرض کنیم E زیرمجموعه‌ی محدبی از فضای موضعاً محدب X باشد. در این صورت بست ضعیف E در X مساوی بست اصلی آن در X است.

۱۸.۱.۱ قضیه[14;4.10].

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. به هر $T \in B(X,Y)$ یک $T^* \in B(Y^*,X^*)$ منحصر به فرد نظیر است که در رابطه‌ی

$$< Tx, y^* >=< x, T^*y^* >$$

به ازای هر $x \in X$ وهر $y^* \in Y^*$ صدق می‌کند. به علاوه، T^* در $||T|| = ||T^*||$ صدق می‌نماید. T^* را الحاقی T می‌نامیم.

۱۹.۱.۱ قضیه **(قضیه باناخ $-$ آلوگلو)** [11;3.15].

هرگاه V یک همسایگی ۰ در فضای برداری توپولوژیک X بوده و

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leq ۱, \forall x \in V\}$$

آنگاه K ضعیف$^*-$فشرده است.

۲۰.۱.۱ قضیه[14;4.12].

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$، در این صورت T یک به یک است اگر و تنها اگر $R(T^*)$ در X^* ضعیف$^*-$چگال باشد.

۲۱.۱.۱ قضیه[14;4.15].

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ بوده و $T \in B(X,Y)$، در این صورت:

(الف) $R(T)=Y$ اگر و تنها اگر

(ب) T^* یک به یک و $R(T^*)$ نرم—بسته باشد.

۲۲.۱.۱ قضیه [14;4.14].

اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$، آنگاه هر یک ازسه شرط زیر دو شرط دیگر را ایجاب می‌کند:

(الف) $R(T)$ در Y بسته است.

(ب) $R(T^*)$ در X^* ضعیف*—بسته است.

(ج) $R(T^*)$ در X^* نرم—بسته است.

۲۳.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. $T \in B(X,Y)$ را فشرده گوییم هرگاه اگر U گوی واحد باز در X باشد آنگاه بست $T(U)$ در Y فشرده باشد. به عبارت دیگر T فشرده است اگر و فقط اگر بستار تصویر هر مجموعه‌ی کراندار تحت T فشرده باشد.

۲۴.۱.۱ قضیه [19;1.1.19].

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند، $T \in B(X,Y)$ فشرده ضعیف است اگر وتنها اگر $T^{**}(X^{**}) \subseteq \pi(Y)$. (که π نگاشت نشاننده‌ی متعارف است).

۲۵.۱.۱ قضیه [14;4.18].

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$ و $dimR(T) < \infty$، آنگاه T فشرده است.

۲۶.۱.۱ قضیه[14;4.19].

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ بوده و $T \in B(X,Y)$، آنگاه T فشرده است اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.

۲۷.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای باناخ بر میدان Φ باشد، در این صورت $B(X,X)$ یا به اختصار $B(X)$ عبارتست از گردایه تمام نگاشت‌های خطی کراندار از X به X. و با نرم عملگری یک جبر باناخ واحددار است و واحد آن عملگر همانی I است.

۲۸.۱.۱ تعریف.

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $T \in B(X)$، طیف T ($\sigma(T)$) مجموعه تمام اعداد مختلط مانند λ است که $T - \lambda I$ وارون‌پذیر نمی‌باشد، لذا$\lambda \in \sigma(T)$ اگر و تنها اگر دست کم یکی از دو حکم زیر درست باشد:

(الف) برد $T - \lambda I$ تمام X نباشد.

(ب) $T - \lambda I$ یک به یک نباشد.

اگر (ب) برقرار باشد، گوییم λ یک مقدار ویژه‌ی T است.

۲۹.۱.۱ قضیه[14;4.16].

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. $T \in B(X,Y)$ فشرده است اگر وتنها اگر هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ در X شامل زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_i}\}$ باشد به طوری که $\{Tx_{n_i}\}$ به نقطه‌ای از Y همگرا باشد.

۳۰.۱.۱ قضیه[14;4.25].

فرض کنیم X یک فضای باناخ، $T \in B(X)$ و T فشرده باشد. در این صورت اگر $\lambda \neq 0$ و $\lambda \in \sigma(T)$، آنگاه λ یک مقدار ویژه‌ی T است.

۳۱.۱.۱ قضیه[14;4.18].

اگر X یک فضای باناخ، $dim(X) = \infty$، $T \in B(X)$ و T فشرده باشد، آنگاه $0 \in \sigma(T)$.

۲.۱ جبرهای باناخ

در این قسمت، با معرفی جبرهای باناخ به بیان مقدماتی درباره‌ی این جبرها و همریختی‌های مختلط می‌پردازیم.

۱.۲.۱ تعریف.

اگرΦ یک میدان وA یک مجموعه ناتهی باشد که روی آن دو عمل جمع و ضرب و ضرب اسکالر(تابعی از$A \times F$ به توی A) تعریف شده باشند به طوری که

(الف) A با جمع و ضرب اسکالر فضای برداری روی میدان Φ باشد؛

(ب) عمل ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر باشد؛

(ج) $\forall \alpha \in F \ , \ \forall a, b \in A : \ \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$؛

(د) عمل ضرب شرکت پذیر باشد.

آنگاه A را یک جبر بر میدان Φ گوییم.

الف) جبر A را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه تحت عمل ضرب عناصر A جا به جا شوند.

ب) جبر A را واحددار گوییم هرگاه عضوی از A مانند e وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall a \in A : \ ea = ae = a$$

e را واحد جبر A می نامیم.

ج) یک زیرمجموعه از جبر A را زیر جبر A نامیم، هرگاه تحت همان اعمال جمع و ضرب روی A خود یک جبر باشد.

د) هرگاه جبر مورد نظر بر میدان اعداد مختلط تعریف شود، آن را جبر مختلط می‌نامیم.

۲.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر بر میدان Φ باشد و $||.|| : A \rightarrow R$ یک نرم بر فضای برداری A روی میدان Φ باشد به طوری که:

$$||ab|| \leq ||a|| \,.\, ||b|| \qquad (a, b \in A)$$

در این صورت $||.||$ را یک نرم جبری بر A و $(A, ||.||)$ را یک جبر نرم دار بر میدان Φ می‌نامیم.

۳.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر نرم دار بر میدان Φ باشد. اگر هر دنباله‌ی کوشی در $(A, ||.||)$ همگرا باشد، آنگاه $(A, ||.||)$ را یک جبر باناخ بر میدان Φ می‌نامیم.

۴.۲.۱ مثال.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی فشرده‌ی هاسدورف باشد. مجموعه‌ی همه توابع مختلط پیوسته بر X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم که تحت اعمال جمع و ضرب نقطه به نقطه یک جبر مختلط بر X است. به هر $f \in C(X)$ نرم یکنواخت

$$||f||_X = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

را مربوط می‌کنیم. در این صورت $(C(X), ||.||_X)$ یک جبر باناخ تعویض‌پذیر واحددار است که واحد آن تابع ثابت ۱ بر X است.

۵.۲.۱ تعریف.

جبر باناخ تعویض‌پذیر A را یک جبر یکنواخت نامیم، هرگاه به ازای هر f در A:

$$||f^2|| = ||f||^2$$

۶.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم A یک جبر باناخ واحددار باشد. مجموعه همه اعضای وارونپذیر A را با A^{-1} نمایش می‌دهیم. طیف $(f \in A)$ عبارت است از مجموعه همه اعداد مختلط λ که $\lambda I - f$ در A وارونپذیر نیست. طیف f را با $\sigma(f)$، و گاهی برای مشخص کردن جبر با $\sigma_A(f)$ نمایش می‌دهیم. پس $\sigma_A(f) = \{\lambda \in C : \lambda I - f \notin A^{-1}\}$.

۷.۲.۱ تعریف.

اگر A یک جبر باناخ مختلط باشد، آنگاه شعاع طیفی $f \in A$، شعاع کوچکترین قرص بسته در C به مرکز مبدا می‌باشد که شامل $\sigma(f)$ است. یعنی عدد

$$\rho(f) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f)\}$$

۸.۲.۱ قضیه (**قضیه شعاع طیفی**) [14;10.13].

اگر A یک جبر باناخ مختلط باشد و $f \in A$ آنگاه

(الف) $\sigma(f)$ فشرده و غیر خالی است،

(ب) $\rho(f) = \lim_{n \longrightarrow \infty} ||f^n||^{\frac{1}{n}} = inf_{n \geq 1} ||f^n||^{\frac{1}{n}}$

۹.۲.۱ تعریف.

فرض کنیم A و B دو جبر باشند. نگاشت خطی $T : A \to B$ را یک همریختی از A به B گوییم هرگاه:

$$T(ab) = T(a)T(b) \quad (\forall a, b \in A)$$

همریختی یک به یک را یکریختی گوییم.

۱۰.۲.۱ تعریف.

هر همریختی یک به یک، پوشا و پیوسته که دارای معکوس پیوسته باشد را یک همانریختی یا همسانریختی می‌نامیم.

۱۱.۲.۱ تعریف.

همریختی T بر جبر مختلط A را یک همریختی مختلط نامیم هرگاه T همریختی صفر نباشد.

۱۲.۲.۱ قضیه [14;10.7].

فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، $x \in A$ و $||x|| < ۱$، در این صورت به ازای هر همریختی مختلط T بر A، $|T(x)| < ۱$.

۱۳.۲.۱ تعریف.

جبر باناخ A را انعکاسی گوییم هرگاه یک یکریختی یکمتری مانند T از A به A^{**} (فضای دوگان دوم A) وجود داشته باشد به طوری که

$$< x, x^* > = < x^*, Tx > \quad (\forall\ x \in A)$$

۱۴.۲.۱ لم [21;82.(c)].

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد، آنگاه A انعکاسی است اگر وتنها اگر B_A (گوی واحد بسته در A) فشرده‌ی ضعیف باشد.