بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی - گرایش آنالیز عددی

روش هم محلی اسپلاین برای معادلات انتگرال - دیفرانسیل با هسته‌های منفرد ضعیف

استاد راهنما
دکتر علی خانی

استاد مشاور
دکتر صداقت شهمراد
دکتر محمدحسین ستاری

پژوهشگر
کبری کاظملو

مهرماه ۱۳۹۰
تبریز - ایران

تقدیم به خانواده‌ام

و

دوستان مهربانم...

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.
تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.
به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی خانی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر صداقت شهمراد و جناب آقای دکتر محمدحسین ستاری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم.

کبری کاظملو

مهرماه ۱۳۹۰

فهرست مطالب

چکیده

برای مسائل مقدار اولیه یا مرزی شامل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم با هسته‌های به طور ضعیف منفرد یا هسته‌های ناهموار دیگر، ویژگی‌های هموارِی جواب‌ها را مطالعه می‌کنیم.
تقریب‌هایی را به جواب و مشتقات یک مسئله مقدار مرزی شامل معادلات انتگرال - دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه n ام با هسته‌های به طور ضعیف منفرد یا هسته‌های ناهموار دیگر می‌یابیم.
این تقریب‌ها به صورت توابع چندجمله‌ای تکه‌ای روی شبکه مدرج هستند که برای یافتن این تقریب‌ها، روش هم‌محلی چندجمله‌ای تکه‌ای را بکار می‌بریم. در ادامه با استفاده از شبکه‌های مدرج، تخمین‌های همگرایی بهینه و کل را بدست می‌آوریم و مرتبه همگرایی کل و مرتبه همگرایی محلی جواب‌ها را برای همه مقادیر توان شبکه مدرج بررسی می‌کنیم. در پایان مثال عددی ارائه می‌شود که در آن نشان می‌دهیم نتایج تئوری، بخوبی با سرعت همگرایی مطابقت دارد.
کلمات کلیدی:معادلات انتگرال-دیفرانسیل به‌طور ضعیف منفرد، روش هم‌محلی چندجمله‌ای تکه‌ای، شبکه مدرج

پیشگفتار

نظریه و کاربرد معادلات انتگرال موضوع مهمی در ریاضیات کاربردی است. معادلات انتگرال به صورت مدلهای ریاضی در بسیاری از مباحث علم فیزیک، زیست شناسی، شیمی و علوم مهندسی استفاده می‌شوند.

به روش‌های مختلفی می توان معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل را حل کرد. به عنوان مثال، حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل به کمک روش‌های هم‌محلی در حالت هموار بودن هسته‌ها در [۲۵، ۱۶، ۱۴، ۹، ۸، ۷، ۶] بررسی شده‌اند. حل چنین معادلاتی به وسیله روش گالرکین در [۲۶]، به وسیله روش تاو در [۱۰]، به وسیله روش تیلور در [۱۵]، به وسیله تجزیه آدومیان اصلاح شده در [۲۸] و به وسیله گالرکین گسسته در [۲۰]، مطالعه شده‌اند. توضیحات مختصری در مورد حل عددی معادلات انتگرال - دیفرانسیل فردهلم با هسته‌های به طور ضعیف منفرد در [۲۵، ۲۶] وجود دارند. هم‌چنین، روش‌های هم‌محلی برای حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا بکار می‌روند که در این مورد می‌توانید [۲۳، ۱۷، ۱۳، ۴، ۳، ۲] را ببینید. در [۷، ۶] حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم با هسته‌های ناپیوسته و با جواب‌های هموار بررسی شده است.

در این پایان‌نامه حل عددی معادلات انتگرال - دیفرانسیل به روش هم‌محلی اسپلاین مورد بررسی قرار گرفته است. این پایان‌نامه شامل چهار فصل می باشد که در فصل اول، تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان کرده‌ایم. در فصل دوم برای یک تابع اسپلاین تکه‌ای، یک تابع چندجمله‌ای درونیاب تکه‌ای تعریف کرده‌ایم، که این تابع درونیاب، اسپلاین تکه‌ای است و در ادامه این فصل خطای آن را تخمین زده‌ایم. در فصل سوم، که فصل اصلی پایان‌نامه می‌باشد، وجود و همواری جواب‌های مسائل مقدار اولیه یا مرزی شامل معادلات انتگرال

– دیفرانسیل فردهلم با هسته‌های به طور ضعیف منفرد یا هسته‌های ناهموار دیگر را تحت قضیه‌ای بیان و ثابت کرده‌ایم. سپس روش هم‌محلی اسپلاین را برای یافتن یک جواب تقریبی چنین مسأله‌ای (معادلات انتگرال – دیفرانسیل از مرتبه n ام دلخواه)، بکار برده‌ایم. سرانجام، با استفاده از شبکه‌های مدرج خاص، تخمین‌های همگرایی بهینه و کل را به صورت تحلیلی تحت قضیه‌ای بیان و اثبات کرده‌ایم. و مرتبه همگرایی کل و مرتبه همگرایی محلی جواب‌ها را برای همه مقادیر توان شبکه مدرج بررسی کرده‌ایم. در فصل چهار که فصل نهایی پایان‌نامه می‌باشد یک مثال عددی آورده‌ایم و در آن نشان داده‌ایم که، برخی نتایج عددی، بخوبی با نتایج تئوری مطابقت دارند.

همچنین این پایان‌نامه تعمیم نتایج بدست آمده در [۱۳، ۴، ۳] برای معادلات انتگرال–دیفرانسیل ولترای مرتبه اول به یک دسته وسیعی از معادلات انتگرال–دیفرانسیل ولترا یا فردهلم با هسته‌های به‌طور ضعیف منفرد یا هسته‌های غیرهموار از مرتبه دلخواه می‌باشد. روش هم‌محلی با روش گالرکین گسسته در [۲۰] ارتباط نزیکی دارد و در حالت‌های خاص این روش‌ها برهم منطبق می‌شوند. این روش‌ها از نظر هزینه محاسباتی یکسان هستند. مزیت اصلی روش گالرکین گسسته بر روش هم‌محلی این است که در روش اول، تقریبی به مشتق n ام جواب مسأله به صورت یک اسپلاین پیوسته بدست می‌آید. اما در روش دوم، این تقریب معمولا به صورت اسپلاین ناپیوسته است.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

به نظر بوچر[1] نام معادله انتگرال توسط بویس - ریموند[2] در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شده است هر چند که اولین پیدایش معادله انتگرال توسط آبل[3] به رسمیت شناخته شده است.
آبل در رساله‌اش در سالهای ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۶ مشغول بررسی معادلاتی نظیر

$$\int_0^t \frac{K(t,s)}{(t^p - s^p)^\alpha} u(s)ds = f(t), \quad t > 0$$

بود که در آن $1 > \alpha > 0$ ، $p > 0$ و تابع $K(t,s)$ تابع هموار است. حالت‌های خاصی از چنین معادله‌ای با $p = 1$ و $p = 2$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

همچنین عقیده‌ای وجود دارد که اولین پیدایش معادله انتگرال به کار لاپلاس[4] در سال ۱۷۸۲ برمی‌گردد که روی تبدیلات لاپلاس و معکوس آنها مطالعه می‌کرد.

[1] M. Bocher
[2] Bois-Reymond
[3] Abel
[4] Laplace

البته نام تعداد زیادی از ریاضیدانان همچون کوشی[۵] ، فردهلم[۶] ، هیلبرت[۷] ، ولترا[۸] و دیگران به این موضوع وابسته است.

تعریف ۱.۱.۱. یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(t)$ زیرعلامت انتگرال ظاهر می‌شود.

شکل کلی یک معادله انتگرال به صورت زیر است

$$\alpha(t)u(t) = \int_D K(t,s,u(s))dZ_s, \quad t,s \in D,\ D \subset \mathbb{R}^n \tag{۱.۱}$$

که در آن منظور از dZ_s عبارت $ds_1 ds_2 ... ds_n$ می‌باشد. $\alpha(t)$ و $K(t,s,u(s))$ توابع حقیقی و معلوم هستند و $u(t)$ تابعی مجهول است. همچنین با جدا کردن جملاتی از $K(t,s,u(s))$ که فقط به t و s بستگی دارند در تابعی مانند $K_2(t,s)$، خواهیم داشت

$$K(t,s,u(s)) = K_1(t,s,u(s)) + K_2(t,s)$$

بنابراین می‌توان معادلات انتگرال را در حالت کلی به شکل زیر نیز بیان کرد

$$\alpha(t)u(t) = \int_D K_1(t,s,u(s))dZ_s + f(t), \quad t,s \in D,\ D \subset \mathbb{R}^n \tag{۲.۱}$$

که در آن $f(t) = \int_D K_2(t,s)dZ_s$.

معادله (۲.۱)، معادله انتگرال همگن نامیده می‌شود، هرگاه $f(t) = 0$، در غیر اینصورت، آن را معادله انتگرال غیرهمگن می‌گوییم.

به

$$\mathcal{K}u(t) = \int_D K(t,s,u(s))dZ_s$$

عملگر انتگرال می‌گویند.

در معادله (۱.۱) هرگاه $\alpha(t) = 0$، آن را معادله انتگرال نوع اول و هرگاه $\alpha(t) \neq 0$ باشد آن را

[۵] Cauchy
[۶] Fredholm
[۷] Hilbert
[۸] V. Volterra

معادله انتگرال نوع دوم می‌نامیم.
هرگاه تابع K به صورت زیر باشد

$$K(t, s, u(s)) = K(t, s)u(s)$$

معادله انتگرال را معادله انتگرال خطی می‌نامند. بنابراین معادله انتگرال خطی را می‌توان به صورت زیر در نظرگرفت

$$\alpha(t)u(t) = \int_D K(t, s)u(s)dZ_s + f(t), \quad t, s \in D,\ D \subset \mathbb{R}^n$$

که در این حالت $K(t, s)$ را هسته معادله انتگرال می‌نامند. معادلات انتگرال غیرخطی، معادلاتی هستند که دارای یکی از شکل‌های عمومی زیر باشند

$$\alpha(t)u(t) + \int_D K(t, s, u(s))ds = f(t) \tag{۳.۱}$$

$$\alpha(t)u(t) + \int_D K(t, s)F(u(s))ds = f(t) \tag{۴.۱}$$

که معادلات (۳.۱) و (۴.۱) را به ترتیب غیرخطی یوریسون[۹] غیرخطی همرشتاین[۱۰] می‌نامیم.
به عنوان مثال

$$\int_0^t \sin(u(s))ds = e^t$$

$$\int_0^t e^{u^2(s)}ds + u(t) = e^t$$

$$u(t) + \int_0^1 \sin(t + su(s))ds = 1$$

در مثال فوق اولی معادله انتگرال غیرخطی همرشتاین نوع اول، دومی معادله انتگرال غیرخطی همرشتاین نوع دوم و سومی معادله انتگرال غیرخطی یوریسون نوع دوم است.

[۹] Urysohn
[۱۰] Hammerstein

۲.۱ دسته بندی معادلات انتگرال

۱.۲.۱ معادلات انتگرال فردهلم

معادلات انتگرال فردهلم به صورت زیر می‌باشند

$$\alpha(t)u(t) = \lambda \int_a^b K(t,s,u(s))ds + f(t), \quad a \leqslant t,s \leqslant b \tag{۵.۱}$$

که در آن $\lambda \neq 0$ یک پارامتر است. هم‌چنان‌که قبلا هم گفته شد اگر $\alpha(t) = 0$، معادله (۵.۱) را معادله انتگرال فردهلم نوع اول و اگر $\alpha(t) \neq 0$ باشد، آن را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌نامیم.

۲.۲.۱ معادلات انتگرال ولترا

در حالت کلی، معادلات انتگرال ولترای نوع اول به صورت زیر هستند

$$\int_a^t K(t,s,u(s))ds = f(t), \quad t \geqslant a \tag{۶.۱}$$

که در آن توابع $K(t,s,u(s))$ و $f(t)$، معلوم و $u(t)$، مجهول می‌باشند.
معادلات انتگرال ولترای خطی نوع اول به صورت زیر است

$$\int_a^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \geqslant a \tag{۷.۱}$$

رایج‌ترین نوع معادلات ولترای نوع اول، که مورد بحث قرار می‌گیرد، معادله خطی است.
یک مثال ساده ولی مهم از معادله (۷.۱)، به صورت زیر است

$$\int_a^t u(s)ds = f(t), \quad t \geqslant a$$

این معادله هم ارز با معادله

$$\begin{cases} u(t) = f'(t), & t \geqslant a \\ f(a) = 0 \end{cases}$$

است.

همچنین شکل کلی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم به صورت زیر است

$$\alpha(t)u(t) = \lambda \int_a^t K(t,s,u(s))ds + f(t), \quad t \geqslant a$$

و معادله انتگرال ولترای خطی نوع دوم به صورت زیر است

$$\alpha(t)u(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)u(s)ds + f(t), \quad t \geqslant a$$

۳.۲.۱ معادلات انتگرال منفرد

معادلاتی که در آنها حداقل یکی از حدود انتگرال، نامتناهی و یا هسته معادله انتگرال، در یک نقطه یا نقاطی از بازه انتگرال‌گیری، نامتناهی گردند منفرد نامیده می‌شوند. برای مثال، معادلات انتگرال زیر را در نظر بگیرید.

الف) تبدیل لاپلاس

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-st}u(s)ds$$

وقتی $f(t)$ معلوم و هدف یافتن $u(s)$ باشد، معادله انتگرال منفرد است.

ب) تبدیل فوریه [۱۱]

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist}u(s)ds$$

وقتی $f(t)$ معلوم و هدف یافتن $u(s)$ باشد، معادله انتگرال منفرد است.

[۱۱] Fourier

ج)

$$u(t) = ۱ + ۲\sqrt{t} - \int_{۰}^{t} \frac{۱}{\sqrt{t-s}} u(s)ds$$

۳.۱ انواع هسته در معادلات انتگرال

به دلیل اهمیت هسته در معادلات انتگرال چند نمونه از آنها را معرفی می‌کنیم.

۱) هسته جدایی پذیر (تبهگن)[۱۲]

هسته $K(t,s)$ را یک هسته جدایی پذیر گوئیم هرگاه توابع a_i و b_i برای $۱ \leqslant i \leqslant n$ وجود داشته باشند، به طوری که $K(t,s)$ را بتوان به صورت زیر نوشت

$$K(t,s) = \sum_{i=۱}^{n} a_i(t) b_i(s).$$

بدون خلل به کلیت مطلب می توان a_i و b_i را مستقل خطی در نظرگرفت. معادلات انتگرال با هسته‌های جدایی پذیر تبدیل به دستگاه معادلات متناهی می‌شوند و چون هیچ‌گونه تقریبی در روش اعمالی بکار برده نمی‌شود، جواب حاصل دارای دقت زیادی است.

۲) هسته هرمیتی[۱۳]

هسته $K(t,s)$ را یک هسته هرمیتی می‌نامیم اگر $K(t,s) = K^*(t,s)$ که در آن علامت $*$ نشانگر مزدوج مختلط می‌باشد. حالت خاصی از هسته‌های هرمیتی، هسته‌های حقیقی متقارن می‌باشند که به شکل زیر تعریف می‌شوند.

[۱۲] Degenerate kernel

[۱۳] Hermition kernel

۳) هسته حقیقی متقارن[۱۴]

هسته حقیقی $K(t,s)$ را متقارن می‌گوئیم هرگاه $K(t,s) = K(s,t)$

۴) هسته $L^۲$

هسته $K(t,s)$ را یک هسته $L^۲$ می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^۲ dtds < \infty,$$

$$\int_a^b |K(t,s)|^۲ dt < \infty, \quad s \in [a,b]$$

$$\int_a^b |K(t,s)|^۲ ds < \infty, \quad t \in [a,b]$$

۵) هسته به طور ضعیف منفرد[۱۵]

هسته $K(t,s)$ را یک هسته به‌طور ضعیف منفرد گوئیم هرگاه $K(t,s)$ را بتوان به صورت زیر نوشت

$$K(t,s) = \frac{H(t,s)}{(t-s)^\alpha}, \quad ۰ < \alpha < ۱$$

که در آن $H(t,s)$ یک تابع کراندار است.

۴.۱ معادلات انتگرال - دیفرانسیل

تعریف ۱.۴.۱. معادله انتگرال - دیفرانسیل معادله‌ای است که در آن هر دو عملگر انتگرال و مشتق بر تابع مجهول اثر نموده باشند.

این نوع معادلات در اوائل ۱۹۰۰ توسط ولترا معرفی شدند. ولترا در حال مطالعه پدیده رشد جمعیت و بخصوص تأثیر وراثت با این نوع معادلات مواجه شد. این نوع معادلات در مواردی نظیر انتقال گرما، پدیده انتشار، پخش نوترون، فیزیک، زیست شناسی و علوم مهندسی کاربرد

[۱۴] symmetric kernel
[۱۵] Weakly singular kernel

زیادی دارند.

معادلات انتگرال - دیفرانسیل ولترای غیرخطی به شکل

$$Du(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)F(u(s))ds=f(t),\quad t\in[a,b] \tag{۸.۱}$$

با شرایط تکمیلی

$$\sum_{j=۱}^{m}\alpha_{ij}u^{(j-۱)}(a)+\beta_{ij}u^{(j-۱)}(b))=d_i,\quad i=۱,۲,...,m$$

هستند که در آن D عملگر مشتق با ضرایب $p_i(t),\ i=۱,۲,...,m$ و $F(u(s))$، $K(t,s)$ و $f(t)$ توابع تحلیلی هستند. در صورتی که $F(u(s))=u(s)$، معادله (۸.۱) را خطی می‌گویند. عدد m مرتبه عملگر دیفرانسیل D است و λ عددی معلوم است. هرگاه در معادله انتگرال - دیفرانسیل ولترا کران بالای انتگرال به جای t عدد ثابت b باشد، آن را معادله انتگرال - دیفرانسیل فردهلم می‌گویند. یکی از مواردی که معادلات انتگرال دیفرانسیل ولترا، ظاهر می‌شود در تبدیل یک معادله انتگرال به معادله دیفرانسیل است. به عنوان مثال، با مشتق گیری از معادله انتگرال

$$u(t)+\int_۰^t(s-t)u(s)ds=t^۲+\frac{۱}{۱۲}t^۴$$

معادله انتگرال -دیفرانسیل زیر نتیجه می شود:

$$\begin{cases} u'(t)-\displaystyle\int_۰^t u(s)ds=۲t+\frac{۱}{۳}t^۳ \\ u(۰)=۰ \end{cases} \tag{۹.۱}$$

با مشتق گیری مجدد از (۹.۱) معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} u''(t)-u(t)=۲+t^۲ \\ u(۰)=۰,\ u'(۰)=۰ \end{cases}$$

نتیجه می‌شود.

معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات انتگرال -دیفرانسیل هستند

$$\begin{cases} u'(t)+u(t)+۲\displaystyle\int_۰^t tse^{-u^۲(s)}ds=۱,\qquad t\in[۰,۱] \\ u(۰)=۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{(۴)}(t) - \int_{۰}^{t} e^{-s}u^{۲}(s)ds = ۱, & t \in [۰, ۱] \\ u(۰) = ۱, \quad u'(۰) = ۱ \\ u(۱) = e, \quad u'(۱) = e \end{cases}$$

در مثال‌های فوق اولی معادله انتگرال -دیفرانسیل ولترای غیرخطی مرتبه اول، دومی معادله انتگرال -دیفرانسیل ولترای غیرخطی مرتبه چهارماست.
معادلات انتگرال و انتگرال -دیفرانسیل توسط افراد زیادی مورد توجه و بررسی قرار گرفته است که در کارهای خود از روشهایی مانند گالرکین[۱۶] موجک گالرکین[۱۷]، هم محلی[۱۸]، اختلال هموتوپی[۱۹]، تجزیه آدومیان[۲۰]، و غیره استفاده کرده‌اند.

۵.۱ مسائل مقدار اولیه و مرزی

۱) مسئله مقدار اولیه

شکل عمومی مسأله مقدار اولیه بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} Du(t) = f(t), & t > t_{۰} \\ u^{(i)}(t_{۰}) = \alpha_i, & i = ۰, ۱, ..., n - ۱ \end{cases}$$

اگر D عملگر دیفرانسیل مرتبه n باشد، به n شرط نیاز داریم تا به جواب برسیم.

[۱۶] Galerkin method
[۱۷] Wavelet-Galerkin method
[۱۸] Collocation method
[۱۹] Homotopy perturbation method
[۲۰] Decomposition method

۲) مسئله مقدار مرزی

شکل عمومی مسأله مقدار مرزی بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} Du(t) = f(t), & a < t < b \\ \sum_{j=0}^{n-1}(\alpha_{ij}u^{(j)}(a) + \beta_{ij}u^{(j)}(b)) = d_i, & i = 1, ..., n \end{cases} \tag{10.1}$$

که D عملگر دیفرانسیل مرتبه n می‌باشد.

به عبارت دیگر، یک مسأله مقدار مرزی ناهمگن را، می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

فرض کنید D عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه n ام به صورت زیر تعریف شود

$$Du = a_n u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_1 u' + a_0 u$$

که در آن برای $j = 0, 1, ..., n$، $a_j \in C^j[a, b]$ و به ازای هر t در $[a, b]$، $a_n(t) > 0$ می‌باشد. و y عملگر مرزی تعریف شده به صورت زیر باشد

$$y_i u = \sum_{j=1}^{n}[(\alpha_{ij}u^{(j-1)}(a) + \beta_{ij}u^{(j-1)}(b)], \qquad i = 1, ..., n$$

و

$$y(u) = [y_1 u, ..., y_n u].$$

در این‌صورت مسأله (۱۰.۱) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} Du(t) = f(t) \\ y(u)(a) = d \end{cases}$$

مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} Du = -\lambda pu \\ y(u) = 0 \end{cases} \tag{11.1}$$