بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد کرمان

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی

گرایش: محض

موضوع:

دیدگاههای توپولوژیک گروههای تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا مولایی

نگارش:

علی طهمورسی

سال تحصیلی: ۱۳۷۹

۱۳۷۹ /۹/ ۱۶

موضوع :

دیدگاههای توپولوژیک گروههای تعمیم یافته

توسط:

علی طهمورسی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته وگرایش: ریاضی محض

از این پایان نامه در تاریخ ۱۳۷۹/۴/۱۴ در مقابل هیئت داوران دفاع به عمل آمده و مورد تصویب قرار گرفت.

اعضاء هیئت داوران

استاد راهنما: دکتر محمدرضا مولایی

داور ۱: دکتر نصراله گرامی

داور ۲: دکتر مهدی سبزواری

مدیر گروه آموزشی کارشناسی ارشد
دکتر اسفندیار اسلامی

معاون آموزشی دانشگاه
آقای مجید غلامحسین پور

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی
دکتر محمد حسین متقی

رئیس دانشگاه
دکتر محمد حسین متقی

تقدیم به :

پدر عزیز،

و مادر مهربانم

تشکر و قدردانی

ای یکتاداننده علوم و ای آفریننده اسرار و رموز، تو را حمد و سپاس می‌گویم که توفیق کسب علم و معرفت را به من عطا فرمودی و از تو می‌خواهم که راهنمایم باشی.

در ابتدا برخود واجب می‌دانم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مولایی که راهنمایی این رساله را بعهده داشته‌اند و بحق از تواضع و متانت و معرفت ایشان درسها آموختم، کمال تشکر و سپاسگزاری را داشته و همچنین از اساتید محترم آقایان دکتر نصراله گرامی و دکتر مهدی سبزواری که زحمت مطالعه و تصحیح این رساله را برخود هموار کرده و در جلسه دفاعیه راهنمائیهای لازم را ارزانی داشته‌اند نهایت تشکر را دارم.

هرچند زبانم قاصر از گفتن است ولی وظیفه خود می‌دانم از زحمات بیدریغ پدر، مادر و خانواده‌ام که همواره مشوق من در امر تحصیل بوده‌اند و با قبول زحمات و سختی‌ها برخود تحصیل را برمن آسان ساخته‌اند، نهایت تشکر را دارم.

همچنین از خانمها خالقی و آذریان که زحمت تایپ این پایان‌نامه را پذیرفتند و با صبر و حوصله این کار را به اتمام رساندند سپاسگزارم.

علی طهمورسی

تیرماه ۱۳۷۹

چکیده

در این پایان‌نامه ما سعی کرده‌ایم از دید توپولوژیکی پس از بیان مقدمات و تعاریف لازم، به بررسی گروهها و زیرگروههای تعمیم‌یافته بپردازیم. زیرگروههای نرمال تعمیم‌یافته راه رسیدن به فضای هم‌مجموعه‌ای را برای ما هموار می‌کند. و سپس نگاهی به حاصلضرب گروههای تعمیم‌یافته توپولوژیک، گروههای موضعی تعمیم‌یافته و گروههای تعمیم‌یافته همبند می‌اندازیم. و در کارهای بعد با در نظر گرفتن فضایی توپولوژیک و گروه تعمیم‌یافته توپولوژیکی به بررسی دستگاههای دینامیکی تعمیم‌یافته توپولوژی خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: گروه تعمیم‌یافته توپولوژیکی، فضای هم‌مجموعه‌ای تعمیم‌یافته، زیرگروههای تعمیم‌یافته اشباع شده، زیرگروههای تام، گروههای موضعی تعمیم‌یافته توپولوژیکی همبند، و دستگاههای دینامیکی تعمیم‌یافته توپولوژیکی.

Topology توپولوژی

گروه تعمیم یافته

Generalized group

فهرست

مقدمه

در فصل اول نگاهی به تعاریف، قضایا و مفاهیم گروههای تعمیم یافته، توپولوژی و دستگاههای دینامیکی می‌اندازیم.

در فصل دوم گروههای تعمیم‌یافته توپولوژیکی را معرفی می‌کنیم و سپس زیرگروههای نرمال تعمیم‌یافته و فضای هم مجموعه‌ای را بیان کرده و پیوستگی نگاشت e و زیر گروههای تعمیم‌یافته توپولوژیکی را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم زیر گروههای تعمیم‌یافته اشباع شده را معرفی می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که چگونه با در دست داشتن یک گروه توپولوژیک و نوع خاصی از یک نگاشت تصویری از آن گروه توپولوژیک به یک گروه تعمیم‌یافته توپولوژیک دست یافت. در بخش‌های بعد حاصلضرب گروههای تعمیم‌یافته توپولوژیک، زیر گروههای تام، گروههای موضعی تعمیم‌یافته و گروههای تعمیم‌یافته همبند را بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم دستگاههای دینامیکی تعمیم‌یافته را معرفی کرده و سپس با در نظر گرفتن یک فضای توپولوژیک و گروه تعمیم‌یافته توپولوژیکی به بررسی دستگاههای دینامیکی تعمیم‌یافته توپولوژیکی خواهیم پرداخت.

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱_۱ مفاهیم مقدماتی گروههای تعمیم یافته

در این بخش تعاریف و قضایای گروههای تعمیم‌یافته را بیان می‌کنیم. برای اثبات قضایا به مراجع $[M_1]$ ، $[M_2]$، $[M_3]$ ، $[M_4]$ و $[o]$ مراجعه شود.

تعریف ۱_۱_۱ : یک گروه تعمیم‌یافته یک مجموعه ناتهی G به همراه یک عمل دوتایی روی G (که معمولاً آن را ضرب G می‌نامیم) است که در اصول موضوع زیر صدق می‌کند:

الف) برای هر $a, b, c \in G$ ، $(ab)c = a(bc)$؛

ب) برای هر عضو $a \in G$ عضو یکتای $e(a)$ در G وجود دارد به طوریکه $ae(a) = e(a)a = a$؛

ج) برای هر $a \in G$ یک عضو a^{-1} در G وجود دارد به طوریکه $aa^{-1} = a^{-1}a = e(a)$ ، $e(a)$ را عضو همانی a و a^{-1} را وارون a می‌نامیم.

توجه کنید که هر گروه یک گروه تعمیم‌یافته است. (برای هر $a \in G$ ، $e(a) = e_G$).

تعریف ۱_۱_۲ : گروه تعمیم‌یافته G را جابجایی گویند هر گاه برای هر $a, b \in G$ ، $ab = ba$.

لم ۱_۱_۳: هر گاه G یک گروه تعمیم‌یافته باشد و $a \in G$ آنگاه

۱) $e(e(a)) = e(a)$

۲) $e(a) = e(a^{-1})$

۳) a^{-1} یکتاست و $(a^{-1})^{-1} = a$

۴) $a^2 = a$ اگر و تنها اگر $a = e(a)$

۵) $e(a^n) = e(a)$ ، که در آن، n یک عدد صحیح دلخواه است.

تعریف ۱_۱_۴: زیر مجموعه ناتهی H از گروه تعمیم یافته G را یک زیر گروه تعمیم‌یافته G

می‌نامیم هر گاه H تحت عمل ضرب در G یک گروه تعمیم‌یافته تشکیل دهد.

لم ۱ـ۱ـ۵: زیر مجموعه ناتهی H از گروه تعمیم‌یافته G، زیر گروه تعمیم‌یافته G است اگر و تنها اگر برای هر a, b متعلق به H داشته باشیم $ab^{-1} \in H$

تعریف ۱ـ۱ـ۶: گروه تعمیم‌یافته G را نرمال گوییم هر گاه برای هر y, x در G، $e(xy) = e(x)e(y)$.

تعریف ۱ـ۱ـ۷: نگاشت φ از گروههای تعمیم‌یافته G در گروه تعمیم‌یافته H را یک همریختی می‌نامیم اگر برای هر b, a متعلق به G، $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

قضیه ۱ـ۱ـ۸: فرض کنید $f : G \to H$ یک همریختی از گروههای تعمیم یافته G در گروه تعمیم‌یافته H باشد آنگاه

۱) برای هر $a \in G$، $f(e(a)) = e(f(a))$

۲) برای هر $a \in G$، $f(a^n) = (f(a))^n$

۳) اگر K زیر گروه تعمیم G باشد. $f(K)$ زیر گروه تعمیم‌یافته H است

۴) اگر D زیر گروه تعمیم‌یافته H باشد و $f^{-1}(D) \neq \Phi$ آنگاه $f^{-1}(D)$ زیر گروه تعمیم‌یافته G است.

تعریف ۱ـ۱ـ۹: فرض کنیم $f : G \to H$ یک همریختی از گروه تعمیم‌یافته G به گروه تعمیم‌یافته H باشد. به ازای هر a در G، هسته f در a را که با $ker f(a)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از مجموعه $\{x \in G | f(x) = f(e(a))\}$.

لم ۱ـ۱ـ۱۰: فرض کنیم G یک گروه تعمیم‌یافته باشد رابطه

$$\sim = \{(a, b) \in G \times G | e(a) = e(b)\}$$

یک رابطه ارزی روی G است و کلاسهای هم‌ارزی حاصل از این رابطه هم‌ارزی، با ضرب G، تشکیل گروه می‌دهند وبرای بیان این مطلب که $(a, b) \in \sim$ می‌نویسیم $a \sim b$ و همچنین نماد G_a را برای نمایش کلاس هم‌ارزی حاصل از رابطه هم‌ارزی فوق، با نماینده a، بکار می‌بریم بنابراین با قرار داد فوق

$$G_a = \{x \in G | e(x) = e(a)\}$$

تعریف ۱ـ۱ـ۱۱: فرض کنیم $f : G \to H$ یک همریختی گروههای تعمیم‌یافته باشد، آنگاه مجموعه $\bigcup_{a \in G} kerf_a$ را هسته f نامیده و با $kerf$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱ـ۱ـ۱۲: اگر $f : G \to H$ یک همریختی از گروه تعمیم‌یافته نرمال G در گروه تعمیم‌یافته H باشد. آنگاه $kerf$ زیر گروه نرمال تعمیم یافته G است.

۱ـ۲ مفاهیمی از توپولوژی

در این بخش Z, Y, X, A فضاهای توپولوژیک می‌باشند. برای اثبات قضایا به مراجع $[j]$ ، $[B]$ و $[D]$ مراجعه شود.

تعریف ۱ـ۲ـ۱: فرض کنیم $\pi_1 : X \times Y \to Y$ و $\pi_2 : X \times Y \to Y$ بترتیب با ضابطه‌های $\pi_1(x, y) = x$ و $\pi_2(x, y) = y$ تعریف شده باشند. نگاشتهای π_1 و π_2 بترتیب نگاشتهای تصویری $X \times Y$ بروی عوامل اول و دوم آن خوانده می‌شوند.

لم ۱ـ۲ـ۲: نگاشتهای تعریف در ۱ـ۲ـ۱ باز می‌باشند.

قضیه ۱_۲_۳: فرض کنیم تابع $f : A \to X \times Y$ با ضابطه $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$ داده شده باشد. در این صورت f پیوسته است. اگر و تنها اگر $f_1 : A \to X$ و $f_2 : A \to Y$ پیوسته باشند.

تعریف ۱_۲_۴: فضای توپولوژیک X را هاوسدورف خوانیم در صورتی که به ازای هر دو نقطه متمایز x_1 و x_2 از X، همسایگی‌هایی مانند U_1 و U_2 بترتیب از x_1 و x_2 یافت شوند که از هم جدا باشند.

قضیه ۱_۲_۵: **در فضای هاوسدورف هر مجموعه متناهی بسته است.**

قضیه ۱_۲_۶: **حاصلضرب دو فضای هاوسدورف، فضایی هاوسدورف است. هر زیر فضای، فضایی هاوسدورف، فضایی هاوسدروف است.**

لم ۱_۲_۷: فضای X هاوسدورف است اگر و فقط اگر $\Delta = \{(x \times x) | x \in X\}$ در $X \times X$ بسته باشد.

قضیه ۱_۲_۸: اجتماع گردایه‌ای از مجموعه‌های همبندکه یک نقطه مشترک دارند،همبند است.

قضیه ۱_۲_۹: فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای همبند از X باشد.اگر $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ آنگاه B نیز همبند است.

قضیه ۱_۲_۱۰: تصویر هر فضای همبند، تحت نگاشت پیوسته همبند است.

قضیه ۱_۲_۱۱: حاصل ضرب دکارتی فضاهای همبند، فضایی همبند است.

قضیه ۱_۲_۱۲: تصویر هر فضای فشرده تحت نگاشت پیوسته فشرده است.

قضیه ۱_۲_۱۳: فرض کنیم $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی فضای توپولوژیک X، و نگاشت

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow \frac{X}{\sim} \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

باز باشد. فضای خارج قسمتی $\frac{X}{\sim}$ هاوسدورف است اگر و فقط اگر مجموعه $\{(x,y) \in X \times X | x \sim y\}$ بسته باشد.

۱_۳ مفاهیم مقدماتی دستگاههای دینامیکی

نماد دستگاه دینامیکی ساختاری ریاضی برای مفهوم علمی فرآیند تکاملی است. و دارای کاربردهایی در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، بوم شناسی، اقتصاد و حتی دستگاههای عمومی، با احتمال وجود معینی از حالتها و قوانین تکامل که بر این دستگاه حکم فرماست.

قوانین تعویض ناپذیر با زمان، و رفتاری از دستگاه را در نظر می‌گیریم که کاملاً در حالت اولیه تعریف شده است. بنابراین نماد دستگاه دینامیکی شامل یک مجموعه از حالتهای ممکن (فضای حالت) و قانون تکامل حالت در زمان است.

۱_۳_۱: (فضای حالت) همه حالتهای ممکن از یک دستگاه به وسیله نقاطی از یک مجموعه مانند X مشخص می‌شود. این مجموعه را فضای حالت دستگاه دینامیکی می‌گوئیم.

الزاماً تعیین یک نقطه از $x \in X$ کافی نیست. بلکه موقعیت مکان دستگاه نیز باید در آن نقطه تشریح شود. که به وسیله قانون تکامل که بعداً توضیح خواهیم داد بیان می‌شود.

مثال ۱_۳_۲: (پاندول)

حالت یک پاندول معمولی کاملاً به وسیله تعریف تغییر مکان زاویه φ از مکان قائم و متناظر با سرعت

زاویه‌ای φ' مشخص می‌شود. زاویه φ به تنهایی برای تعیین حالت پاندول کافی نیست. بنابراین برای یک دستگاه مکانیکی ساده، فضای حالت مجموعه $X = S^1 \times R^1$ است. جائیکه S^1 دایره واحد پارامتری شده به وسیله زاویه، و R^1 محور حقیقی متناظر با مجموعه همه تکامل‌های ممکن است.

مجموعه در نظر گرفته شده X یک خمینه هموار دوبعدی (استوانه) در R^3 است.

مثال ۱ـ۳ـ۳: (دستگاه مکانیکی کلی) در مکانیک کلاسیک حالتی از یک دستگاه تکدما با درجه آزادی s، به وسیله یک بردار حقیقی $2s$ـ بعدی

$$(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)^T$$

مشخص می‌شود. جائیکه q_i مختصات تعمیم‌یافته، و p_i گشتاورهای تعمیم‌یافته متناظر می‌باشند. در این حالت. $x = R^{2s}$. و اگر $k-$ مختص آن دایره باشند آنگاه $X = S^k \times R^{2s-k}$. بنابراین پاندول حالت خاصی از دستگاه دینامیکی کلی است. در این حالت $s = k = 1$ و $q_1 = \varphi$، $\varphi' = m\ell\varphi$ جائیکه ℓ طول پاندول است.

مثال ۱ـ۳ـ۴: (دستگاه کوانتومی). در مکانیک کوانتومی، حالتی از یک دستگاه با دو حالت رعایت شده به وسیله بردار $\Psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in C$ مشخص می‌شود. جائیکه a_1 و a_2 اعداد مختلط می‌باشند و در شرایط $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ صدق می‌کنند. احتمال وقوع دستگاه در حالت iام، $p_i = |a_i|^2$ برای $i = 1, 2$ است.

مثال ۱ـ۳ـ۵: (راکتور شیمیایی). حالتی از راکتور شیمیایی تکدما به وسیله تعیین کردن مقدار تابع تمرکز از $n-$ واکنش شیمیایی اجسام تعریف می‌شود. $c = (c_1 \ldots, c_n)^T$. تابع تمرکز c_i باید نامنفی