بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش آنالیز

n –میانگین پذیری ضعیف یک جبر باناخ

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

عبداله حسام

شهریورماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز آقای عبداله حسام

تحت عنوان:

n– میانگین پذیری ضعیف یک جبر باناخ

در تاریخ ۸۹/۶/۱۶ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر علی رجالی با مرتبه علمی استاد امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر محمود لشکری‌زاده با مرتبه علمی استاد امضاء

۳- استاد داور خارج گروه دکتر اکرم یوسف‌زاده با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

تقدیم به

بزرگ معلم زندگی ام

پدرم

تقدیر و تشکر

سپاس یزدان پاک را، که قطره ای از دانش بی کران خویش و لذت دانستن و دانایی را به بندگان عطا فرمود .

به پیشگاه همه معلمانم، از ابتدا تا کنون، که در مسیر دانش با فروتنی و بردباری دستانم را گرفته و دانسته های خود را بی دریغ بر من ارزانی داشته اند، درود بی کران تقدیم می دارم.

از راهنمایی و پشتیبانی استاد گرانقدر جناب آقای دکتر رجالی در حین تحصیل و انجام این تحقیق سپاسگزارم و برای ایشان و جناب آقای دکتر لشکری زاده، استاد ارجمند دوران تحصیل و استاد داور پایان نامه ام، آرزوی سلامتی دارم.

صبوری و همراهی همسر گرانقدرم را نیز که مشوق من در این مسیر بود، ار ج می نهم.

چکیده

در این پایان نامه، مفهوم n-میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ را که در واقع تعمیم میانگین پذیری ضعیف است، معرفی می کنیم. قضیه های اساسی در رابطه با این مفهوم مورد بررسی قرار می گیرند. از جمله، شرایطی را که ویژگی n-میانگین پذیری ضعیف، از دوگان دوم یک جبر باناخ به خود این جبر انتقال یافته و شرایطی که این ویژگی تحت همریختی ها پایا است را می آوریم. سپس، تحقیق می کنیم که چند دسته مهم از جبرهای باناخ، به ازای کدام اعداد طبیعی n، یک جبر n-میانگین پذیر ضعیف هستند.

در نهایت، n-میانگین پذیری ضعیف را به ازای اعداد n منفی نیز تعریف کرده و چند نتیجه جالب را در این مورد بیان می کنیم.

واژه های کلیدی : جبرهای باناخ، مشتق پیوسته، مشتق درونی، n-میانگین پذیری ضعیف ،میانگین پذیری، آرنز منظم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان مفاهیم مقدماتی و قضیه‌های اساسی مورد نیاز برای بیان مفاهیم مورد بحث فصل‌های بعد می‌پردازیم. برای ملاحظه اثبات قضیه‌های این فصل که در زمینه‌های آنالیز تابعی، آنالیز هارمونیک و جبرهای باناخ است، می‌توانید به مراجع پایان‌نامه مراجعه فرمایید.

۱—۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱ — ۱.۱: (الف) یک فضای برداری (فضای خطی) را که مجهز به یک نرم باشد، **فضای برداری نرمدار**[۱] می‌نامیم. نرم یک فضای برداری را عموماً با $\|.\|$ نشان می‌دهیم. اگر X یک فضای برداری نرمدار باشد آن‌گاه $d(x,y)=\|x-y\|$ یک متر روی X تعریف می‌کند. توپولوژی تعریف شده توسط این متر را **توپولوژی نرمی**[۲] روی X می‌نامیم.

(ب) هر فضای برداری نرمدار را که نسبت به متر نرمی کامل باشد، یک **فضای باناخ**[۳] می‌نامند. مثلاً اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه باشد، به ازای هر $1 \le p < \infty$ فضای $L^p(\mu)$ با نرم

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad f \in L^p(\mu)$$

(مشروط بر این که توابعی که تقریباً همه‌جا مساویند را یکی بگیریم) یک فضای باناخ است. هم‌چنین است $L^\infty(\mu)$ با نرم یکنواخت.

بعلاوه، هر زیرفضای بسته از یک فضای باناخ، فضایی باناخ است.

(ج) اگر H یک فضای برداری ضرب داخلی باشد و با توجه به نرم القایی از این ضرب داخلی یعنی $(x \in H)$ $\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}}$، تشکیل یک فضای باناخ بدهد، H را یک **فضای هیلبرت**[۴] می‌نامیم. مثلاً $L^2(\mu)$ با ضرب داخلی تعریف شده به صورت زیر یک

---

[۱] Normed vector space

[۲] Norm topology

[۳] Banach space

[۴] Hilbert space

فضای هیلبرت است

$$\langle f,g\rangle = \int_X f\bar{g}d\mu \quad , \quad f,g\in L^{2}(\mu)$$

تعریف ۱—۲.۱: فرض کنیم X و Y فضاهای برداری نرمدار باشند.

(الف) **یک عملگر خطی یا تبدیل خطی**[۵] از X به Y عبارتست از یک نگاشت $T:X\longrightarrow Y$ به طوری که به ازای هر $x,y\in X$ و هر $\alpha,\beta\in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

در این حالت $T(x)$ را با Tx هم نشان می‌دهند.

(ب) یک عملگر خطی T را کراندار نامیم هرگاه ثابتی مانند $C>0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in X$، $\|Tx\|\le C\|x\|$. این تعریف، معادل با پیوسته بودن عملگر T است.

مجموعه عملگرهای خطی کراندار (پیوسته) از X به Y را با $BL(X,Y)$ یا $B(X,Y)$ نشان داده و اگر $X=Y$ باشد با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

(ج) اگر برای هر $T\in B(X,Y)$ تعریف کنیم:

$$\|T\|=\sup\{\|Tx\|:\|x\|\le 1\}$$

آن‌گاه تابع $T\longmapsto \|T\|$ یک نرم به نام **نرم عملگر**[۶] روی $B(X,Y)$ تعریف می‌کند. متذکر می‌شویم که طبق تعریف، $\|T\|<\infty$. اگر Y فضایی باناخ باشد، $B(X,Y)$ نیز

[۵] Linear operator or Linear transformation

[۶] Operator norm

باناخ است. هم‌چنین می‌توان نشان داد که:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = ۱\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq ۰\} \\ &= \inf\{C : \|Tx\| \leq C\|x\|, x \in X\} \end{aligned}$$

تعریف ۱ــ۱.۳: $T \in B(X,Y)$ یک **ایزومرفیسم**[۷] یا یکریختی نام دارد هرگاه T دوسویی و $T^{-۱}$ کراندار باشد (به عبارتی به ازای ثابتی مانند $C > ۰$، $\|Tx\| \geq C\|x\|$). T یک **ایزومتری**[۸] یا طولپایی نامیده می‌شود هرگاه $\|Tx\| = \|x\| (x \in X)$.

تعریف ۱ــ۱.۴: اگر میدان $\mathbb{F}$ را برابر با $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ بگیریم، یک عملگر خطی $T : X \longrightarrow \mathbb{F}$ را یک **تابعک خطی**[۹] روی X می‌نامیم. اگر X فضای برداری (نرمدار) باشد، $B(X, \mathbb{F})$ متشکل از همه تابعک‌های خطی پیوسته روی X، **فضای دوگان (توپولوژیکی)** X[۱۰] نام دارد که آن را با X^* یا X' نشان می‌دهند. بنابراین به ازای هر فضای نرمدار X، X^* یک فضای باناخ است.

به همین ترتیب با تکرار عمل دوگان‌سازی می‌توان **دوگان‌های مکرر**[۱۱] X را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ به دست آورد که آن‌ها را با $X^{(n)}$ نشان می‌دهیم و قرارداد می‌کنیم $X^{(۰)} = X$.

اگر $x \in X$ و $x^* \in X^*$، مقدار x^* در x یعنی $x^*(x)$ را با $\langle x, x^* \rangle$ نمایش می‌دهیم.

---

[۷] Isomorphism

[۸] Isometry

[۹] Linear functional

[۱۰] Topological dual of X

[۱۱] Iterated duals

می‌دانیم

$$\|x^*\| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : \|x\| \leq ۱\}$$

در عین حال، بنا بر قضیه ۳.۴ از [۳۱] داریم:

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : \|x^*\| \leq ۱\}$$

قضیه ۱—۵.۱: فرض کنیم (X, M, μ) یک فضای اندازه و $۱ < p < \infty$ و $۱ = \frac{۱}{p} + \frac{۱}{q}$ و $g \in L^q(\mu)$. اگر تعریف کنیم $F_g : L^p(\mu) \longrightarrow I\!F$ به صورت

$$F_g(f) = \int_X fgd\mu \quad , \quad f \in L^p(\mu)$$

آن‌گاه $F_g \in (L^p(\mu))^*$ و نگاشت $g \longmapsto F_g$ یکریختی طولپا از $L^q(\mu)$ به $L^p(\mu)^*$ است.

اثبات: به قضیه ۵.۵ از [۵] صفحه ۷۷ مراجعه شود. □

قضیه ۱—۶.۱: (نمایش ریز)[۱۲] اگر X یک فضای موضعاً فشرده هاسدروف و $\mu \in M(X)$ و تعریف کنیم $F_\mu : C_\circ(X) \longrightarrow I\!F$ را با

$$F_\mu(f) = \int_X fd\mu \quad , \quad f \in C_\circ(X)$$

آن‌گاه، $F_\mu \in C_\circ(X)^*$ و نگاشت $\mu \longmapsto F_\mu$ یک ایزومرفیسم ایزومتریک از $M(X)$ به روی $C_\circ(X)^*$ است.

اثبات: قضیه ۷.۵ از [۵] صفحه ۷۸ است. □

[۱۲] Riesz representation

قضیه ۱ — ۷.۱: (هان—باناخ)[۱۳]: فرض کنیم M زیرفضایی از فضای نرمدار X و f یک تابعک خطی کراندار روی M باشد. در این صورت می‌توان f را به یک تابعک خطی کراندار مانند F روی X گسترش داد به طوری که $\|F\| = \|f\|$.

اثبات: بنابر قضیه ۵.٦ از [۵] برقرار است. □

تذکر ۱ — ۸.۱: دوگان دوم فضای نرمدار X یعنی X^{**} از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از جمله این که هر عضو x از X توسط یک نگاشت $\hat{}: X \longrightarrow X^{**}$ که **نشاننده متعارف**[۱۴] X در X^{**} نام دارد به یک عضو یکتای $\hat{x} \in X^{**}$ نظیر می‌شود که به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\langle x^*, \hat{x} \rangle = \langle x, x^* \rangle \quad (x^* \in X^*)$$

نگاشت فوق یک یکریختی طولپا از X به روی برد آن در X^{**} یعنی $\hat{X}$ به عنوان یک زیرفضای بسته از X^{**} تعریف می‌کند. زیرا، به ازای هر $x \in X$ و هر $x^* \in X^*$ داریم:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\| &= \sup\{|\langle x^*, \hat{x} \rangle| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq ۱\} \\ &= \sup\{|\langle x, x^* \rangle| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq ۱\} = \|x\| \end{aligned}$$

که تساوی آخر طبق توضیح قبل از قضیه ۱ — ۵.۱ برقرار است.

بنابراین می‌توان X را به عنوان زیرفضایی از X^{**} در نظر گرفت. در حالت کلی، لزومی ندارد که X با X^{**} برابر بوده و می‌تواند زیرفضایی سره آن باشد.

[۱۳] Hahn-Banach

[۱۴] Canonical embedding

تعریف ۱—۱.۹: اگر X یک فضای نرمدار و $X = X^{**}$، X را یک **فضای بازتابی**[۱۵] یا انعکاسی می‌گویند. به عبارتی، $X^{**} = \{\hat{x} : x \in X\}$. مثلاً بنا بر قضیه ۱—۱.۵ هر فضای $L^p(\mu)$ که $1 < p < \infty$ فضایی بازتابی است.

در ادامه به معرفی چند توپولوژی مهم می‌پردازیم:

تعریف ۱—۱.۱۰: فرض کنید X یک فضای برداری نرمدار باشد.

(الف) ضعیف‌ترین توپولوژی روی X را که هر تابعک $f \in X^*$ تحت آن پیوسته باشد، **توپولوژی ضعیف**[۱۶] روی X یا wـتوپولوژی می‌نامیم و آن را با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم. همگرایی نسبت به این توپولوژی به همگرایی ضعیف شهرت دارد. به عبارتی اگر (x_α) یک تور در X باشد، آن‌گاه $x_\alpha \longrightarrow x$ به طور ضعیف اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in X^*$، $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.

اینک فرض کنیم X یک فضای برداری نرمدار و X^* فضای دوگان آن باشد. همانند تعریف فوق توپولوژی ضعیف روی X^* توپولوژی تعریف شده توسط X^{**} است. با این حال، توپولوژی جالب‌تر روی X^* توپولوژی تعریف شده توسط X به عنوان زیرفضایی از X^{**} است.

(ب) ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* را که به ازای هر $x \in X$، $\hat{x}$ نسبت به آن پیوسته می‌گردد، **توپولوژی ضعیف***[۱۷] یا w^*ـتوپولوژی روی X^* نامیم و آن را با نماد $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهیم.

---

[۱۵] Reflexive

[۱۶] Weak topology

[۱۷] W^* topology

به طور خلاصه، اگر (f_α) یک تور در X^* باشد، $f_\alpha \longrightarrow f$ در w^*ـتوپولوژی اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$، $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$.

(ج) فرض کنیم Y نیز یک فضای نرمدار باشد. آن‌گاه توپولوژی روی $B(X,Y)$ را که توسط نگاشت‌های ارزیابی $T \longmapsto Tx$، $(x \in X)$ تولید می‌شود، **توپولوژی عملگری قوی**[۱۸] روی $B(X,Y)$ نامیده می‌شود. **توپولوژی عملگری ضعیف**[۱۹] توپولوژی است که توسط تابعک‌های خطی $T \longmapsto f(Tx)$ $(x \in X$ و $f \in Y^*)$ تولید می‌گردد.

باز هم این توپولوژی‌ها بر حسب همگرایی بهتر درک می‌شوند. $T_\alpha \longrightarrow T$ به طور قوی، اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی نرمی Y، به ازای هر $x \in X$، $T_\alpha x \longrightarrow Tx$ در صورتی که $T_\alpha \longrightarrow T$ به طور ضعیف اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی ضعیف Y، به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم که $T_\alpha x \longrightarrow Tx$.

اکنون به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که نقشی اساسی در اثبات بسیاری از قضیه‌ها و نتایج مورد بررسی در این پژوهش ایفا می‌کند:

قضیه ۱ـ۱.۱۱: (گلدشتاین)[۲۰] فرض کنیم X یک فضای باناخ و $\hat{}: X \longrightarrow X^{**}$ نشاننده طبیعی باشد. در این صورت، برای هر $\Phi \in X^{**}$ یک تور (x_α) در X موجود است که $\hat{x}_\alpha \longrightarrow \Phi$ در $\sigma(X^{**}, X^*)$ و به ازای هر α، $\|x_\alpha\| \leq \|\Phi\|$.

اثبات: قضیه ۲۹.۳.A از [۶] است. □

۱۸ Strong operator topology

۱۹ Weak operator topology

۲۰ Goldshtine

قضیه ۱ـ۱۲.۱: فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار باشند. به ازای هر $T \in B(X,Y)$، یک $T^* \in B(Y^*,X^*)$ به صورت یکتا موجود است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^* y^* \rangle$$

به ازای هر $x \in X$ و هر $y^* \in Y^*$. به علاوه $\|T\| = \|T^*\|$.

اثبات: قضیه ۱۰.۴ از [۳۱] را ملاحظه نمایید. □

تعریف ۱ـ۱۳.۱: اگر $T \in B(X,Y)$، آن‌گاه نگاشت یکتای T^* در قضیه فوق را **نگاشت الحاقی**[۲۱] T می‌نامیم. اکنون فرض کنیم $T \in B(X,Y)$ و X را به عنوان زیرفضایی از X^{**} در نظر می‌گیریم. برای هر $y \in Y^*$ داریم:

$$\langle y^*, T^{**}(x) \rangle = \langle T^* y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle$$

و در نتیجه $T^{**}|_X = T$.

قضیه ۱ـ۱۴.۱: اگر X و Y دو فضای باناخ و $S, T \in B(X,Y)$، آن‌گاه

(الف) به ازای هر $\alpha, \beta \in I\!F$ داریم $(\alpha S + \beta T)^* = \alpha T^* + \beta S^*$.

(ب) اگر T وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه T^* نیز وارون‌پذیر است و $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(ج) اگر Z یک فضای باناخ و $U \in B(Y,Z)$، آن‌گاه $(UT)^* = T^* U^*$.

اثبات: به [۵] صفحات ۱۷۱ تا ۱۷۲ مراجعه نمایید. □

---

[۲۱] Adjoint

تعریف ۱ – ۱.۱۵: فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ یک **عملگر فشرده**[۲۲] نام دارد، هرگاه بستار تصویر گوی یکه X تحت آن در Y فشرده باشد.

از آن‌جا که Y فضایی باناخ است، این تعریف معادل آن است که تصویر گوی یکه، کراندار باشد. مجموعه عملگرهای فشرده از X به Y را با $K(X,Y)$ و اگر $X = Y$ باشد با $K(X)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱ – ۱.۱۶: $T \in B(X,Y)$ فشرده است اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.

اثبات: به قضیه ۴.۳ از [۵] صفحه ۱۷۸ مراجعه نمایید. □

تعریف ۱ – ۱.۱۷: فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $T \in B(X,Y)$. در این صورت T **فشرده ضعیف**[۲۳] است، هرگاه بستار گوی یکه X در Y فشرده ضعیف باشد.

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که عملگرهای فشرده ضعیف تعمیمی از عملگرهای فشرده هستند. متذکر می‌شویم که فشرده ضعیف بودن تصویر گوی یکه در Y یعنی نسبت به توپولوژی ضعیف روی Y فشرده باشد.

گزاره ۱ – ۱.۱۸: فرض کنیم X و Y و Z فضاهای باناخ باشند.

(الف) اگر X یا Y بازتابی باشند، آن‌گاه هر عملگر در $B(X,Y)$ فشرده ضعیف است. به طور خاص اگر H فضایی هیلبرت باشد، آن‌گاه هر عضو $B(H)$ فشرده ضعیف است.

(ب) اگر $T : X \longrightarrow Y$ فشرده ضعیف و $S \in B(Y,Z)$ و $U \in B(Z,X)$، آن‌گاه ST و

---

[۲۲] Compact operator

[۲۳] Weakly compact

TU نیز فشرده ضعیف هستند.

اثبات: بنابر گزاره ۵.۲ از [۵] صفحه ۱۸۷ برقرار است. □

قضیه ۱—۱.۱۹: فرض کنیم X و Y فضاهایی باناخ و $T \in B(X,Y)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) T فشرده ضعیف است،

(ب) $T^{**}(X^{**}) \subset Y$ (Y به عنوان زیرفضایی از Y^{**} درنظر گرفته شده)،

(ج) T^* فشرده ضعیف است.

اثبات: قضیه ۵.۵ از [۵] صفحه ۱۸۹ را ملاحظه نمایید. □

تعریف ۱—۱.۲۰: فرض کنیم M یک زیرفضای بسته از یک فضای برداری نرمدار X باشد. اگر زیرفضای بسته N از X موجود باشد به طوری که

$$X = M + N \quad , \quad M \cap N = \{\circ\}$$

آن‌گاه، X را **حاصل‌جمع مستقیم**[۲۴] M و N نامند و با $X = M \oplus N$ نمایش می‌دهند.

۱—۲ آنالیز هارمونیک

تعریف ۱—۲.۱: فضای توپولوژیکی X را **موضعاً فشرده**[۲۵] گوییم هرگاه هر نقطه از آن دارای یک همسایگی باز با بستار فشرده باشد.

[۲۴] Direct sum

[۲۵] Locally compact