دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی گرایش آنالیز

بررسی قضیه نقطه ثابت برای جمع دو عملگر روی فضاهای باناخ

نگارش:
راضیه حسابی

استاد راهنما:
دکتر محمدجواد مهدی‌پور

اساتید مشاور:
دکتر صدیقه جاهدی
دکتر اسماعیل حسام‌الدینی

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

بررسی قضیه نقطه ثابت برای جمع دو عملگر روی فضاهای باناخ

نگارش:
راضیه حسابی

هدف اصلی این پایان‌نامه مطالعه جواب معادلات به فرم $Ax + Bx = x$ است. برای این منظور، ابتدا برخی ویژگی‌های اندازه غیرفشرده را بررسی می‌کنیم. سپس تعدادی از قضایای نقطه ثابت را برای جمع دو عملگر ارائه می‌کنیم که یکی از آن‌ها فشرده و دیگری $\omega-$ متراکم است. همچنین تعدادی از نتایج نقطه ثابت کراسنوسلسکی را برای مجموع دو نگاشت پیوسته ضعیف دنباله‌ای ثابت می‌کنیم. همچنین صورت‌های جدیدی از قضیه نقطه ثابت کراسنوسلسکی را برای نگاشت‌های تلف‌کننده بیان می‌کنیم. در پایان، مفهوم اندازه غیرفشرده تعمیم‌یافته مخروطی را بررسی کرده و برخی از قضایای نقطه ثابت را با استفاده از این مفهوم ثابت می‌کنیم.

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

فصل ۱

مفاهیم وتعاریف اولیه

در این فصل برخی از مفاهیم آنالیز ریاضی که در فصل‌های بعد مورد نیاز است را یادآوری می‌کنیم.

۱−۱ مفاهیم آنالیز تابعی

این بخش را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۱: فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. تابع $\rho : X \to [۰,\infty)$ را یک نیم‌نرم گوییم [۱۰] اگر به‌ازای هر $x,y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(الف) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

(ب) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$.

نیم‌نرم ρ را یک نرم گوییم اگر از $\rho(x) = ۰$ بتوان نتیجه گرفت $x = ۰$.

معمولا نرم را با نماد $\|.\|$ نشان می‌دهیم. زوج مرتب $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرم‌دار گوییم. فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ را باناخ گوییم اگر نسبت به متر $d(x,y) = \|x-y\|$ کامل باشد.

تعریف ۲.۱: فرض کنیم T یک عملگر خطی از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y باشد. T را کران‌دار گوییم [۱۰] هرگاه عدد $M > ۰$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in X$

$$\|Tx\| \leq M\|x\|.$$

تعریف ۳.۱: فضای برداری تمام تابعک‌های خطی کران‌دار روی فضای نرم‌دار X را دوگان X گوییم و با X^* نشان می‌دهیم [۱۰].

قضیه ۴.۱: فرض کنیم X یک فضای برداری و $\mathcal{P}$ یک خانواده از نیم‌نرم‌های تعریف شده روی X باشد. به‌ازای هر $x_\circ \in X$، $\rho \in \mathcal{P}$ و $\epsilon > ۰$ فرض کنیم

$$U(x_\circ, \rho, \epsilon) = \{x \in X : \rho(x - x_\circ) \leq \epsilon\}.$$

در این‌صورت $\{U(x_\circ, \rho, \epsilon) : x_\circ \in X, \rho \in \mathcal{P}, \epsilon > \circ\}$ تشکیل یک زیرپایه برای یک توپولوژی روی X می‌دهند.

اثبات: برای اثبات به [۱۰] مراجعه کنید. □

به توپولوژی قضیه فوق، توپولوژی تولید شده توسط خانواده نیم‌نرم‌های $\mathcal{P}$ گوییم.

تعریف ۵.۱: فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. توپولوژی تولید شده توسط خانواده نیم‌نرم‌های

$$\mathcal{P} = \{\rho_f : f \in X^*\},$$

که در آن $\rho_f(x) = |f(x)|$ را توپولوژی ضعیف روی X گوییم [۱۰] .

تعریف ۶.۱: فرض کنیم $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله در فضای نرم‌دار X باشد. گوییم $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به $x \in X$ همگرای ضعیف است و با نماد $x_n \rightharpoonup x$ نشان می‌دهیم اگر به‌ازای هر $f \in X^*$، دنباله $(fx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به $f(x)$ همگرا باشد [۱۰، ۱۸].

تعریف ۷.۱: فرض کنیم T یک عملگر خطی از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y باشد.

(الف) عملگر T را پیوسته ضعیف دنباله‌ای گوییم [۷] اگر به‌ازای هر دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در X که $x_n \rightharpoonup x \in X$ داشته باشیم $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$.

(ب) عملگر T را کاملاً پیوسته گوییم [۲۱] اگر به‌ازای هر دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در X که $x_n \rightharpoonup x \in X$ داشته باشیم $T(x_n) \to T(x)$.

قضیه ۸.۱: (ایبرلین_اسمولین) [۱] فرض کنیم M یک زیرمجموعه فشرده ضعیف از فضای باناخ X باشد. اگر $T : M \to M$ پیوسته ضعیف دنباله‌ای باشد، آن‌گاه T پیوسته ضعیف است.

اثبات: برای اثبات به [۱۰] مراجعه کنید. □

[۱] Eberlian-Smulian

قضیه ۹.۱: فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند. همچنین فرض کنیم $T : X \to Y$ یک نگاشت کاملاً پیوسته باشد. در این‌صورت T هر زیرمجموعه فشرده ضعیف نسبی در X را به یک زیرمجموعه فشرده نسبی در Y نقش کند.

اثبات: برای اثبات به [۱۰] مراجعه کنید. $\square$

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و $A \subseteq X$. اشتراک تمام زیرمجموعه‌های بسته و محدب از X که شامل A می‌باشند را با نماد $\overline{\mathbf{co}}(A)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱: (قضیه کرین_اسمولین) [۱] فرض کنیم A یک زیرمجموعه فشرده ضعیف از فضای باناخ X باشد. در این‌صورت $\overline{\mathbf{co}}(A)$ فشرده ضعیف است.

اثبات: برای اثبات به [۱۰] مراجعه کنید. $\square$

۱−۲ مفاهیم آنالیز محدب

در این بخش همواره فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۱۱.۱: فرض کنیم $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. در این‌صورت

(الف) نگاشت T را انقباضی گوییم اگر $k \in (۰, ۱]$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|.$$

اگر $k \in (۰, ۱)$ آن را انقباضی اکید گوییم [۱۸] .

(ب) نگاشت T را شبه انقباضی گوییم اگر به‌ازای هر $x, y \in X$ و $r > ۰$، نامعادله زیر برقرار باشد [۱۷].

$$\|x - y\| \leq \|(۱ + r)(x - y) - r(Tx - Ty)\|.$$

[۱] Krein-Smulian

(ج) نگاشت T را غیرانبساطی گوییم اگر $\|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|$ به ازای هر $x,y \in X$ [۱۷].

در لم بعد رابطه بین نگاشت‌های غیرانبساطی و شبه‌انقباضی را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱۲: فرض کنیم $T: X \to X$ یک نگاشت غیرانبساطی باشد. در این‌صورت T شبه‌انقباضی است.

اثبات: چون T غیرانبساطی است، به‌ازای هر $x,y \in X$ و $r > ۰$ داریم

$$\begin{aligned}\|(۱+r)(x-y)-r(Tx-Ty)\| &\geq (۱+r)\|x-y\|-r\|x-y\| \\ &\geq (۱+r)\|x-y\|-r\|x-y\| \\ &= \|x-y\|.\end{aligned}$$

بنابراین T شبه‌انقباضی است. $\square$

لم ۱.۱۳: فرض کنیم M یک زیرمجموعه ناتهی، بسته، کران‌دار و محدب از X و $T: M \to M$ یک نگاشت غیرانبساطی باشد. فرض کنیم عدد $r > ۰$ و تابع $\psi : [۰,\infty) \to [۰,\infty)$ موجود باشند به‌طوری که

(الف) ψ پیوسته یا نانزولی باشد.

(ب) $\psi(۰) = ۰$.

(ج) به‌ازای هر $r > ۰$، $\psi(r) > ۰$.

(د) $r\psi(\|Tx-Ty\|) \leq \|x-Tx-(y-Ty)\|$.

در این‌صورت T یک نقطه ثابت منحصربفرد در M دارد.

اثبات: برای اثبات به [۱۶] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۱.۱۴: فرض کنیم $\phi : [۰,\infty) \to [۰,\infty)$ یک تابع پیوسته و نانزولی باشد. نگاشت $T: X \to X$ را $\phi-$ انقباضی گوییم اگر شرایط زیر برقرار باشند [۱۸].

(الف) $\phi(\circ) = \circ$.

(ب) به‌ازای هر $r > \circ$، $\phi(r) < r$.

(ج) به‌ازای هر $x, y \in X$، نامعادله $\|Tx - Ty\| \leq \phi(\|x - y\|)$ برقرار باشد.

تعریف ۱۵.۱: فرض کنیم $\psi : [\circ, \infty) \to [\circ, \infty)$ یک تابع پیوسته یا نانزولی باشد. نگاشت $T : X \to X$ را $\psi-$ انبساطی گوییم اگر شرایط زیر برقرار باشند [۱۸].

(الف) $\psi(\circ) = \circ$.

(ب) به‌ازای هر $r > \circ$، $\psi(r) > \circ$.

(ج) به‌ازای هر $x, y \in X$، نامعادله $\|Tx - Ty\| \geq \psi(\|x - y\|)$ برقرار باشد.

لم ۱۶.۱: فرض کنیم $T : X \to X$ یک نگاشت $\phi-$ انقباضی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) نگاشت T غیرانبساطی است.

(۲) نگاشت $I - T$، $\psi-$ انبساطی است که در آن I نگاشت همانی روی X و به‌ازای هر $t \in [\circ, \infty)$، $\psi(t) = t - \phi(t)$.

اثبات: (۱) چون T یک نگاشت $\phi-$ انقباضی است، تابع پیوسته و نانزولی ϕ از $[\circ, \infty)$ به توی $[\circ, \infty)$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $x, y \in X$،

$$\|Tx - Ty\| \leq \phi(\|x - y\|).$$

بنابر تعریف ۱۴.۱ به‌ازای هر $r > \circ$، $\phi(r) < r$. پس

$$\|Tx - Ty\| \leq \phi(\|x - y\|) \leq \|x - y\|.$$

بنابراین T غیرانبساطی است.

(۲) به‌ازای هر $x,y \in X$، داریم

$$\begin{aligned}\|(I-T)x-(I-T)y\| &= \|(x-y)-(Tx-Ty)\| \\ &\geq \|x-y\|-\phi(\|x-y\|) \\ &= \psi(\|x-y\|).\end{aligned}$$

همچنین ϕ پیوسته و به‌ازای هر $t > ۰$، $\phi(t) < t$. پس ψ نیز پیوسته و $\psi(t) > ۰$. پس $I-T$، $\psi-$ انبساطی است. □

تعریف ۱۷.۱: نگاشت $T : X \to X$ را انقباضی مجزا گوییم اگر دو تابع $\phi, \psi : [۰,\infty) \to [۰,\infty)$ موجود باشند به‌طوری که شرایط زیر برقرار باشند.

(الف) ψ صعودی اکید باشد و $\psi(۰) = ۰$.

(ب) ϕ پیوسته باشد.

(ج) به‌ازای هر $x,y \in X$، $\|Tx-Ty\| \leq \phi(\|x-y\|)$.

(د) به‌ازای هر $r > ۰$، $\psi(r) \leq r - \phi(r)$.

لم ۱۸.۱: فرض کنیم $T : X \to X$ یک نگاشت انقباضی مجزا باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) نگاشت T، $\phi-$ انقباضی است.

(۲) نگاشت $I-T$، $\psi-$ انبساطی است. در این حالت ψ نانزولی است و می‌تواند یک تابع ناپیوسته باشد.

اثبات: (۱) چون T انقباضی مجزا است، تابع پیوسته $\phi : [۰,\infty) \to [۰,\infty)$ موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $x,y \in X$،

$$\|Tx-Ty\| \leq \phi(\|x-y\|).$$

به‌ازای هر $r > ۰$ داریم $\psi(r) \leq r - \phi(r)$ یا $\phi(r) \leq r - \psi(r)$. چون $\psi : [۰, \infty) \to [۰, \infty)$ صعودی اکید است، به‌ازای هر $r > ۰$، $\psi(r) > ۰$. بنابراین $۰ \leq \phi(r) < r$. پس اگر $r \to ۰$، آن‌گاه $\psi(r) \to ۰$. از طرفی چون ϕ پیوسته است، اگر $r \to ۰$، آن‌گاه $\psi(r) \to \phi(۰)$. حال بنابر یکتایی حد داریم $\phi(۰) = ۰$. پس T یک نگاشت $\phi-$ انقباضی است.

(۲) بنا بر تعریف نگاشت انقباضی مجزا و لم ۱۶.۱ حکم برقرار است. □

تعریف ۱۹.۱: فرض کنیم $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. در این‌صورت

(الف) نگاشت T را افزاینده گوییم اگر به‌ازای هر $\lambda \geq ۰$ و $x, y \in X$، نامعادله

$$\|x - y\| \leq \|(x - y) + \lambda(Tx - Ty)\|$$

برقرار باشد. نگاشت افزاینده T را $m-$ افزاینده گوییم اگر نگاشت $\lambda I + T$ پوشا باشد [۱۵].

(ب) نگاشت T را تلف‌کننده گوییم اگر به‌ازای هر $\lambda \geq ۰$ و $x, y \in X$، نامعادله

$$\|x - y\| \geq \|(x - y) + \lambda(Tx - Ty)\|$$

برقرار باشد. نگاشت تلف‌کننده T را $m-$ تلف‌کننده گوییم اگر نگاشت $\lambda I - T$ پوشا باشد.

قضیه ۲۰.۱: فرض کنیم $T : X \to X$ یک نگاشت پیوسته و افزاینده باشد. در این‌صورت $I - T$ یک نگاشت $m-$ افزاینده است.

اثبات: برای اثبات به [۵] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۱.۱: فرض کنیم $D \subseteq X$ و $T : D \to ۲^X$ یک نگاشت $m-$ افزاینده و $\psi-$ انبساطی باشد. در این‌صورت T پوشا است.

اثبات: برای اثبات به [۱۶] مراجعه کنید. □

لم ۲۲.۱: نگاشت $T : X \to X$ شبه‌انقباضی است اگروتنها اگر $I - T$ افزاینده باشد.

اثبات: فرض کنیم T یک نگاشت شبه‌انقباضی باشد. پس به‌ازای هر $x,y \in X$ و $\lambda > ۰$ داریم

$$\|x-y\| \leq \|(۱+\lambda)(x-y) - \lambda(Tx-Ty)\|.$$

بنابراین

$$\|x-y\| \leq \|(x-y) + \lambda((I-T)x - (I-T)y)\|.$$

در نتیجه $I-T$ افزاینده است. اثبات عکس مطلب به‌وضوح برقرار است. □

قضیه ۲۳.۱: فرض کنیم $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. در این‌صورت افزاینده است اگروتنها اگر به‌ازای هر $x,y \in X$ نامعادله

$$\langle Tx-Ty, x-y\rangle_s \geq ۰$$

برقرار است، که در آن نگاشت $\langle .,. \rangle_s : X \times X \to [۰,\infty)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\langle y,x\rangle_s = \max\{f(y) | f \in J(x)\}$$

و $J : X \to ۲^{X^*}$ نگاشت دوگان روی X است؛ یعنی،

$$J(x) = \{f \in X^* | f(x) = \|x\|^۲, \|f\| = \|x\|\}.$$

اثبات: برای اثبات به [۱۵] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۴.۱: فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این‌صورت به‌ازای هر $x,y \in X$ داریم

$$|\langle x,y\rangle_s| \leq \|x\|\|y\|.$$

اثبات: برای اثبات به [۱۵] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۵.۱: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از فضای باناخ X و عملگر $T : D \to X$ افزاینده

باشد. در این‌صورت T در شرط برد صدق می‌کند هرگاه

$$\overline{D} \subseteq R_{I+\lambda T}$$

به‌ازای هر $x \in D$ و $\lambda > 0$ [۱۵].

قضیه ۲۶.۱: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از فضای باناخ X و $T : D \to X$ یک عملگر افزاینده باشد که در شرط برد صدق می‌کند. همچنین فرض کنیم نگاشت‌های $J_\lambda^T : X \to D$ با ضابطه

$$J_\lambda^T = (I + \lambda T)^{-1}$$

و $T_\lambda : X \to X$ با ضابطه

$$T_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda^T)$$

تعریف شده باشند. در این‌صورت

$$T_\lambda x \in T(J_\lambda^T x)$$

به‌ازای هر $x \in D$ و $\lambda > 0$.

اثبات: برای اثبات به [۱۵] مراجعه کنید. $\square$

نگاشت‌های J_λ^T و T_λ در قضیه ۲۶.۱ را به‌ترتیب حلال T و تقریب یوسیدای [۱] T گوییم.

تعریف ۲۷.۱: فرض کنیم X فضای باناخ و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. گوییم T در شرط لیرای–شاودر [۲] صدق می‌کند اگر $R > 0$ موجود باشد به‌طوری که $Tx \neq \lambda x$ به‌ازای هر $x \in X$ که $\|x\| = R$ و هر $\lambda > 1$.

گزاره ۲۸.۱: فرض کنیم X فضای باناخ و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد. در این‌صورت T در شرط لیرای–شاودر صدق می‌کند اگر و تنها اگر $R > 0$ موجود باشد به‌طوری که $\|Tx\| \leq R$

[۱] Yosida

[۲] Leray-Schauder condition

به‌ازای هر $x \in X$ که $\|x\| = R$.

اثبات: فرض کنیم T در شرط لیرای–شاودر صدق می‌کند. همچنین فرض کنیم $\|Tx\| > R$. در این صورت

$$\|Tx\| \neq \|\lambda x\| = \lambda\|x\| = \lambda R > R$$

که تناقض است. برعکس فرض کنیم $\|Tx\| \leq R$ و $Tx \neq \lambda x$. در این‌صورت

$$\|Tx\| = \|\lambda x\| = \lambda R > R$$

که تناقض است. پس T در شرط لیرای–شاودر صدق می‌کند. $\square$

فصل ۲

اندازه‌های غیرفشرده تعمیم‌یافته در فضاهای باناخ

۱-۲ مقدمه

در این پایان‌نامه همواره فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ، B_r گوی به مرکز x_0 و شعاع $r > 0$، $\mathcal{B}(X)$ مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های کراندار X و $\mathcal{W}(X)$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{B}(X)$ شامل تمام زیرمجموعه‌های فشرده ضعیف X باشد.

کوراتوسکی [1] [۲۲] اولین بار مفهوم اندازه غیرفشرده را به‌عنوان نگاشت $\alpha : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ با ضابطه

$$\alpha(B) = \inf\{\delta > 0 : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \mathbf{diam}(A_i) < \delta\}.$$

تعریف کرد. این اندازه نقش بسیار مهمی در آنالیز تابعی و نظریه معادلات دیفرانسیل و انتگرال ایفا می‌کند [۱۹، ۲۰]. افراد زیادی تلاش کردند این مفهوم را توسیع بدهند [۱، ۳، ۴، ۱۳]. به‌عنوان مثال، در [۱، ۴]، مفهوم اندازه غیرفشرده توسیع پیدا کرد و ارتباط این مفهوم با نظریه نقطه ثابت، عملگرهای متراکم و خواص هندسی فضاهای باناخ بررسی شد.

در این فصل، توسیع دیگری از مفهوم اندازه غیرفشرده ارائه می‌کنیم و به بررسی برخی از خواص این اندازه می‌پردازیم. در بخش دوم، مفهوم اندازه غیرفشرده تعمیم‌یافته را معرفی و به مطالعه آن می‌پردازیم. به‌عنوان مثالی از اندازه غیرفشرده تعمیم‌یافته، اندازه هاوسدورف را معرفی می‌کنیم. سپس به ارتباط بین این اندازه با یک اندازه غیرفشرده تعمیم‌یافته دلخواه می‌پردازیم. در بخش سوم، برخی از مفاهیم مربوط به حدود تعمیم‌یافته را یادآوری می‌کنیم. در بخش چهارم اندازه غیرفشرده تعمیم‌یافته فیلیپس [2] را معرفی و به ارتباط این اندازه با سایر اندازه‌های غیرفشرده تعمیم‌یافته می‌پردازیم.

---

[1] Kuratowski

[2] Phillips

۲-۲ اندازه هاوسدورف

این بخش را با تعریف اندازه غیرفشرده(تعمیم‌یافته) آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۲: فرض کنیم X یک فضای باناخ متناهی‌البعد باشد. نگاشت $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ را اندازه غیرفشرده(تعمیم‌یافته) روی یک فضای باناخ گوییم اگر گزاره‌های زیر برقرار باشند.

(الف) به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}(X)$ داشته باشیم، $\mu(\overline{B}) = \mu(B)$.

(ب) به‌ازای هر $x \in X$ و $B \in \mathcal{B}(X)$، $\mu(x+B) = \mu(B)$.

(ج) به‌ازای هر $\alpha > 0$ و $B \in \mathcal{B}(X)$، $\mu(\alpha B) = \alpha\mu(B)$.

(د) به‌ازای هر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X)$، $\mu(B_1 + B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2)$.

(و) به‌ازای هر $B_k \in \mathcal{B}(X)$ و $1 \leq k \leq n$، ثابت C_μ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\max \mu(B_k) \leq \mu(\cup_{1\leq k\leq n} B_k) \leq C_\mu \max_{1\leq k\leq n} \mu(B_k).$$

برای راحتی کار، از این به بعد به‌جای اندازه غیرفشرده تعمیم‌یافته از اصطلاح اندازه غیرفشرده استفاده می‌کنیم.

لم ۲.۲: فرض کنیم μ یک اندازه غیرفشرده روی X باشد. در این‌صورت

$$\mu(B_1) \leq \mu(B_2)$$

به‌ازای هر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X)$ که $B_1 \subseteq B_2$.

اثبات: فرض کنیم $\mu(B_1) > \mu(B_2)$. در این‌صورت $\mu(B_1) = \mathbf{max}\{\mu(B_1), \mu(B_2)\}$. بنابر خاصیت (و) از تعریف ۱.۲ داریم

$$\mu(B_1) = \mathbf{max}\{\mu(B_1), \mu(B_2)\} \leq \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_2),$$

که تناقض است. پس حکم برقرار است. $\square$

تعریف ۳.۲: فرض کنیم U_X گوی واحد بسته در فضای باناخ X باشد. اندازه هاوسدورف روی X را با نماد χ نشان می‌دهیم و به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}(X)$ به‌صورت

$$\chi(B) = \inf\{\epsilon > \circ : \exists F \subseteq X, \text{متناهی} F, B \subseteq F + \epsilon U_X\}$$

تعریف می‌کنیم.

در لم بعد رابطه بین اندازه هاوسدورف و یک اندازه غیرفشرده دلخواه را بیان می‌کنیم.

لم ۴.۲: فرض کنیم μ یک اندازه غیرفشرده روی فضای باناخ متناهی‌البعد X باشد. در این‌صورت به‌ازای هر $B \in \mathcal{B}(X)$ داریم

$$\mu(B) \leq C_\mu \mu(U_X)\chi(B),$$

که در آن C_μ همان ثابت بیان‌شده در قسمت (و) از تعریف ۱.۲ است.

اثبات: فرض کنیم $B \in \mathcal{B}(X)$. به‌ازای هر $\epsilon > \circ$ قرار می‌دهیم $r_\epsilon = \chi(B) + \epsilon$. چون B کراندار است، تعداد متناهی از گوی‌های $x_k + r_\epsilon U_X$، $k = ۱, ۲, ..., n$، وجود دارند به‌طوری که B را می‌پوشانند. پس $B \subseteq \cup_{۱\leq k\leq n}(x_k + r_\epsilon U_X)$. طبق خواص اندازه غیرفشرده μ داریم

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\leq \mu(\cup_{۱\leq k\leq n}(x_k + r_\epsilon U_X)) \\
&\leq C_\mu \max_{۱\leq k\leq n} \mu(x_k + r_\epsilon U_X) \\
&= C_\mu r_\epsilon \mu(U_X) = C_\mu(\chi(B) + \epsilon)\mu(U_X),
\end{aligned}$$

که در آن C_μ همان ثابت بیان‌شده در قسمت (و) از تعریف ۱.۲ است. چون ϵ دلخواه است، داریم

$$\mu(B) \leq C_\mu \chi(B)\mu(U_X).$$