بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض(هندسه)

موضوع :

بعد فراکتالی برای فراکتال های خود- آفین و زیرمجموعه های پایا در منیفلد ها

نگارنده :

امید رضائی

استاد راهنما :

دکتر رضا میرزائی

استاد مشاور :

دکتر عبدالرحمن رازانی

آذر – ۱۳۸۷

دانشگاه بین المللی امام خمینی

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان نامه ی **آقای امید رضایی** دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، در تاریخ ۱۳۸۷/۹/۱۸ تحت **عنوان بعد فراکتالی برای فراکتال های خود آفین و زیر مجموعه های پایا در منیفلدها**، در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تایید نهایی هیات محترم داوران به شرح ذیل قرارگرفت:

۱- استاد راهنما : **آقای دکتر رضا میرزایی**

۲- استاد مشاور : **آقای دکتر عبدالرحمن رازانی**

۳- داورخارجی : **آقای دکتر شفاف**

۴- داور داخلی : **آقای دکتر علی آبکار**

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : **آقای دکتر شیرویه پیروی**

۱۳۸۸/۱/۲۱

اداره تحصیلات تکمیلی حوزه آموزشی دانشگاه بین المللی امام خمینی

چکیده :

در این پایان نامه، بعد هاسدورف و مکعبی بعضی از فراکتال ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یک فرمول دقیق برای محاسبه‌ی بعد هاسدورف و مکعبی بعضی از مجموعه‌های خود-آفین در صفحه ارائه می‌دهیم. در ادامه فرض می‌کنیم $f : M \to M$ یک C^1- دیفئومورفیسم روی منیفلد ریمانی کامل M بوده و M دارای انحنای ریچی نامنفی است. در این صورت یک کران بالا برای بعدمکعبی(و هاسدورف)مجموعه‌های f-پایا به دست می‌آوریم.

تقدیر و تشکر

شکر وسپاس فراوان، به عدد ستاره‌ی آسمان، و قطره‌ی باران، و ریگ بیابان، و ذره‌های زمین و آسمان، آن خدای را که یگانگی صفت او، و جلال، وعظمت، و مجد و بها خاصیت اوست و ازکمال وی هیچ آفریده آگاه نیست، و جز وی هیچ کس را به حقیقت معرفت وی راه نیست.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات بزرگ مردی که همیشه در نظرم کوهی از ایثار و استقامت است، پدرعزیزم، و از زحمات اسوه‌ی فداکاری، مادرعزیزم قدردانی نمایم.

همچنین از استاد نخبه جناب آقای دکتر رضا میرزائی، بزرگ مردی که در سرتاسر این پایان نامه با صبوری ،سعه‌ی صدر، ونبوغ خود مرا یاری دادند، کمال تشکر را دارم. گرچه هیچ گاه به خود جرأت نمی دهم که بگویم من متعلم خوبی بودم که توانسته از دریای بی کران علمش بهره‌ای وافر برده باشد، ولی درک محضر ایشان را همواره یکی از ذخائر گرانبهای عمر خودم که حاضر نیستم با هیچ چیز معاوضه کنم می‌شمارم. از استاد ارجمند جناب آقای دکتر عبدالرحمن رازانی که مشاوره‌ی این پایان نامه را قبول فرمودند وهمچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکترعلی آبکار که در پاره‌ای مواقع مزاحم ایشان شدم کمال تشکر را دارم.

از داور گرامی جناب آقای دکتر شفاف و ناظر محترم آقای دکترعزیزی و اساتید محترم گروه ریاضی دانشکده‌ی علوم پایه کمال تشکر را دارم.

فهرست

عنوان **صفحه**

عنوان	صفحه
چکیده فارسی	۱
مقدمه	۲
فصل اول: تعاریف و قضایای مقدماتی	۳
۱ـ۱ آنالیز و جبرخطی	۴
۱ـ۲منیفلد	۹
۱ـ۳منیفلد های ریمانی	۲۰
فصل دوم: فراکتال	۳۰
۲ـ۱ تاریخچه	۳۱
۲ـ۲ بعد توپولوژیکی و بعد هاسدورف	۳۴
۲ـ۳ بعد مکعبی	۴۱
۲ـ۴ بعد فراکتالی از فراکتال هائی با تصویر مجزا در $\mathbb{R}^2$	۴۴
فصل سوم: تخمین بعد مکعبی مجموعه پایا در فضای اقلیدسی	۴۷
فصل چهارم: تخمین بعد مکعبی مجموعه پایا در منیفلد های ریمانی کامل	۵۸
منابع	۷۴
واژه نامه	۷۵
چکیده انگلیسی	۷۷

مقدمه :

دراین پایان‌نامه، بررسی ارتباط بین بعدمکعبی و بعدهاسدورف F که زیر مجموعه‌ای از R^2 است و همچنین ارائه‌ی کران بالا برای بعد مکعبی کلاس خاصی از مجموعه‌ها، مطالعه شده است.

در فصل اول تعاریف، قضایا ولم‌هایی که در فصل سوم و چهارم استفاده می‌شوند را آورده‌ایم. در این فصل از اثبات قضایا ولم‌هایی که به طور مستقیم با پایان‌نامه ارتباط ندارند، خود داری کرده‌ایم. اثبات این لم‌ها و قضایا در مراجع، که اغلب کتبی رایج‌اند، دیده می‌شوند.

فصل دوم به معرفی فراکتال پرداخته و از چهار بخش تشکیل شده است. در بخش اول تاریخچه و تعریفی از فراکتال را آورده‌ایم و همچنین بحثی در مورد مشکلاتی که این تعریف با آن مواجه است، آورده شده است. در بخش دوم بعد هاسدورف و بعد توپولوژیکی معرفی شده و نشان داده‌ایم مجموعه ی کانتور یک فراکتال است. در بخش سوم بعد مکعبی را معرفی کرده و چند تعریف معادل با آن ارائه شده که در بعضی مواقع از نظر محاسباتی بسیار مفید تر از تعریف اولیه‌ی بعد مکعبی می‌باشند. در بخش چهارم ارتباط بین بعد هاسدورف و بعد مکعبی فراکتال $F \subset R^2$، با بعد تصویر آن روی محورها بررسی شده است.

در فصل سوم یک کران بالا برای بعد مکعبی فراکتال‌هایی که تحت یک نگاشت هموار روی R^n، پایا هستند پیدا شده است. سپس با استفاده از قضیه‌ی بیشاپ و تکنیک هایی از جبر خطی نتایج بدست آمده در فصل سوم را به منیفلد های ریمانی با انحنای ریچی نامنفی تعمیم خواهیم داد.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل مفاهیم، تعاریف، لم‌ها و قضایایی که در فصول آتی به آنها نیازمندیم، بیان می‌کنیم. البته بعضی مفاهیم مقدماتی از جبر خطی و آنالیز ریاضی، نظیر فضای برداری و فضای دوگان یا فشردگی در [12],[5],[9] آمده‌اند و در این فصل به آنها اشاره‌ای نشده است.

بخش اول

۱-۱-۱. تعریف : نگاشت T از فضای برداری X به توی فضای برداری Y را یک تبدیل خطی نامند هرگاه برای هر $x, x_1, x_2 \in X$ و هر اسکالر c :

$$T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2 \quad , \quad T(cx)=cTx$$

(توجه کنید که منظور ما از Tx همان $T(x)$ است).

تبدیلات خطی از X به توی X را اغلب عملگرهای خطی بر X می‌نامند. فرض کنیم T یک عملگر خطی یک به یک و پوشا روی X است، در این صورت می‌گوئیم T معکوس پذیر است. در این حالت می‌توان عملگر T^{-1} را بر X، با این صورت که برای هر $x \in X$ ، $T^{-1}(Tx)=x$ تعریف کرد. به سادگی می‌توان نشان داد که T^{-1} نیز تبدیل خطی است. فرض کنیم $L(X,Y)$ مجموعه تمام تبدیلات خطی از فضای برداری X به توی فضای برداری Y باشد (به جای $L(X,Y)$ فقط می‌نویسیم $L(X)$).

اگر X، Y، Z فضاهای برداری باشند و $T_1 \in L(X,Y)$ و $T_2 \in L(Y,Z)$، T_2T_1 (ترکیب T_2 و T_1) به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(T_2T_1)x = T_2(T_1x) \qquad (x \in X)$$

در این صورت : $T_2T_1 \in L(X,Z)$.

۱-۱-۲. تعریف(نورم) : برای هر ماتریس A، نورم Aرا با علامت $\|A\|$ نمایش داده، و بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\|A\|=\sup\left\{ |Ax| : x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \le 1\right\}$$

۱-۱-۳. قضیه : اگر $T_1 \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ و $T_2 \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k)$، آنگاه

$$\|T_2T_1\| \le \|T_2\| \, \|T_1\|$$

ابتدا خاصیتی را در مورد نورم یک ماتریس بیان می‌کنیم که به کمک آن نامساوی هادمارد را

می‌توان اثبات نمود. این نامساوی در این پایان‌نامه، در دو قسمت استفاده می‌شود.

۱-۱-۴. قضیه : فرض کنیم A یک ماتریس باشد، در این صورت :

$$\|A\|^2 \geq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

۱-۱-۵. لم([9]) : اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد و آن را به فرم $A=[A_1A_2]$ بنویسیم، چنان که A_1 و A_2 به ترتیب ماتریس‌های $n\times k$ و $n\times(n-k)$ باشند، داریم :

$$|\det A|^2 \leq (\det A_1^* A_1)\times(\det A_2^* A_2)$$

که در آن منظور از A^* ماتریس الحاقی A است.

۱-۱-۶. قضیه : (نامساوی هادمارد[1])

$$|\det A|^2 \leq \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)$$

برهان)

کافیست در لم بالا، A_1 را اولین ستون در نظر بگیریم.

۱-۱-۷. نتیجه :

$$|\det A| \leq \|A\|^n$$

ماتریسی را که عناصر روی قطر اصلی آن حقیقی و درایه‌های آن نسبت به قطر اصلی مزدوج باشند ماتریس هرمیتی می‌نامند. در میدان حقیقی ماتریس‌های متقارن و هرمیتی یکسان هستند.
یک ماتریس هرمیتی H بر روی میدان $\mathbb{F}$ را نیمه معین مثبت خوانیم اگر و فقط اگر برای هر $x\in\mathbb{F}^n$ ، $\langle H(x),x\rangle \geq 0$ باشد(منظور از $\langle,\rangle$ ضرب داخلی روی $\mathbb{F}^n$ است) [9].
اگر A یک ماتریس دلخواه باشد در این صورت AA^T و A^TA نیمه معین مثبت می‌باشند.

۱-۱-۸. قضیه : اگر A یک ماتریس نیمه معین مثبت باشد داریم :

$$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

برهان)

[1] Hadamard's inequality

اگر A ماتریسی وارون پذیر نباشد بوضوح تساوی برقرار است (زیرا برای ماتریس نیمه معین مثبت همواره $a_{ii} \geq 0$ است). اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد، در این صورت A ماتریسی معین مثبت است. قرار می‌دهیم :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

که در آن $d_{ii} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$ است و B را بصورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$B = DAD$$

B ماتریسی معین مثبت است، زیرا :

$$B^T = (DAD)^T = D^T A^T D^T = DAD = B$$

ونیز برای هر $0 \neq x \in \mathbb{F}^n$ داریم :

$$x^T Bx = x^T DADx = (D^T x)^T A(Dx) =$$
$$= (Dx)^T A(Dx) = y^T Ay \geq 0$$

اگر مقادیر ویژه‌ی Bرا با λ_B^i نمایش دهیم، داریم :

$$b_{ii} = d_{ii} a_{ii} d_{ii} = 1 \Rightarrow Tr(B) = n$$

$$\det(B) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_B^i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_B^i \right)^n = (\frac{1}{n} Tr(B))^n = 1$$

در نتیجه :

$$\det B = (\det D)^2 \det A = (\prod_{i=1}^{n} a_{ii})^{-1} \det A$$

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

۱-۱-۹. تعریف : فرض کنیم E مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^n$ بوده و f مجموعه E را به توی $\mathbb{R}^m$ بنگارد و $x \in E$ باشد. هرگاه تبدیلی خطی از $\mathbb{R}^n$ به توی $\mathbb{R}^m$ باشد به طوری که :

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Th|}{|h|} = 0$$

آنگاه می‌گوئیم f در x مشتق پذیر است و می‌نویسیم :

$$f'(x) = T$$

چنانچه f در هر $x \in E$ مشتق پذیر باشد، می‌گوئیم f بر E مشتق پذیر است.

۱-۱- ۱۰. قضیه([12]) : فرض کنیم E مجموعه بازی در $\mathbb{R}^n$ است و f مجموعه Eرا به تـوی $\mathbb{R}^m$ می‌نگارد و در $x_0 \in E$ مشتق‌پذیراست. فرض کنیم g مجموعه‌ی بازی شامل $f(E)$ را بـه تـوی $\mathbb{R}^k$ می‌نگارد و در $f(x_0)$ مشتق‌پذیر است. در این صورت، نگاشـت $\mathbb{F}$ از E بـه تـوی $\mathbb{R}^k$ کـه بـه صورت :

$$\mathbb{F}(x) = g(f(x))$$

تعریف شده در x_0 مشتق‌پذیر است و داریم :

$$\mathbb{F}'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0) \qquad (۱)$$

طرف راست (۱) حاصل ضرب دو تبدیل خطی می‌باشد.

مجدداً به تابع f که مجموعـه بـاز $E \subset \mathbb{R}^n$را بـه تـوی $\mathbb{R}^m$ مـی‌نگـارد توجـه مـی‌کنـیم. فـرض کنیم $\{e_1,\dots,e_n\}$ و $\{u_1,\dots,u_n\}$ پایه‌های متعارف $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ باشند. مؤلفه‌هـای f توابـع حقیقـی $f_1,\dots,f_m$ اند که به صورت :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\, u_i \qquad (x \in E)$$

یا معادلا" به صورت $f_i(x) = f(x)\cdot u_i$ ، $1 \le i \le m$، تعریف می‌شوند.

برای هر $x \in E$ ، $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$، قرار می‌دهیم :

$$(D_j f_i)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x + te_j) - f(x)}{t}$$

مشروط براینکه حد وجود داشته باشد. $D_j f_i$ مشتق f_i نسبت به x_j(با ثابت ماندن سایر متغیرها) می‌باشد. لذا نماد $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ اغلب به جای $D_j f_i$ به کار می رود و آنرا مشتق جزئی می‌نامند.

توجه کنیم که اگر f در x مشتق‌پذیر باشد، مشتقات جزئی f در x نیـز وجـود دارنـد و تبـدیل خطی $f'(x)$ را کاملاً مشخص می‌کنند[12].

فرض کنیم f مجموعه باز $E \subset \mathbb{R}^n$ را به توی $\mathbb{R}^m$ بنگارد و f در نقطه $x \in E$ مـشتق پـذیر باشد. در این صورت، مشتقات جزئی $(D_j f_i)(x)$ وجود دارند و داریم :

$$(D_j f_i)(x) u_i \qquad (۲)$$

حال به نتایجی که از این قضیه می‌توان گرفت می‌پردازیم.

فرض کنیم $[f'(x)]$ ماتریسی باشد که $f'(x)$ را نسبت به پایه‌های متعارف بالا نمایش می‌دهـد، در این صورت، $f'(x)e_i$ بردار سـتونی jام $[f'(x)]$ اسـت، و لـذا (۲) نـشان مـی‌دهـد کـه عـدد $(D_j f_i)(x)$ محل تلاقی سطر i ام و ستون j ام $[f'(x)]$ است، بنابراین داریم :

$$\left[f'(x)\right]=\begin{bmatrix}(D_1 f_1)(x) & \dots & (D_n f_1)(x)\\ \vdots & & \\ (D_1 f_n)(x) & \dots & (D_n f_n)(x)\end{bmatrix}$$

ماتریس فوق را ماتریس ژاکوبی، و دترمینان آنرا ژاکوبین نامیده و با J نمایش می‌دهند.

۱-۱-۱۱. تعریف ([12]) : نگاشت مشتق پذیر f از مجموعه باز $E\subset\mathbb{R}^n$ به توی $\mathbb{R}^m$ را بـه طـور پیوسته مشتق‌پذیر بر E گویند، هرگاه f' یک نگاشت پیوسته از E به توی $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ باشد. بـه بیـان دیگـر، بـه هـر $x\in E$ و هـر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ ی چنـان نظیـر شـود کـه اگـر $y\in E$ و $|x-y|<\delta$ باشد، آنگاه داشته باشیم :

$$\|f'(y)-f'(x)\|<\varepsilon$$

اگر چنین باشد، می‌گوئیم f یک C^1- نگاشت است و می‌نویسیم $f\in C^1(E)$.

۱-۱-۱۲. قضیه([12]) : فرض کنیم f مجموعـه‌ی بـاز $E\subset\mathbb{R}^n$ را بـه تـوی $\mathbb{R}^m$ بنگـارد، در ایـن صـورت $f\in C^1(E)$ اسـت اگـر و فقـط اگـر مـشتقات جزئـی $D_j f_i$، بـرای هـر $1\le i\le m$، $1\le j\le n$ ، در E وجود داشته و پیوسته باشند.

در زیر به بیان قضیه مقدار میانگین برای توابع مشتق‌پذیر می‌پردازیم. البته در بیان این قضیه، منظور از نماد $R(x,y)$ پاره خطی است که دو نقطه x,y در $\mathbb{R}^n$ را به هم وصل می‌کند :

$$R(x,y)=\{tx+(1-t)y:0\le t\le 1\}$$

۱-۱-۱۳. قـضیه مقـدار میـانگین([۱۵]): فـرض کنـیم S یـک زیـر مجموعـه بـاز $\mathbb{R}^n$ باشـد و $f:S\to\mathbb{R}^m$ در هر نقطه‌ی S مشتق‌پذیر باشد. همچنـین x، y دو نقطـه در S باشـند. در ایـن صورت، برای هر بردار a در $\mathbb{R}^m$، نقطه‌ای مانند z در $R(x,y)$ وجود دارد به قسمی که :

$$a\cdot\{f(y)-f(x)\}=a\cdot\{f'(z)(y-x)\}$$

بخش دوم

منیفلد

در این بخش به یادآوری مفهوم منیفلد و تعریف‌ها و قضایائی می‌پردازیم که در فصل چهارم، از آنها بطور مستقیم یا غیر مستقیم استفاده خواهیم کرد.

۱-۲-۱. تعریف : فرض کنید M یک مجموعه ناتهی، O زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ و $U \subseteq M$ باشد. نگاشت دوسوئی $x : U \subset M \to x(U) = O \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک کارت nـ بعدی، U را حوزه کارت و زوج (U, x) را یک کارت موضعی می‌نامیم.

۱-۲-۲. تعریف : فرض کنید (V, y) و (U, x) دو کارت موضعی nـ بعدی روی M باشند، گوئیم این دو کارت C^k– مرتبط هستند اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد :

الف ـ $U \cap V = \varnothing$.

ب ـ $U \cap V \neq \varnothing$، آنگاه نگاشت زیر و معکوس آن از کلاس C^k، بین دو زیر مجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^n$ باشند :

$$y o x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

۱-۲-۳. تعریف : گردایه $\{(U_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ازکارت‌های موضعی را اطلس C^k نامیم هرگاه :

الف) U_α ها M را بپوشانند.

ب)هر دوکارت موضعی با هم C^k-مرتبط باشد.

۱-۲-۴. تعریف : یک اطلس C^k از Mرا ماکزیمال گوئیم اگر زیرمجموعه یک اطلس C^kدیگری نباشد.

۱-۲-۵. قضیه([۱۴]) : فرض کنیم A یک اطلس C^k باشد، در این صورت فقط یک اطلس C^k و ماکزیمال شامل A وجود دارد.

۱-۲-۶. تعریف : مجموعه M همراه با یک اطلس C^k و ماکزیمال n- بعدی را یک منیفلد دیفرانسیل پذیر nـ بعدی از کلاس C^k می‌نامند.

۱-۲-۷. تعریف : فرض کنیم Nو M دو منیفلد از کلاس C^k باشند. نگاشت $\mathbb{F}:M \to N$، را در نقطه $p \in M$ دیفرانسیل پذیر از کلاس $C^r(r \leq k)$ گوئیم، اگر یک کارت موضعی (U,x) در اطلس ماکزیمال M شامل نقطه‌ی p و یک کارت موضعی (V,y) شامل نقطه‌ی $\mathbb{F}(p)$ در اطلس ماکزیمال N موجود باشد، به طوری که نگاشت زیر در نقطه‌ی $x(p)$ از کلاس C^r باشد :

$$yo\mathbb{F}ox^{-1} : x(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to y(V) \subset \mathbb{R}^n$$

اگر $\mathbb{F}$ در تمام نقاط M دیفرانسیل پذیر باشد، گوئیم $\mathbb{F}$ روی M دیفرانسیل پذیر است.

برای تعمیم مفهوم بردار مماس بر روی منیفلد، ابتدا تعریف بردار مماس بر روی $\mathbb{R}^n$ را یادآوری می‌کنیم. در $\mathbb{R}^n$ یک بردار مماس در نقطه‌ی p، عبارت است از زوج مرتب (p,v) به طوری که p نقطه ابتدا و v قسمت برداری آن باشد. اما این تعریف، برای منیفلدها قابل استفاده نیست، به همین جهت مفهوم معادلی را که بر روی منیفلدها قابل بیان است، ارائه می‌دهیم.

بنا به نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل، برای هر نقطه $(p,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$، منحنی $c : I \to c(I) \subset \mathbb{R}^n$، وجود دارد به طوری که :

$$c(t_0) = p$$
$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t_0} = v$$

برای هر (p,v)، ممکن است بیش از یک منحنی c با شرط فوق وجود داشته باشد، بنابراین یک رابطه‌ی هم ارزی بصورت زیر بر روی این منحنی‌ها تعریف می‌کنیم :

$$c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1(t_0) = c_2(t_0) \\ \dfrac{dc_1}{dt}(t_0) = \dfrac{dc_2}{dt}(t_0) \end{cases}$$

با توجه به رابطه‌ی هم‌ارزی اخیر، یک تناظر یک به یک میان بردارهای مماس بر $\mathbb{R}^n$ و مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی از منحنی‌ها به وجود می‌آید. حال این ایده قابل تعمیم بر روی منیفلدها است.

۱-۲-۸. تعریف : فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و $C : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ یک

منحنی از کلاس C^1 روی M باشد، فرض کنیم (U,x) یک کارت موضعی در همسایگی نقطه‌ی $p=C(0)$ باشد، رابطه هم‌ارزی زیر را در نظر می‌گیریم :

$$c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1(0)=c_2(0)=p \\ \dfrac{d(xoc_1)}{dt}(0)=\dfrac{d(xoc_2)}{dt}(0) \end{cases}$$

$[c]_p$ کلاس هم‌ارزی تعریف شده توسط منحنی c را بردار مماس بر M در نقطه‌ی p نامیده و آنرا با علامت V_p نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌ی تمام کلاس های هم‌ارزی (بردارهای مماس) در p را با علامت T_pM نمایش می‌دهیم و یک فضای برداری است.

با نگاه دیگری می‌توانیم یک پایه برای T_pM ارائه دهیم.

فرض کنید $f: M \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد، در این صورت مشتق جهت دار تابع f، در جهت بردار V_p را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$V_p[f]=\frac{d(foc)}{dt}(0)$$

که در آن c یک منحنی در کلاس $[C]_p$ و متناظر با V_p است.

V_p یک نگاشت مشتق گیری می‌باشد. اگر مجموعه‌ی تمام نگاشت های مشتق گیری در نقطه‌ی p بر روی M را با $D_p(M)$ نمایش دهیم، آنگاه :

۱-۲-۹. قضیه([۱۴]) : $D_p(M)$ یک فضای برداری با بعد n است و اگر (U,x) یک کارت موضعی در همسایگی p باشد، آنگاه n- تائی $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}(p),\dots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ که توسط :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = D_i\,(fox^{-1})_{x(p)}$$

تعریف می‌شود تشکیل یک پایه برای $D_p(M)$ می‌دهد.

۱-۲-۱۰. قضیه([۱۴]) : یک تناظر دوسوئی بین $D_p(M)$ و T_pM وجود دارد.

با توجه به دو قضیه اخیر، می‌توان گفت T_pM یک فضای برداری است و $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ یک پایه برای آن است.

مجموعه تمام توابع حقیقی از کلاس C^{∞} روی Mرا با $C^{\infty}(M)$ نمایش می‌دهیم.

۱-۲-۱۱. تعریف : V را یک میدان برداری روی منیفلد Mمی‌نامیم، اگر V تابعی باشد که به هر نقطه p از M بردار V_p را نسبت دهد. میدان برداری V را هموار نامیم، هرگاه برای هر $f \in C^{\infty}(M)$، $V[f]$ که بصورت زیر تعریف می‌شود، عضو $C^{\infty}(M)$ باشد.

$$V[f]:M \to \mathbb{R}$$
$$V[f]_p = V_p[f]$$

۱-۲-۱۲. تعریف : مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری هموار روی Mرا با $\chi(M)$نمایش می‌دهیم.

۱-۲-۱۳. تعریف : فرض کنیم $\mathbb{F}:M \to N$ یک نگاشت دیفرانسیل پذیر از کلاس C^1 است. برای هر نقطه‌ی p از M نگاشت خطی $d\mathbb{F}_p$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$d\mathbb{F}_p : T_pM \to T_{\mathbb{F}(p)}N$$
$$X_p \to d\mathbb{F}_p\left(X_p\right)$$

چنان که برای هر $g \in C^{\infty}_{f(p)}(N)$، $(d\mathbb{F}_p)X_p[g]$ بصورت زیر است :

$$\left(d\mathbb{F}_p\right)X_p[g] = X_p[go\mathbb{F}]$$

از آنجایی که $(d\mathbb{F}_p)$ یک تبدیل خطی بین دو فضای برداری است، طبق آنچه در قبل گفتیم دارای نمایش ماتریسی است، درقضیه زیر این ماتریس را مشخص می‌کنیم.

۱-۲-۱۴. قضیه([۱۴]) : اگر $\mathbb{F}:M \to N$ یک نگاشت دیفرانسیل پذیر و (V,y)و (U,x) دوکارت موضعی در همسایگی نقاط $p,\mathbb{F}(p)$ باشند، آنگاه ماتریس $(d\mathbb{F}_p)$ در پایه‌های $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_i$ و $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\right\}_j$ عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

که در آن $f_i = \left(y \circ \mathbb{F} \circ x^{-1}\right)_i$.

بعد از توضیحاتی در مورد بردار مماس، فضای مماس و میدان برداری، می‌خواهیم دوگان مفاهیم قبل را معرفی کنیم. در صفحه‌ی قبل به هر نقطه‌ی $p \in M$، T_pM که یک فضای برداری است را نسبت دادیم، فضای دوگان آن را با $T_p^*(M)$ نمایش می‌دهیم و آن را فضای دوگان مماس در نقطه p می‌نامیم، و نیز $T^*(M) = \bigcup_{p\in M} T_p^*(M)$ یک منیفلد $2n$-بعدی از مرتبه‌ی C^{k-1} است(در صورتی که $\dim(M) = n$ و M منیفلدی از مرتبه‌ی C^k باشد).

۱-۲-۱۵. تعریف : فرض کنید ω نگاشتی به صورت $\omega: X(M) \to C^\infty(M)$ است چنان که :

$$\omega(X+Y) = \omega(X) + \omega(Y)$$
$$\omega(fX) = f\,\omega(X)$$

در این صورت ωرا یک ۱- فرمی می‌نامیم. مجموعه میدان‌های۱- فرمی از کلاس C^∞ روی M را با علامت $\Omega^1(M)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید (U,x) یک کارت موضعی باشد و $\omega \in \Omega^1(M)$ باشد، در این صورت داریم :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$$

که در آن منظور از dx_i، ۱- فرمی است که به صورت زیر عمل می‌کند :

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

۱-۲-۱۶. تعریف : یک میدان تانسوی مرتبه‌ی r روی منیفلد M عبارت است از تابع φ که به هر

نقطه‌ی p از M، عضوی از $T^r(T(M))$ به نام φ_p را نسبت می‌دهد. یعنی برای هر p، φ_p یک نگاشت، r- خطی به صورت زیر است :

$$\varphi_p : T_pM \times \ldots \times T_pM \to \mathbb{R}$$

میدان تانسوری φ از مرتبه‌ی r، تعریف شده روی منیفلد Mرا هموار نامیم هرگاه برای هر گردایه‌ی r- تائی $X_1,\ldots,X_r$ از میدان‌های برداری و هموار تعریف شده روی M، تابع زیر هموار باشد :

$$\begin{cases} \varphi(X_1,\ldots,X_r) : M \to \mathbb{R} \\ \varphi(X_1,\ldots,X_r)_{(p)} = \varphi_p(X_1(p),\ldots,X_r(p)) \end{cases}$$

اگر $\mathbb{F} : M \to N$ یک نگاشت هموار بین منفیلد های M و N باشد، آنگاه برای هر میدان تانسوری φ روی N، $\mathbb{F}^*\varphi$ یک میدان تانسوری روی Mاست و به صورت زیر تعریف می‌شود :

۱-۲-۱۷. تعریف : اگر $X_1,\ldots,X_r$ میدان‌های برداری روی منیفلد M باشند :

$$\mathbb{F}^*\varphi(X_1,\ldots,X_r) = \varphi\big(d\mathbb{F}(X_1),\ldots,d\mathbb{F}(X_r)\big)$$

اگر برای هر جایگشت $\sigma \in S(r)$ و میدان های برداری $X_1,\ldots,X_r$ داشته باشیم :

$$\varphi(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(r)}) = \operatorname{sgn}\sigma\varphi\big(X_1,\ldots,X_r\big)$$

می‌گوئیم φیک تانسور متناوب است. مجموعه‌ی تمام تانسورهای متناوب مرتبه‌ی rرا با $\Lambda^r\left(M\right)$ نمایش می‌دهیم و همچنین مجموعه‌ی تمام میدان‌های تانسوری متناوب مرتبه‌ی r در نقطه‌ی p را با علامت $\Lambda^r(T_pM)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم (U,x) کارتی موضعی برای منیفلد M است، برای هر $p \in U$، $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ پایه‌ی $T_p\left(M\right)$ و نیز پایه‌ی دوگان در این نقطه $\{dx_1(p),\ldots,dx_n(p)\}$ می‌باشد که در آن $dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \delta_{ij}$ است.

۱-۱-۱۸. قضیه([۱۴]) : برای کارت (U,x) و هر نقطه‌ی $p \in U$، گردایه‌ی زیر، پایه‌ای برای $T^r(T(M))$ است :

$$\{dx_{i1} \otimes dx_{i2} \otimes \ldots \otimes dx_{ir} : 1 \le i_1, \ldots, i_r \le n\}$$

و نیز همچنین گردایه‌ی زیر، پایه‌ای برای $\Lambda^r(T_pM)$ است :

$$\{dx_{i1} \wedge dx_{i2} \wedge \ldots \wedge dx_{ir} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n\}$$

در حالت خاص اگر θ یک n- فرم باشد، داریم :

$$\theta|_U = g dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

به طوری که $g : U \to \mathbb{R}$ نگاشتی هموار است.

توجه کنیم که اگر (V,y) و (U,x) دو کارت موضعی بروی منیفلد M باشند به طوری که $U \cap V \neq \varnothing$ و $\varphi \in \Lambda^n(M)$، در این صورت نمایش φ نسبت به دو کارت موضعی مذکور به صورت زیر می‌باشد :

$$\varphi = \hat{g} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \quad , \quad \varphi = \hat{h} dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$$

در این صورت داریم :

$$\hat{g}(p) = \hat{h}(p) j(x(p))$$

که در آن $J_{(x(p))} = \det\left(\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right]\right)_{(x(p))}$.[۱۴]

انتگرالگیری

برای تعریف انتگرال، باید مفهوم افراز واحد را برای منیفلد M بیان کنیم. برای آنکه بتوانیم افراز واحد را تعریف کنیم، نیاز به چند تعریف مقدماتی داریم :

یک پوشش فضای توپولوژیک M را موضعاً متناهی گویند اگر برای هر نقطه‌ی آن یک همسایگی موجود باشد، به طوری که فقط تعداد متناهی از اعضای پوشش را قطع نماید.