بسم الله الرحمن الرحيم

بار خدایا من به تو محتاجم و ازعذابت ترسان و پناهنده‌ام. بار خدایا عوض مکن نامم را و دگرگون مساز تنم را و سخت مکن بلایم را و شاد مکن به من دشمنم را و پناه می‌برم به عفوت از عقابت و پناه می‌برم به رحمتت از عذابت و پناه می‌برم به رضایت از خشمت و پناه می‌برم به تو از تو. والاست ستایشت، تو همچنانی که خود را ستودی و برتر از آنچه که گویند گویندگان.

سجده کنند برای تو سراپای وجودم و خیالم، معتقد است به تو دلم، این است هر دو دستم و هر چه جنایت کردم بر خودم، ای بزرگواری که امید به توست برای هر بزرگی، بیامرز برایم گناهان بزرگ را، زیرا گناه بزرگ را جز پروردگار بزرگ نمی‌آمرزد، پناه می‌برم به نور وجه تو که روشنی گرفت از آن آسمانها و زمینها و برداشته شد بدان تاریکی‌ها، اصلاح یافت بر آن کار اولین و آخرین، از ناگهانی عذابت و از تحول و از جا شدن عافیتت از زوال نعمتت، بار خدایا روزی من کن دلی پرهیزکار و پاک و از شرک بیزار که نه کافر باشم و نه بدبخت. روی خود را بر خاک نهادم و مرا سزاست که سجده کنم برایت.

۱۱۳۶۵۱

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

پایداری هایرز- اولام- راسیاس یک معادله‌ی تابعی کیوبیک

استاد راهنما

دکتر حمید واعظی

استاد مشاور

دکتر اصغر رنجبری

پژوهشگر

رقیه زارع ساران

مهر ۱۳۸۷

تقدیم به:

پدر و مادر عزیز

همسر فداکار و خواهر مهربانم

تقدیر و تشکر

در این چند سال که شاید از یک چشم برهم زدن هم کوتاهتر باشد، اساتید زیادی بودند که هر کدام بر زندگی من تأثیر گذاشتند. در این میان حضور چند تن از اساتیدم از همه پررنگتر بود. از آنجمله استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر واعظی که با راهنماییهای بیدریغشان کمک شایانی به من کردند و همچنین استاد مشاور بزرگوارم جناب آقای دکتر رنجبری که زحمت زیادی کشیدند و با وجود اینکه من فقط یک ترم با ایشان بودم به اندازه‌ی چندین سال از نظر علمی و اخلاقی از محضر ایشان استفاده کردم.

از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر فاروقی که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و قبل از آن در کلاسهای درس ایشان از محضرشان نهایت فیض را کسب کردم، کمال تشکر را دارم.

در پایان از خانواده‌ی خودم و خانواده‌ی همسرم نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

نام خانوادگی دانشجو: زارع ساران نام: رقیه

عنوان: پایداری هایرز- اولام- راسیاس یک معادله‌ی تابعی کیوبیک

استاد راهنما : دکتر حمید واعظی

استاد مشاور: دکتر اصغر رنجبری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر ۱۳۸۷ تعداد صفحه: ۹۹

کلید واژه‌ها: جبر باناخ ، B–مدول چپ ، معادله‌ی کوشی ، معادله‌ی کوادراتیک ،معادله‌ی کیوبیک ، پایداری هایرز– اولام– راسیاس

چکیده

در فصل اول این پایاننامه تعاریف مقدماتی آورده شده از جمله تعریف هایرز– اولام– راسیاس، در فصل دوم معادله‌ی کیوبیک $f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۱۲f(x)$ را حل کرده وپایداری هایرز- اولام- راسیاس آنرا بررسی می‌کنیم. در فصل سوم نیز معادله‌ی کیوبیک $f(x+۲y)+f(x-۲y)+٦f(x)=۴f(x+y)+۴f(x-y)$ را حل می‌کنیم و سپس در مورد پایداری هایرز- اولام- راسیاس آن بحث می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

مقدمه

مسئله‌ی پایداری نخستین بار توسط اس. ام. اولام [1] در سال ۱۹۴۱ در باره‌ی هممورفیسم گروهها با این سؤال مطرح شد:

فرض کنید $(G_1, *)$ یک گروه و $(G_2, \diamond, d)$ یک گروه متریک با متر d باشند. آیا به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود دارد بطوریکه هر گاه نگاشت $h : G_1 \longmapsto G_2$ در $d(h(x*y), h(x) \diamond h(y)) < \delta$ صدق کند، هممورفیسم واقعی $H : G_1 \longmapsto G_2$ را بتوان یافت که

$$d(h(x), H(x)) < \varepsilon?$$

به عبارت دیگر اگر یک نگاشت تقریباً هممورفیسم باشد، آیا می‌توان یک هممورفیسم حدالمقدور نزدیک آن پیدا کرد؟ در صورت مثبت بودن جواب، معادله‌ی $H(x*y) = H(x) \diamond H(y)$ هممورفیسم پایدار خواهد بود. یک سال بعد هایرز [2] مسئله‌ی اولام را برای نگاشتهای جمعی به این صورت بیان کرد:

قضیه : فرض کنید E_1 و E_2 فضاهای باناخ باشند و $f : E_1 \longmapsto E_2$ در خاصیت زیر به ازای $\varepsilon > 0$ و هر $x, y \in E_1$ صدق کند:

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon,$$

در این صورت یک نگاشت جمعی و منحصربه‌فرد $T : E_1 \longmapsto E_2$ وجود دارد بطوریکه به ازای هر $x \in E_1$ در رابطه‌ی

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \varepsilon,$$

S. M. Ulam[1]

D. H. Hyers[2]

صدق می‌کند و همچنین T از رابطه‌ی

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n},$$

بدست می‌آید. بعلاوه اگر $f(tx)$ به ازای هر $x \in E_1$ ثابت، نسبت به t پیوسته باشد، آنگاه T خطی خواهد بود.

به خاطر این گذشته‌ی تاریخی تعریف بالا را پایداری هایرز- اولام می‌گویند.

بعداً قضیه‌ی بالا در جهات مختلفی تعمیم داده شد، بعضی ریاضیدانان سعی کردند شرط کرانداری نرم تفاضل کوشی را تضعیف کنند از آن جمله ، ت. ام. راسیاس [3] در سال ۱۹۷۸ قضیه‌ی زیر را بیان و ثابت نمود:

قضیه : فرض کنید E_1 و E_2 فضاهای باناخ باشند و $f : E_1 \longmapsto E_2$ یک تابع باشد بطوریکه $f(tx)$ در t برای هر x ثابت پیوسته باشد. فرض کنید $\theta \geq 0$ و $p \in [0,1)$ چنان باشد که برای هر $x, y \in E_1$ رابطه‌ی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p),$$

برقرار باشد، آنگاه نگاشت خطی و منحصربه‌فرد $T : E_1 \longmapsto E_2$ وجود دارد بطوریکه به ازای هر $x, y \in E_1$ در رابطه‌ی

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \frac{2\theta}{2-2^p}\|x\|,$$

صدق کند.

مسایل پایداری که توسط راسیاس در بالا بیان شد پایداری هایرز- اولام- راسیاس گفته می‌شود. بعدها مسئله‌ی پایداری هایرز- اولام- راسیاس توسط تعدادی از ریاضیدانان تعمیم داده

TH. M. Rassias[3]

شد و این تعریف برای معادلات تابعی مشهوری مانند کوادراتیک، کیوبیک، کوارتیک، معادلات لگاریتمی، معادلات سینوسی و... مورد بررسی قرار گرفت.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول تعاریف مقدماتی آورده شده، در فصل دوم معادله‌ی کیوبیک و در فصل سوم یک نوع معادله‌ی تابعی کیوبیک خاصّ را مورد بحث قرار می‌دهیم.

مطالب این پایان‌نامه براساس مقاله‌ای از ژان[4] و کیم[5] بنام

$On\ the\ Hyers-Ulam-Rassias\ stability\ of\ a\ general\ cubic\ functional\ equation$

تنظیم شده است و همچنین در فصل دوم آن نیز از مقاله‌ی دیگر این دو شخص با عنوان

$The\ generalized\ Hyers-Ulam-Rassias\ stability\ of\ a\ cubic\ functional\ equation$

استفاده کردم.

Kil-Woung Jun[4]
Hark-Mahn Kim[5]

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ فضاها

تعریف ۱.۱ مجموعه‌ی X، در صورتی یک فضای متری است که به هر عضو p و q از X اعداد حقیقی $d(p,q)$، طوری مربوط شده باشد که

۱) $d(p,q) > 0$ هرگاه $p \neq q$ در غیر این صورت $d(p,q) = 0$،

۲) $d(p,q) = d(q,p)$،

۳) به ازای هر $r \in X$، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

یک فضای متری که در آن هر دنباله‌ی کوشی، همگرا باشد، فضای کامل (تام) نام دارد.

تعریف ۲.۱ یک فضای برداری (حقیقی یا مختلط) مجموعه‌ای مانند V(روی میدان حقیقی یا مختلط) است که عناصرش را بردار نامند و در آن دو عمل به نامهای جمع و ضرب اسکالر تعریف شده است که از خواص زیر برخوردارند:

a) به هر جفت بردار x و y بردار $x+y$ چنان نظیر است که

$$x + y = y + x \qquad , \qquad x + (y + z) = (x + y) + z,$$

V شامل بردار منحصربه‌فرد (بردار صفر یا مبدأ V) است، بطوریکه به ازای هر $x \in V$، $x + 0 = 0$ و همچنین بردار منحصربه‌فرد $-x$ چنان نظیر است که $x + (-x) = 0$،

b) به هر جفت (α, x) که $x \in V$ و α اسکالر است، بردار $\alpha x \in V$ چنان نظیر است که $1x = x$، $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ و دو قانون پخشپذیری

$$(\beta + \alpha)x = \beta x + \alpha x \quad , \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

برقرارند.

تعریف ۳.۱ فضای برداری X را فضای نرم‌دار می‌گویند اگر تابع $\|.\| : X \longmapsto \mathbb{R}$ وجود داشته باشد بطوریکه در شرایط زیر صدق کند:

a) برای هر $x, y \in X$ ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ،

b) اگر $x \in X$ و α یک اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\|$،

c) $\|x\| > 0$، اگر $x \neq 0$،

در اینصورت عدد حقیقی $\|x\|$ را نرم x می‌گوییم.

هر فضای باناخ یک فضای نرم‌دار است که با متر تعریف شده بوسیله‌ی نرمش تام باشد.

۲.۱ جبر باناخ

تعریف ۴.۱ هر جبر یک فضای برداری مانند B روی میدان حقیقی است که در آن یک عمل شرکت پذیر و پخشپذیر تعریف شده است؛ یعنی به ازای هر $x, y, z \in B$

$$x(y+z) = xy + xz \qquad (x+y)z = xz + yz \qquad x(yz) = (xy)z$$

و با ضرب اسکالر چنان مربوط شده باشد که به ازای هر $x, y \in B$ و αی اسکالر،

$$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y$$

هر گاه یک نرم در B موجود باشد که B را به یک فضای نرم‌دار بدل کرده و در نامساوی ضربی

$$\|xy\| \leq \|x\| \; \|y\| \quad (x, y \in B)$$

صدق کند. آنگاه B یک جبر نرم‌دار می‌باشد. هر گاه علاوه بر این B یک فضای متری تام نسبت به این نرم باشد، یعنی B یک فضای باناخ باشد، آنگاه B را یک جبر باناخ می گوییم.

اگر B دارای عنصری مانند e باشد که $xe = ex = x \ (x \in B)$ می‌گوییم B جبر باناخ یکانی است.

۳.۱ A - مدول چپ باناخ

تعریف ۵.۱ فرض کنیم A یک جبر نرم‌دار یکانی روی میدان حقیقی $\mathbb{R}$ باشد و M فضای نرم‌دار خطی. M را همراه با عمل ضرب در اسکالر $. : A \times M \longmapsto M$ ، A - مدول چپ می‌نامیم اگر

۱) به ازای هر دو عضو از M مثل x و y و هر عضو از A مثل r، $r(x+y) = rx + ry$،

۲) به ازای هر عضو از M مثل x و هر دو عضو از A مثل s و r، $(r+s)x = rx + sx$،

۳) به ازای هر عضو از M مثل x و هر دو عضو از A مثل s و r، $(rs)x = r(sx)$،

۴) به ازای هر عضو از M مثل x، $1x = x$،

۵)عدد حقیقی و مثبت k موجود باشد که به‌ازای $m \in M$ و $a \in A$ رابطه‌ی $m \in M \ , a \in A \ , \|am\| \leq k\|a\|\|m\|$، برقرار باشد.

و همچنین M را A - مدول چپ باناخ گوییم هرگاه M یک فضای نرم‌دار باشد کامل باشد.

۴.۱ مفهوم اندازه‌پذیری

تعریف ۶.۱ a) گردایه‌ی M از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک $\sigma-$ جبر در X نامیم، اگر M از خواص زیر بهره‌مند باشد :

۱) $X \in \mathrm{M}$،

۲) هرگاه $A \in \mathrm{M}$، آنگاه $A^c \in \mathrm{M}$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است،

۳) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $A_n \in \mathrm{M}$، آنگاه $A \in \mathrm{M}$،

b) هرگاه M یک $\sigma-$ جبر در X باشد، آنگاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای M را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

c) هرگاه X یک فضای اندازه‌پذیر، Y یک فضای توپولوژیک و f یک نگاشت از X به Y باشد، آنگاه گوییم f اندازه پذیر است اگر به ازای هر عضو V از توپولوژی در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در X باشد.

قضیه لوسین : اگر $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد و $\varepsilon > 0$، آنگاه یک مجموعه‌ی فشرده $E \subset [a, b]$ وجود دارد که $\mu(E^c) < \varepsilon$ و $f|_E$ پیوسته است.

۵.۱ پایداری معادلات تابعی

در اینجا پایداری دو معادله‌ی تابعی را بطور گذرا بیان می‌کنیم ابتدا معادله‌ی کوشی را تعریف و سپس پایداری آنرا بطور خلاصه بحث می‌کنیم. در بخش بعدی معادله‌ی کوادراتیک را معرفی می‌کنیم.

۱.۵.۱ پایداری معادله‌ی کوشی

تعریف ۷.۱ معادله‌ی تابعی

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

را معادله‌ی جمعی یا کوشی و هر جواب این معادله را نگاشت جمعی می‌گویند. تابع $f(x)=x$، در این معادله صدق می‌کند پس نگاشت جمعی است.

معادلات کوشی از اهمیت ویژه‌ای در موضوع پایداری برخوردار هستند. مسئله‌ی پایداری اولین بار در مورد این معادلات مطرح شد، به همین خاطر سیر تحولی پایداری معادلات تابعی را از طریق معادله‌ی کوشی بیان می‌کنیم.

تعریف ۸.۱ فرض کنیم G و B به ترتیب نیم گروه و فضای باناخ و δ مقداری مثبت باشد. گوییم معادله‌ی کوشی روی زوج (B,G) پایداری هایرز- اولام دارد، هرگاه به ازای هر $f:G\longmapsto B$ که در رابطه‌ی

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\leq\delta \qquad x,y\in G \tag{۱.۱}$$

صدق کند، بتوان یک نگاشت جمعی مانند a یافت بطوریکه به ازای هر $x\in G$ داشته باشیم

$$\|f(x)-a(x)\|\leq\varepsilon,$$

که در آن $\varepsilon > 0$ مستقل از x و تنها وابسته به δ می‌باشد.

هایرز قضیه‌ی زیر را در مورد پایداری معادلات جمعی ثابت کرد.

قضیه ۹.۱ فرض کنید E_1 و E_2 به ترتیب فضاهای نرم‌دار و باناخ باشند و $\delta \geq 0$. همچنین نگاشت $f : E_1 \longmapsto E_2$ برای هر $x, y \in E_1$ در نامساوی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \ ,$$

صدق کند، آنگاه نگاشت $a : E_1 \longmapsto E_2$ با تعریف $a(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ تنها نگاشت جمعی است که برای هر $x \in E_1$ در نامساوی زیر صدق می کند:

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \delta.$$

همچنین اگر تابع $f(tx) \longmapsto t$ از $\mathbb{R}$ به E_2 برای x ثابت، نسبت به t پیوسته باشد، آنگاه a خطی است.

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۱.۱ از منبع [۱۰] □

اگر در تعریف ۸.۱ تفاضل کوشی (۱.۱) بی‌کران باشد، آنگاه این پایداری را پایداری هایرز-اولام-راسیاس می‌گوییم و توسط ت. ام. راسیاس در سال ۱۹۸۷ بصورت قضیه‌ی زیر مطرح شد:

قضیه ۱۰.۱ فرض کنیم $\delta > 0$ و $0 < p < 1$ مقادیر ثابتی باشند. همچنین نگاشت $f : E_1 \longmapsto E_2$ از فضای برداری نرم‌دار E_1 به فضای باناخ E_2 چنان باشد که به ازای هر $x, y \in E_1$، نامساوی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta(\|x\|^p + \|y\|^p),$$

برقرار باشد. در این صورت $a(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ برای هر $x \in E_1$ موجود است و a نگاشت منحصربه‌فردی است که در رابطه‌ی

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \frac{2}{2-2^p}\, \delta \|x\|^p \,,$$

صدق می‌کند. همچنین اگر تابع $t \longmapsto f(tx)$ از $\mathbb{R}$ به E_2 برای هر x ثابت پیوسته باشد، آنگاه a خطی است.

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۱.۲ از منبع [۱۰] □